Solução de Sistemas Lineares
(continuação)

META

Resolver o problema de um sistema linear, de qualquer tamanho.

OBJETIVOS

Estudar os algoritmos de fatoração LU e métodos iterativos.

lino@ufs.br

10.1 Introdução

Os métodos de fatoração são especialmente úteis quando se tem que a matriz A pode ser expressa em um produto de matrizes LU, onde L é uma matriz triangular inferior e U uma matriz triangular superior, definidas adiante.

Se os valores iguais a 1 estão na diagonal L, o método é chamado de **método de Doolittle** e se os valores 1 estão na diagonal U , o método é chamado de **método de Crout**.

Os métodos iterativos são aproximações sucessivas de vetores solução que tendem ao valor exato no limite. Requerem uma condição de convergência.

10.2 Fatoração L.U.

Seja o sistema Ax = b.

O método consiste em transformar a matriz A em um produto de matrizes triangulares:

$$A = LU$$

$$A = (a_{ij})_{nxn}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & 2 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & 2 & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & 2 & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & 2 & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & u_{3n} \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ax = b => LUx = b => fazendo Ux = z

Lz = b Sistema triangular inferior resolvido em forma recursiva e:
Ux = z outro sistema triangular resolvido recursivamente.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 2 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & 2 & a_{2n} \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ a_{n1} & a_{n2} & 2 & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 2 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ l_{n1} & l_{n2} & 2 & l_{nn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & 2 & u_{1n} \\ 0 & 1 & 2 & u_{2n} \\ \vdots & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \quad = \quad L \quad . \quad U$$

$$l_{11} = a_{11}$$
$$l_{11}.u_{12} = a_{12} \rightarrow u_{12} = a_{12} / l_{11} \;,\; l_{11} \neq 0$$

îMultiplica cada linha de L com todas as colunas de Uò

10.3 Métodos Iterativos para a Solução de Ax = b

Seja o sistema Ax = b.

<u>Passo 0:</u>
Transformar o sistema Ax = b em outro sistema equivalente de forma :

$$\vec{x} = C\vec{x} + \vec{f}$$

<u>Passo 1:</u>
Valores iniciais:

$$\vec{x}^0 = \vec{f}$$
$$j \leftarrow 0$$

<u>Passo 2:</u>

$$j \leftarrow j + 1$$
$$\vec{x}_j = C\vec{x}^{j-1} + \vec{f}$$

<u>Passo 3:</u>
Se $|x_i^j - x_i^{j+1}| < \varepsilon \quad \forall i$
então Solução aproximada $\vec{x}^j$
Senão Volta ao Passo 2

O algoritmo gera uma seqüência $\{\vec{x}\} \rightarrow \vec{x}^*$ como solução.

$$\{\vec{x}\} \Rightarrow \vec{x}^0, \vec{x}^1, \vec{x}^2, \vec{x}^3, \ldots, \vec{x}^n$$

$$\vec{X}^j = \begin{bmatrix} \vec{x}_1^{\,j} \\ \vec{x}_2^{\,j} \\ \vdots \\ \vec{x}_n^{\,j} \end{bmatrix}$$

10.4 Condições de Convergência

Para que a seqüência gerada, $\{\vec{x}^j\}$, seja convergente, é necessário que $\|C\| < 1$ ($\|C\|$ - norma da matriz).

Norma da matriz C

$$\|C\| = mín\{\|C\|_l, \|C\|_c\}$$

$\|C\|_l \rightarrow$ norma da matriz linha

$$\|C\|_l = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \right\}$$

$$\|C\|_c = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| \right\}$$

$$\|C\| < 1$$

ñOu a soma de todos os elementos das linhas ou a soma de todos os elementos das colunas deve ser menor que 1à

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\|A\| = mín\{\|A\|_l, \|A\|_c\}$$

$$\|A\|_l = \max\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}\right)\right\} = \frac{5}{6}$$

$$\|A\|_c = \max\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right), \left(1+\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}\right)\right\} = \frac{5}{4}$$

$$\|A\| = mín\left\{\frac{5}{6}, \frac{5}{4}\right\} = \frac{5}{6} < 1$$

Seja o sistema Ax = b, sistema Diagonal dominante, então:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + 2 + a_{1n}x_n = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + 2 + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ 4 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + 2 + a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{array}$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad \Rightarrow \quad c_{ij} = \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Solução:

$$x_1 = 0x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + 0x_2 + \frac{1}{4}x_3 + 1$$

$$x_3 = \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 + 0x_3 + 1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = Cx + f$$

$$\|C\| = mín\,\{\|C\|_l, \|C\|_c\}$$

$$\|C\|_l = \max\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)\right\} = \frac{2}{3}$$

$$\|C\|_c = \max\left\{\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right\} = \frac{7}{12}$$

$$\|C\| = mín\left\{\frac{2}{3}, \frac{7}{12}\right\} < 1$$

10.5 Método de Jacobi:

<u>Passo 1:</u> $\overset{C}{x} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varepsilon = 0{,}1$

<u>Passo 2:</u>

$$\vec{x}^0 = C\vec{x}^0 + 1$$

$$x_1^1 = 0x_1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3} = 1$$

$$x_2^1 = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + 0x_2 + \frac{1}{4}\cdot 1 + 1 = \frac{7}{6}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot 1 + 0x_3 + 1 = \frac{13}{15}$$

<u>Passo 3:</u>
Regra de Parada

$$\left|1 - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|1 - \frac{14}{12}\right| < \varepsilon$$

$$\left|1 - \frac{13}{15}\right| < \varepsilon$$

10.6 Método de Gauss-Seidel:

<u>Passo1:</u>

$$\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Passo 2:</u>

$$\vec{x}^1 = C\vec{x}^0 + \vec{f}$$

$$x_1^1 = 0x_1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3} = 1$$

$$x_2^1 = -\frac{1}{4}\cdot 1 + 0x_2 + \frac{1}{4}\cdot 1 + 1 = 1$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5}\cdot 1 - \frac{1}{5}\cdot 1 + 0x_3 + 1 = 1$$

10.7 Atividades

1. Transformar as matrizes em fatores LU

1 2 3 1 2 3

2	4	6	3	5	7
3	5	7	2	4	6

2. Escrever o algoritmo, e as formulas gerais para o método do elemento maior que funciona igual ao método de Gauss-Jordan sendo que a escolha do elemento pivô é o maior elemento da coluna em valor absoluto, entre as linhas que não contém elementos pivôs escolhidos. Fazer trocas de linhas para arrumar o sistema.

10.8 Referências

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos**. 2ª Ed. Campinas SP: Editora da UNICAMP, 2003. ISBN: 85-268-0636-X , CDD ï 620.00151

BURDEN, L. Richard, J. Douglas Faires **Análise Numérica** SP: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 85-221-0297-X CDD - 515