# Aula 3

## VELOCIDADE INSTANTÂNEA

### META

Expandir o estudo de cinemática para o caso onde existe aceleração e orientar sobre a utilização de gráficos para estudar os movimentos.

### OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá:
determinar a diferença entre velocidade média e velocidade instantânea;
calcular a velocidade instantânea de objetos acelerados;
construir gráficos que mostram a evolução temporal da posição e da velocidade de objetos que estão acelerados.

### PRÉ-REQUISITOS

Conceituação de Sistemas de Referência, conceitos básicos de cinemática e álgebra básica.

**Frederico Guilherme de Carvalho Cunha**

## INTRODUÇÃO

Bem vindo à primeira aula de nosso segundo módulo. À medida que vamos entendendo os conceitos da física, vamos também aumentando, gradativamente, o uso de ferramentas matemáticas. Nesta aula, estudaremos os movimentos em uma dimensão que não têm velocidade constante. Estes são os movimentos que realmente observamos no dia-a-dia. Todos os corpos, geralmente, estão sofrendo algum tipo de aceleração. Quando chegarmos ao estudo das leis de Newton, teremos um entendimento maior sobre as causas, mas hoje observaremos os efeitos de uma aceleração sobre o movimento dos corpos. Para que possamos apreciar toda a beleza da teoria, faremos uma pequena introdução ao uso da derivada. Veremos que a derivada é um conceito simples e que, na maioria dos casos, é muito fácil de utilizar. Ao final desta aula, veremos que a utilização de gráficos é de grande valia para que possamos visualizar a trajetória de um corpo e, de maneira bastante natural, apreciar o conceito geométrico da derivada. Nesta aula, ainda, expandiremos o estudo da cinemática para os corpos acelerados. Não serão discutidos os causadores de tais acelerações, mas apenas como tais acelerações podem alterar o movimento dos corpos. Manteremos também a utilização de corpos idealmente sem massa e sem volume: "pontos materiais". Divirta-se!

(Fonte: http://www.oesteinforma.com.br)

O estudo do movimento engloba a aplicação das equações de movimento em diversas situações, assim como o seu estudo mais detalhado se faz através do uso de gráficos que descrevem a posição, velocidade e aceleração em função do tempo.

O conceito de velocidade instantânea, em contraposição à velocidade média, por sua vez, vai requerer uma introdução ao cálculo diferencial, apesar de não fazermos aqui um estudo sistemático e elaborado sobre esse assunto como seria de se esperar em um curso de cálculo I. É necessário, porém, que façamos uma explanação breve para que lhe desperte uma visão intuitiva sobre o que é uma diferencial e para que você compreenda algumas técnicas básicas de diferenciação em uma dimensão. Além disso, é importante fazer a correlação entre a interpretação da diferencial como uma função e a sua representação em um gráfico e relacionar a derivada de uma função em um ponto com a tangente que passa por uma curva naquele ponto.

A aplicação desta relação em diversos pontos de uma curva de velocidade em função do tempo possibilitará a você perceber que, de fato, a derivada da velocidade em cada ponto corresponde à aceleração naquele ponto, da mesma maneira que, em um gráfico de posição em relação ao tempo, a derivada, em um ponto, corresponde à velocidade naquele ponto e pode ser visualizada como sendo a tangente naquele ponto.

## VELOCIDADE INSTANTÂNEA

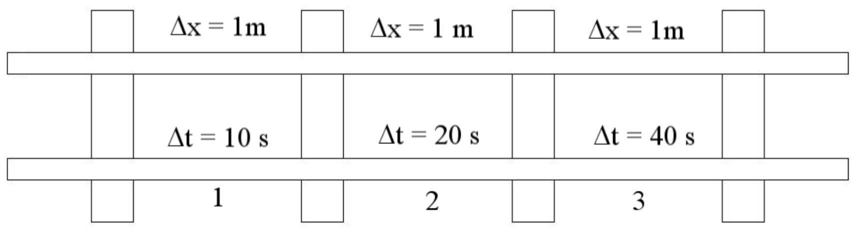
Em nossa aula passada, estudamos o conceito de velocidade média e vimos que a velocidade média é a distância percorrida, dividida pelo tempo gasto para percorrer esta distância. Se viajarmos de uma cidade para outra, distantes 80 quilômetros, e gastarmos uma hora, teremos uma velocidade média de 80 km/h.

Agora, vamos atravessar uma cidade do início ao fim. A distância percorrida é de 30 quilômetros e gastamos uma hora para percorrê-la. Você vê algum sentido na velocidade média? Não! Passamos por grandes avenidas onde o limite de velocidade é de 80 km/h. Tivemos que parar em diversos semáforos e em cruzamentos perigosos. Para que pudéssemos fazer isso, tivemos que usar os freios e o acelerador do carro, ou seja, mudamos a nossa velocidade a cada instante. Assim, da mesma maneira que poderíamos dizer, com precisão, qual a nossa posição (instantânea) em um dado momento, gostaríamos agora de poder dizer qual era a nossa velocidade instantânea neste mesmo momento.

Se você pensou em olhar no velocímetro do carro, acertou. Sim, é exatamente isto que nos informa o velocímetro: qual a velocidade instantânea. E aquele ponteirinho está sempre se mexendo, não é mesmo? E agora, como faremos para calcular esta velocidade? É fácil. Em primeiro lugar, usaremos a expressão matemática que relaciona a velocidade média, o deslocamento e o tempo:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Por que esta equação não pode ser usada para a velocidade instantânea? A razão é muito simples: verifique a figura abaixo:




Esta figura mostra uma linha de trem, onde a diferença entre dois dormentes é sempre de um metro, mas que o tempo que o limpa-trilhos (aquela parte pontuda na frente do trem) leva para atravessar esta distância varia! No trecho 1, leva 10 segundos; no trecho 2, leva vinte segundos; e, no 3, ele leva quarenta segundos. Podemos calcular aqui a velocidade média:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3m}{70s} \cong 0.0428\text{m}/s$$

Podemos também determinar a velocidade média em cada trecho:

$$\overline{v_1} = \frac{1m}{10s} = 0.1\text{m}/s$$

$$\overline{v_2} = \frac{1m}{20s} = 0.05\text{m}/s$$

$$\overline{v_3} = \frac{1m}{40s} = 0.025\text{m}/s$$

Em três trechos distintos, portanto, obtivemos três velocidades diferentes porque o tempo gasto para percorrer o trecho mudou. Outra maneira de visualizar isto seria manter os tempos iguais e variar a distância percorrida! Temos três trechos que serão percorridos no espaço de 10 segundos, mas com as velocidades que acabamos de calcular. O comprimento de cada um destes trechos é obtido facilmente ao modificarmos a equação da velocidade média:

$$\Delta x = \bar{v}.\, \Delta t$$

Obtemos, assim, os seguintes deslocamentos:

$$\Delta x_1 = \left(\frac{0.1\text{m}}{\text{s}}\right).(10\text{s}) = 1\text{m}$$

$$\Delta x_2 = \left(\frac{0.05\text{m}}{\text{s}}\right).(10\text{s}) = 0.5\text{m}$$

$$\Delta x_3 = \left(\frac{0.025\text{m}}{\text{s}}\right).(10\text{s}) = 0.25\text{m}$$

Quando utilizamos intervalos de tempo iguais, a velocidade determina qual a distância percorrida. A distância total percorrida seria então 1,75 metros, que, dividida por 30 segundos, dá uma velocidade média de 0.058m/s. Mas, estes valores não se correspondem! Parece haver algo errado; e, de fato, há. Nós criamos uma divisão arbitrária entre três momentos quando o trem passava pelos trechos 1, 2 e 3! Não levamos em consideração que, para passar do trecho 1 para o trecho 2, houve uma diminuição da velocidade que não foi *instantânea*!

A velocidade diminuiu desde um valor inicial até um valor final de maneira gradual. Dividir, então, o movimento em três trechos não foi suficiente para que pudéssemos obter o valor da velocidade instantânea em cada um dos pontos. Precisaríamos dividi-lo em muitos mais trechos! Com o aumento do número de trechos, porém, diminui o espaço de tempo que o trem gasta para percorrê-lo. Assim, podemos, formalmente, definir a velocidade instantânea:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

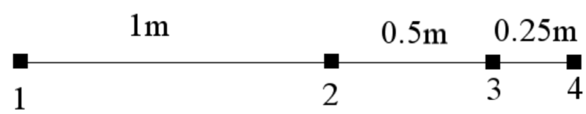
Esta equação informa-nos que a velocidade instantânea de um objeto é dada pela divisão da distância percorrida (Dx) dividida pelo tempo gasto para percorrê-la (Dt), quando este intervalo de tempo é muitíssimo pequeno, na verdade quase igual a zero. Em linguagem matemática, dizemos: “no limite de Dt tendendo a zero”. Neste limite, o denominador chega perigosamente perto do zero, mas o numerador também, e o quociente ainda existe! Esta é a definição da derivada!

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

onde lemos que “a velocidade instantânea é dada pela derivada da posição em relação ao tempo”, ou que “a velocidade instantânea é dada pela taxa de variação da distância em relação ao tempo”.

São inúmeras as maneiras de descrever esta definição. Para isso, vamos iniciar o nosso estudo de gráficos. O primeiro gráfico é o da posição em função do tempo. Utilizaremos os dados do exemplo trabalhado acima: uma partícula sai de um ponto 1 e depois de 10 segundos chega a um ponto 2 que dista 1 metro do ponto 1. Após mais 10 segundos, chega a um ponto 3 que dista 0,5 metros do ponto 2. Finalmente, após mais 10 segundos, chega ao ponto 4 que dista 0.25 metros do ponto 3. A figura abaixo ilustra a situação.

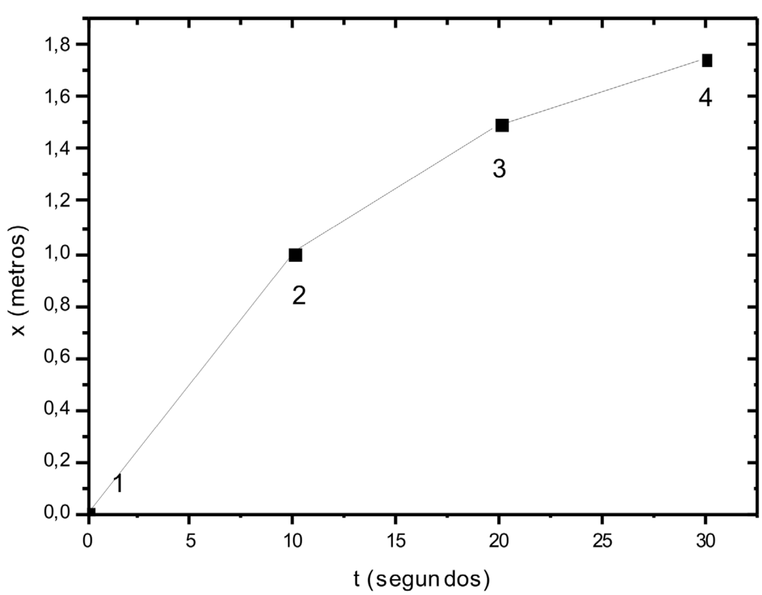
O tempo gasto para ir de 1 a 2 é o mesmo que o tempo gasto para percorrer qualquer um dos outros trechos.




Para podermos fazer um gráfico agora da posição em relação ao tempo, teremos que estabelecer um ponto de referência. Vamos começar dizendo que o nosso sistema de referência e de coordenadas está colocado sobre o ponto 1. Nesse caso, podemos fazer uma tabela que mostra a posição x do objeto a cada instante em relação à origem:

| Ponto | x (m) | t (s) |
|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 0 |
| 2 | 1.00 | 10 |
| 3 | 1.50 | 20 |
| 4 | 1.75 | 30 |

A partir desta tabela, podemos obter o seguinte gráfico:



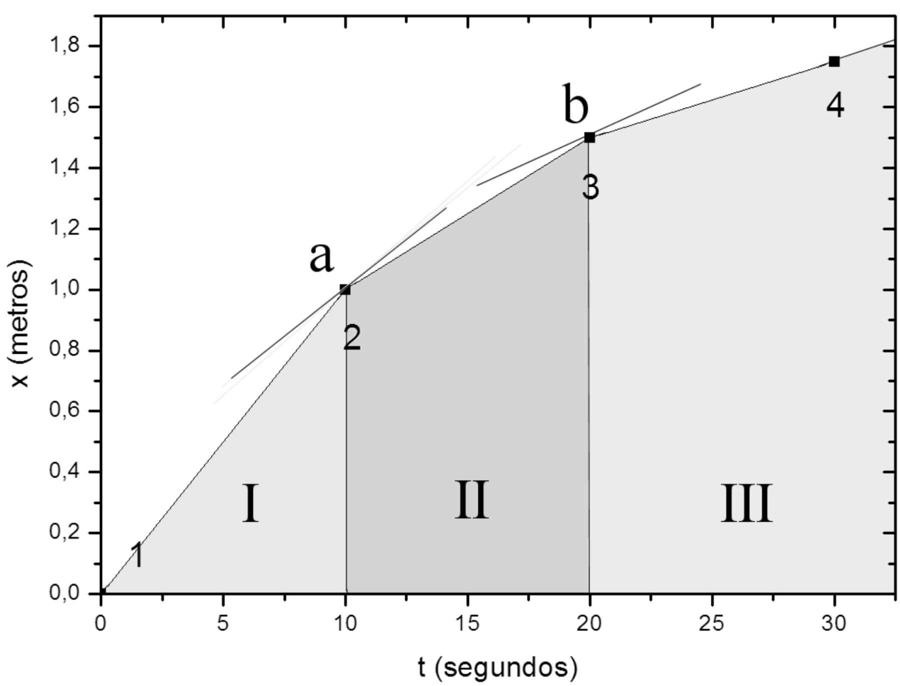
Vejamos agora como faremos para obter as velocidades médias nos trechos 1, 2 e 3, conforme a figura da linha de trem. Podemos ver, inicialmente, que o trecho 1 é aquele que parte do ponto 1 e vai até o ponto 2, ou seja, sai da origem e vai até uma distância de um metro em dez segundos. A velocidade média pode então ser calculada:

$$\overline{v_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1-0}{10-0} = 0.1\text{m}/s$$

$$\overline{v_2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{1{,}5-1}{20-10} = 0.05\text{m}/s$$

$$\overline{v_3} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_4 - x_3}{t_4 - t_3} = \frac{1{,}75-1{,}5}{30-20} = 0.025\text{m}/s$$

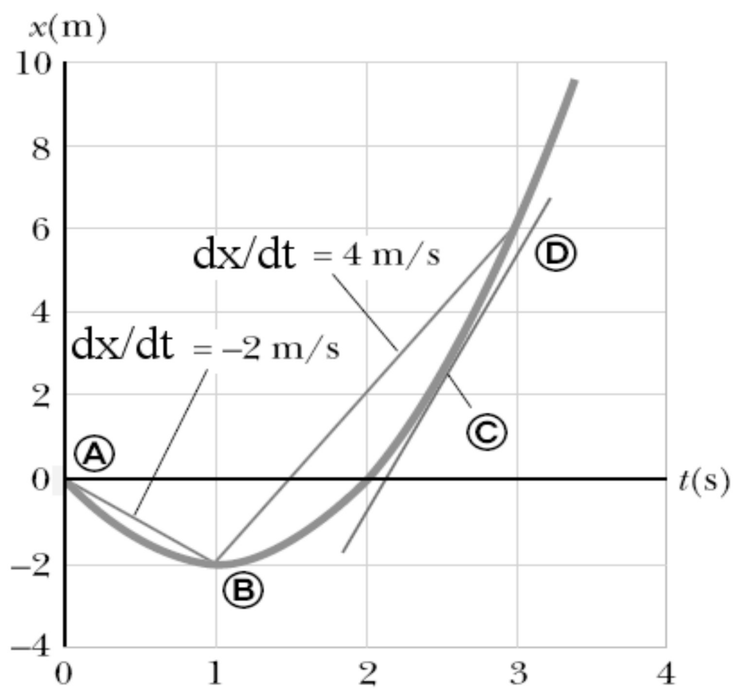
Esses resultados já eram previsíveis, mas o ponto interessante pode ser visto na figura abaixo, onde a última figura está ligeiramente alterada:




Nós podemos ver agora as três regiões distintas I, II e III. Cada uma destas três regiões tem uma velocidade média constante. Quando passamos entre as regiões nos pontos 2 e 3, a velocidade muda. Como podemos então interpretar as retas *a* e *b*? Por inspeção da figura, notamos que as retas que unem os pontos 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4 e as retas *a* e *b* correspondem à **tangente** da curva em cada um dos pontos! Isto significa que a tangente que obtemos em um gráfico corresponde à derivada da variável em *y* em relação à variável em *x*.

Em cada ponto da curva que vai de 1 até 4, se tomarmos a tangente à curva naquele ponto, obteremos a derivada da distância em relação ao tempo, ou seja, a velocidade instantânea! Note que, entre os pontos 1 e 2, qualquer ponto que seja escolhido terá a mesma tangente, o que significa que terá a mesma velocidade instantânea, ou seja, em todos estes pontos, a velocidade instantânea será igual à velocidade média. Quando passarmos de uma região para outra, a tangente será diferente e, portanto, a velocidade instantânea será diferente.

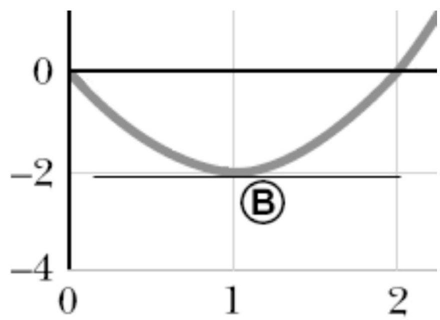
Vejamos um exemplo para esclarecer um pouco mais estes conceitos. Considere a figura abaixo:




Nós temos agora um movimento sensivelmente mais realista: um objeto sai de um ponto **A** que corresponde à origem do sistema de coordenadas e anda para a esquerda (ou seja, para valores negativos de *x*). Depois de um segundo, chega ao ponto **B** e inverte a direção de movimento. Passa novamente pela origem e percorre na direção dos pontos **C** e **D**. Podemos extrair diversas informações a respeito desse movimento. A primeira delas é que, em nenhum lugar, o gráfico corresponde a uma reta. Isto significa que, em nenhum lugar, a velocidade média é igual à velocidade instantânea. Considere, por exemplo, o trecho entre **A** e B. O corpo vai da posição x=0 m até a posição x=-2m em apenas 1 segundo. Podemos calcular a sua velocidade média facilmente:

$$\overline{v_{a \to b}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-2 - 0}{10 - 0} = -2\ m/s$$

Mas, esta velocidade corresponde à velocidade instantânea? A resposta é não! Essa igualdade só ocorre em um único ponto da trajetória que corresponde ao tempo de 0,5 segundos! Neste ponto, uma reta tangente à curva tem a exata inclinação da reta que une os pontos **A** e **B**. Em todos os outros pontos, a inclinação é diferente. Vamos ver o que acontece exatamente no ponto **B**. Se traçarmos uma tangente à curva no ponto B, ela será parecida com a seguinte:



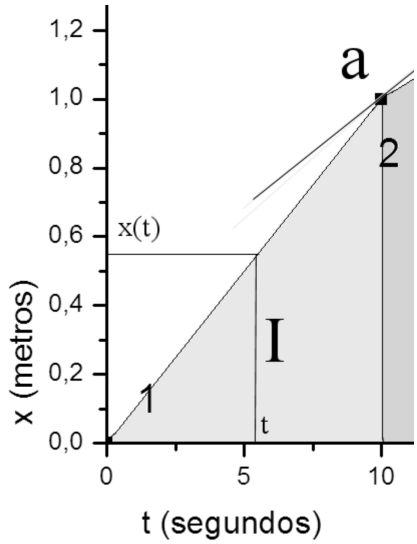

A reta corresponde à tangente no ponto **B**. Mas, qual o valor desta tangente? Ou ainda, qual é a variação Dx? É zero! A tangente também é zero, e então a velocidade instantânea (apenas em **B**) é zero. O que isto quer dizer? Isto significa simplesmente que o corpo parou. Notamos que precisava mesmo ter parado, uma vez que estava indo para uma direção e neste ponto inverteu a direção de movimento!

Agora que já compreendemos como interpretar um gráfico, verificaremos como equacionar um movimento. A equação que descreve a velocidade média é a divisão da distância percorrida pelo tempo gasto. A velocidade instantânea é dada pela derivada da posição em relação ao tempo. Como nós podemos, agora, trabalhar matematicamente? É muito fácil.

Inicialmente, notemos que a posição de um corpo em relação a um sistema de referência é dada pela sua distância até este ponto em função do tempo: $x = x(t)$ Isto nos diz que a posição depende do tempo. Observemos novamente a figura na pag. 53: a região I está limitada por uma reta. Isto significa que a velocidade média é a mesma em todos os pontos desta região. Sendo assim, há uma maneira simples de se determinar a posição do corpo em relação ao tempo:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 0{,}1\text{m}/s$$

Mas, como a velocidade é constante, podemos escolher um ponto qualquer x (t) que corresponde ao tempo t. A figura a seguir, ilustra o caso:




A cada t, teremos um x(t). Levando isso em consideração, voltamos à equação da velocidade média (lembrando que $x_1 = 0$ e $t_1 = 0$):

$$\bar{v} = \frac{x(t) - x_1}{t - t_1} = \frac{x(t)}{t} \quad 0{,}1 m/s$$

Finalmente, rearranjando esta equação obtemos a função horária do movimento nesta região:

$$x(t) = 0{,}1t$$

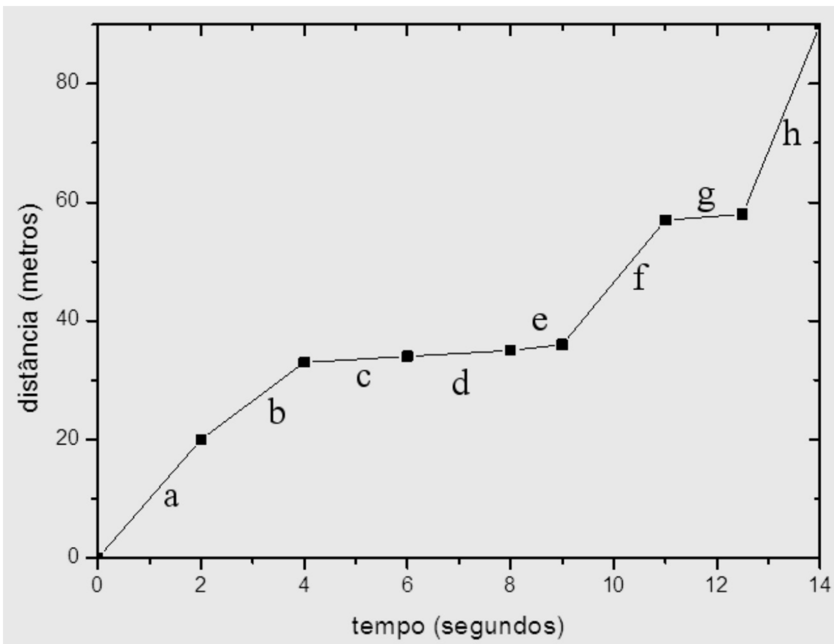
Como o expoente de *t* é 1, dizemos que a distância varia linearmente com o tempo. Isto somente ocorre quando temos uma reta. Quando há uma curva, podemos ter quaisquer expoentes e mesmo algumas funções matemáticas. O importante a ressaltar é que, geralmente, partimos de uma função horária e, a partir dela, obtemos informações sobre o movimento. Antes de continuar com nosso estudo, vamos dar uma "parada" a fim de verificar como resolveremos alguns probleminhas...

## ATIVIDADES

I. A posição de um automóvel foi observada em vários momentos cujos resultados estão colocados na tabela abaixo. Encontre a velocidade do carro para (a) o primeiro segundo; (b) os últimos três segundos e (c) todo o período de observação.

| $t$(s) | 0 | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 5.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$(m) | 0 | 2.3 | 9.2 | 20.7 | 36.8 | 57.5 |

II. O gráfico abaixo mostra o movimento de um carro preso em um congestionamento. Sua velocidade muda o tempo todo. (a) Se a sua única informação fosse a distância percorrida durante o tempo disponível, qual seria a velocidade média que você obteria? (b) Conhecendo o gráfico, qual foi a velocidade mais alta alcançada pelo carro?



## COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

I. Para resolvermos a parte (a) deste problema, precisaremos apenas verificar, na tabela, que, durante o primeiro segundo, o carro percorreu 2.3 metros. A sua velocidade, portanto, foi de $v = \frac{2.3}{1.0} = 2.3\text{m}/s$ . Para a parte (b), notamos que, nos últimos três segundos, o carro percorreu uma distância total de (57.5-20.7) 20.7 metros, o que leva a uma velocidade média de $v = \frac{20.7}{3.0} = 6.9\text{m}/s$ . Para o último item, (c), tudo que temos a fazer é dividir a distância total pelo tempo total: $v = \frac{57.5}{5} = 11.5\text{m}/s$ . Como podemos observar, a velocidade média em todo o percurso é sensivelmente diferente da velocidade média no primeiro trecho e no último terço do trajeto. Note que, na realidade, em nenhum dos casos, medimos a velocidade instantânea, apenas a velocidade média em intervalos bem definidos de tempo. Calcularemos a velocidade instantânea nas próximas páginas.

II.A primeira pergunta deste exercício pode ser facilmente respondida quando percebemos que a distância total percorrida foi de 90 metros em 14 segundos, ou seja, uma velocidade média de 6.4 metros por segundo. A segunda, no entanto, nos leva a uma pequena reflexão: cada um dos trechos de a até h está simbolizado por uma reta; a velocidade em cada um dos pontos desta reta é a mesma? A resposta é sim. Em cada um dos pontos da reta a, por exemplo, uma tangente a este ponto será paralelo à própria reta a. Então, a velocidade instantânea está definida em todos os pontos de todas retas e corresponde ao coeficiente angular da mesma, ou seja, Dx/Dt! Para escolher então qual das retas corresponde à maior velocidade só precisamos inspecionar e verificar aquela que tem o maior coeficiente angular, ou seja, qual é a mais inclinada! A inspeção então nos indica que a mais inclinada é a reta h, e seu coeficiente angular pode ser obtido, dividindo a sua altura pela sua base: altura = (90-60) = 30 metros; base = (14-12.5) = 1.5 segundos. Obtemos, assim, a nossa velocidade máxima: $v = \frac{3.0}{1.5} = 20\ \text{m}/s$. Preste bastante atenção agora à diferença entre estes dois problemas: no primeiro, você dispunha apenas de uma tabela com os valores de distância e tempo. Por isso, podia calcular a velocidade média em alguns trechos, não tinha qualquer informação sobre a velocidade instantânea. No segundo problema, é diferente: ao invés de uns poucos pontos, o que temos é um gráfico com infinitos pontos. Como ele é formado de segmentos de retas, podemos concluir que, nestes segmentos de reta, a velocidade média é igual à velocidade instantânea, só ocorrendo mudança nestes valores quando passamos de um trecho para outro.

## ACELERAÇÃO

Nos parágrafos anteriores, vimos que o conceito de velocidade instantânea é diferente da velocidade média. Vimos também alguns gráficos que mostravam trechos percorridos com velocidades diferentes. Particularmente, discutimos o caso daquele pobre coitado que está preso em um grande congestionamento. Vamos prestar um pouco mais de atenção a este problema. Vamos imaginar uma grande auto-estrada que tem um trecho de cerca de 10 km em linha reta e com limite de velocidade de 120 km/h.

Imaginemos também que este trecho da estrada está localizado nas imediações de uma grande metrópole. Qual vai ser a diferença entre a velocidade média e a velocidade instantânea em cada ponto de um motorista transitando por esta estrada? Depende. Sim, depende. Depende do horário. Se este motorista está chegando à cidade às três horas da manhã encontrará uma estrada vazia e poderá manter uma velocidade constante de 120 km/h por todo o trajeto, fazendo com que a velocidade média seja igual à velocidade instantânea em cada ponto do trajeto. Imagine agora que este infeliz cidadão resolva chegar às 7.30 da manhã. A estrada estará totalmente congestionada e o motorista ficará preso naquele anda-pára-anda-pára sem fim.

A cada ponto do trajeto, a velocidade instantânea será muito diferente da velocidade média. Para que isto ocorra, o motorista deverá utilizar algum mecanismo que lhe permita alterar a velocidade do automóvel: o freio ou o acelerador! Em qualquer um dos casos, ele deverá aplicar uma força que resultará em uma <u>aceleração</u> do automóvel, seja ela para aumentar ou para diminuir a velocidade. A aceleração, portanto, está intimamente ligada à variação da velocidade, que, por sua vez, é medida em relação ao tempo.

Uma grande variação de velocidade em um curto espaço de tempo é obtida com uma grande aceleração e uma pequena variação de velocidade em um grande espaço de tempo corresponde a uma pequena aceleração. Voltamos, assim, ao ponto que discutimos anteriormente nesta aula: assim como a velocidade instantânea está relacionada à taxa de variação da posição em relação ao tempo, a aceleração de um corpo está relacionada à taxa de variação da velocidade em relação ao tempo. Assim como no caso da velocidade, podemos trabalhar com dois tipos de aceleração: média e instantânea:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Antes de podermos apreciar as implicações desta relação, será necessário fazer uma pausa para introduzir algumas noções elementares de como se calcula a derivada de uma função.

Um estudo formal de Cálculo apenas é indicado para aqueles estudantes que dele precisarão em cursos mais adiantados de física. Para o propósito deste nosso curso de física básica, apenas algumas regras gerais, acompanhadas de alguns exemplos serão suficientes para a compreensão de toda a física do curso. Sendo assim, vamos iniciar definindo uma função $f(x)$. O que é uma função? Uma função é apenas uma informação sobre como um objeto se relaciona com outro. Imagine que temos uma variável independente, como por exemplo, o tempo. O tempo passa independentemente de nossa vontade. O nosso dia é dividido em uma infindável série de tarefas, mas todas elas dependem, de uma maneira ou de outra, do tempo. Temos horário para acordar, almoçar, sair do trabalho, etc. Por isto dizemos que vivemos em função do tempo. Nosso dia é uma função do tempo. Nós podemos dizer então o seguinte:

$$dia = dia\ (tempo)$$

Esta equação simplesmente nos diz que nosso dia depende do tempo, mas não nos dá qualquer informação sobre como nós dividimos o nosso tempo. Outro exemplo pode ser extraído de nossa discussão anterior. A posição do trem também depende do tempo! Se ele parte da origem (ou seja, colocamos nosso sistema de coordenadas no ponto inicial da trajetória) e disparamos um cronômetro para acompanhar o seu movimento em relação ao tempo, então podemos dizer:

$$x = x\ (t)$$

Novamente, esta equação nos diz que a posição do trem depende do tempo, mas não nos diz como é essa dependência. Neste caso, no entanto, nós sabemos como a posição do trem varia com o tempo, porque nós sabemos a velocidade! Podemos escrever então, como já vimos anteriormente:

$$x\,(\,t\,) = 0.1t$$

Agora sim. Esta é uma função completa. Ela nos diz que a posição do trem depende do tempo, e nos diz também como é essa dependência. É este tipo de função que nós iremos agora aprender a derivar. Comecemos com as regras gerais de derivação:

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx}[af(x)] = a\frac{d}{dx}f(x), \text{ onde a é uma constante}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]g(x) + f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

$$\frac{d}{dx}[f(y)] = \frac{df(x)}{dx}\frac{dy}{dx} \rightarrow (\textit{regra da cadeia})$$

Estas regras serão utilizadas em exemplos mais tarde. Precisamos agora das derivadas de algumas funções mais comuns:

$$\frac{da}{dx} = 0, \text{ onde a é uma constante}$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\text{sen}(ax) = a\cos(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\cos(ax) = -a\,sen(ax)$$

$$\frac{d}{dx}tg(ax) = a\sec^2(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\text{In}(ax) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

Agora sim estamos prontos para algum aprofundamento sobre a aceleração dos corpos. Lembremos, inicialmente, que a aceleração tanto pode aumentar a velocidade como pode diminuí-la. Uma aceleração positiva aumenta a velocidade de um corpo (pisa no acelerador); uma aceleração negativa diminui a velocidade de um corpo (pisa no freio).

A inspeção da equação que relaciona a velocidade e o tempo com a aceleração (utilizando a análise dimensional que vimos na aula 1-1) nos indica que a sua unidade no SI é $m/s^2$. Para que possamos aprender como utilizar estes conceitos, vamos resolver alguns problemas.

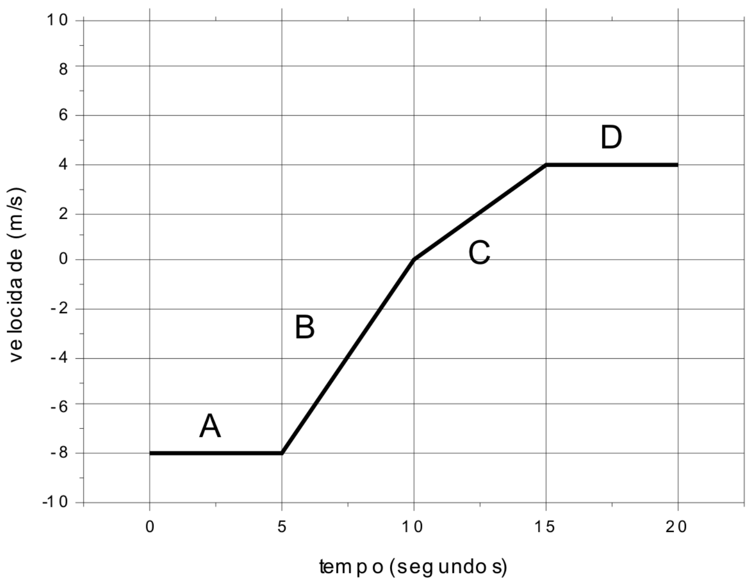
## ATIVIDADES

I. Um automóvel parte do repouso sofrendo uma aceleração. Após um segundo, a sua velocidade é de 20.0 m/s e após 2 segundos a sua velocidade é de 60 m/s. Queremos saber:

a. A aceleração é constante?

b. Um bom carro de passeio acelera de 0 a 100 km/h em cinco segundos. Este automóvel do exercício é real ou fictício?

II. Considere o gráfico abaixo:




Este gráfico mostra a velocidade de um objeto em função do tempo. Assumindo que ele se move em apenas uma dimensão (eixo x), e que este eixo tem o seu lado positivo para a direita, responda:

a. Para qual direção este objeto se move em cada trecho?

b. Qual o valor da aceleração em cada trecho?

c. Qual o valor da aceleração média durante todo o trajeto?

I. O movimento de um corpo é definido por sua função horária que é dada por: $x(t) = 20+18t-7t^2$ onde $x$ é dado em metros e t em segundos. Determine:

a. A posição deste corpo quando t é igual a zero e 10 segundos.

b. Em que momento ele passa pela origem.

c. Qual a velocidade deste corpo quando $t$ é igual a zero e 10 segundos.

d.Em que momento este corpo inverte o seu sentido de movimento.

e. Qual a aceleração deste corpo quando $t$ é igual a zero e 10 segundos.

## COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

I. Vamos por partes:
a. Como estamos lidando com dois trechos distintos, podemos assumir que a aceleração medida em cada um deles é a aceleração média. Sendo assim:

$$\overline{a_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20-0}{1-0} = \frac{20m}{s^2}$$

$$\overline{a_2} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{60-20}{2-1} = \frac{40m}{s^2}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{60-0}{2-0} = \frac{30m}{s^2}$$

Portanto, a aceleração variou durante o tempo.
b. A segunda pergunta é mais complicada, mas nada que não possa ser resolvido. O primeiro problema é que estamos usando unidades diferentes. Para podermos comparar as acelerações, vamos converter a velocidade final do carro de passeio de km/h para m/s. Precisamos, assim, consultar uma tabela de conversão. Facilmente obteremos a relação:

$$\frac{1km}{h} = \frac{0{,}2778m}{s}$$

Fazemos uma regra de três então para converter:

$$1km/h \Leftrightarrow 0{,}2778m/s$$

$$100km/h \Leftrightarrow xm/s$$

Levando a:

$$1 \times x = 100 \times 0{,}2778$$

$$x = 27{,}78m/s$$

Concluímos, então, que, em cinco segundos, o carro de passeio passou de 0 a 27,78m/s. Comparando agora com o nosso carro que chegou a 60 m/s em apenas dois segundos podemos facilmente concluir que o carro é fictício. Apenas por diversão, podemos calcular a velocidade deste carro depois de cinco segundos, assumindo que a aceleração média dele se mantém em 30 m/s$^2$.

$$\Delta v = a\Delta t \Rightarrow v - 0 = 30(5-0) \Rightarrow v = 150m/s$$

Usando agora a mesma relação de conversão, conclui-se que a velocidade deste carro após 5 segundos é de aproximadamente 540 km/h.

II. Este problema se parece muito com o primeiro, a única diferença está relacionada com a maneira de mostrar os dados; ao invés de uma tabela, temos um gráfico. Passemos, então, à sua solução:

a. Independentemente de onde o carro parte, nos trechos A e B, ele tem uma velocidade negativa, o que indica que ele se move para a esquerda. Pelo mesmo raciocínio, concluímos que, nos trechos C e D, ele se move para a direita. Note que entre os trechos B e C ele pára e inverte sua direção de movimento, como deveria ser.

b. O cálculo das acelerações em cada um dos trechos pode ser efetuado utilizando a equação da aceleração média:

$$\overline{a_A} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-8-(-8)}{5-0} = 0$$

$$\overline{a_B} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-(-8)}{10-5} = \frac{8}{5}\ m/s^2$$

$$\overline{a_C} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4-0}{15-10} = \frac{4}{5}\ m/s^2$$

$$\overline{a_D} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4-4}{20-15} = 0$$

c. O mesmo método utilizado no item anterior pode ser usado aqui:

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4-(-8)}{20-0} = \frac{12}{20}\ m/s^2$$

III. A equação horária apresentada descreve a posição do corpo em função do tempo. Se nós a derivamos uma vez, obtemos a equação da velocidade em relação ao tempo. Se voltarmos a derivar, obtemos a equação da aceleração em função do tempo.

a. Para o cálculo da posição do corpo nestes instantes, só necessitamos substituir os valores do tempo na equação:

$$x(0) = 20 + 18 \text{ x } 0 - 7 \text{ x } 0^2 = 20\ m$$

Isto indica que no tempo *t=0*, ou seja, quando o cronômetro foi disparado, o corpo se encontrava a 20 metros de distância da origem.

$$x(10) = 20 + 18 \text{ x } 10 - 7 \text{ x } 10^2 = 20 + 180 - 700 = -500\ m$$

Podemos ver então que, após 10 segundos, o corpo já passou pela origem e se encontra a 500 metros de distância da origem, mas agora para a sua esquerda!

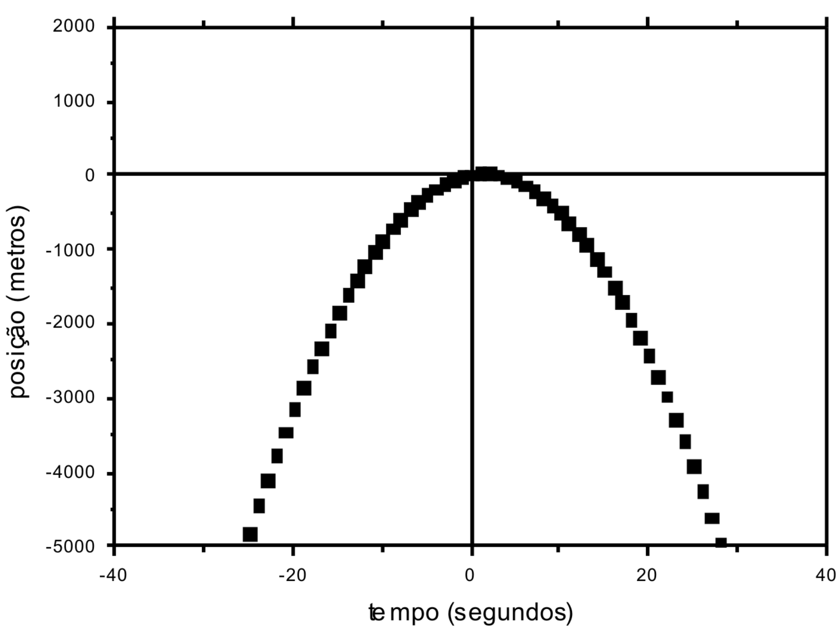
b. A resposta a esta indagação aparece ao nos perguntarmos em qual instante *t*, nós temos *x*(*t*)=*0*:

$$x(t) = 20 + 18t - 7t^2 = 0$$

Utilizando a fórmula de Báskara e alguns arredondamentos, obtemos:

$$t = \frac{18 \pm \sqrt{(18)^2 - 4 \times 7 \times (-20)}}{2 \times 7} = \frac{18 \mp 30}{14} \rightarrow t_1 \cong -0{,}9s \leftrightarrow t_2 \cong 3{,}4\ s$$

Como vemos, existem duas respostas, uma positiva e uma negativa. A primeira vista pode parecer estranho, mas não é. A resposta positiva, 3,4 segundos, é facilmente visível: quando o cronômetro foi disparado o objeto se encontrava à direita da origem, a uma distância de 20 m. Depois de 3,4 segundos, ele passou pela origem e se enveredou no lado esquerdo do eixo x. Mas, e no caso negativo? O tempo negativo simplesmente nos informa que o movimento do objeto já existia antes de o cronômetro ser disparado! E este objeto passou pela origem 0,9 segundos antes de que o cronômetro começasse a marcar o tempo. Todos estes dados ficarão mais claros se olharmos um gráfico que mostra a posição do corpo em função do tempo.



Neste gráfico fica claro que o corpo está quase sempre no lado negativo do eixo x! Ele vem se aproximando pela esquerda, passa pela origem quando $t = -0.9s$, chega a uma distância de 20 metros da origem quando é disparado o cronômetro, continua indo para a direita, pára e volta, passando novamente pela origem quando $t = 3,4\ s$.

a. Para determinar as velocidades deste corpo em alguns instantes, ou seja, suas velocidades instantâneas, precisaremos determinar a derivada de $x(t)$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(20 + 18t - 7t^2) = 0 + 18 - 14t$$

Para obtermos então o valor destas velocidades, basta substituir os valores:

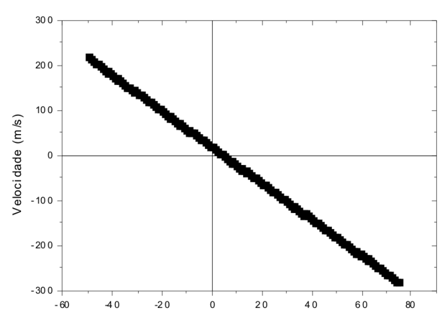
$$v(t) = 18 - 4t$$

Encontramos-nos novamente com valores positivos e negativos da velocidade. No primeiro caso, lembramos que o corpo se encontra a uma distância de 20 metros da origem, e no lado positivo do eixo x. Como o valor da velocidade é positivo, concluímos que ele continua se movendo para a direita. Quando se passaram 10 segundos, no entanto, o corpo se encontra a -500 metros e com velocidade de -22 m/s! ou seja, se afastando da origem (como podíamos ver no gráfico).

b. Esta pergunta se parece muito com aquela encontrada no item b. Para sabermos quando o corpo inverte o sentido de movimento só precisamos saber quando ele pára! Pois não é possível deixar de ir para frente e começar a ir para trás sem uma parada. Parar significa ter velocidade zero:

$$v(t) = 18 - 4t = 0 \rightarrow 18 = 4t \rightarrow t = 4.5\ s$$

Concluímos, então, que o corpo inverte o sentido de movimento quando $t = 4,5\ s$. Novamente achamos adequado mostrar um gráfico da velocidade em função do tempo.



Este gráfico mostra que a velocidade era positiva até 4,5 segundos após o disparo do cronômetro, quando ela se tornou zero e passou a ser negativa. Notemos também que a velocidade está continuamente mudando. Isto só pode significar que o corpo está sofrendo uma aceleração. Podemos calculá-la se utilizarmos a definição de aceleração média:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-22-(18)}{10-0} = -4m/s^2$$

a. Finalmente, apenas para confirmar o que vimos no item anterior, a aceleração pode ser obtida pela derivada da velocidade em relação ao tempo:

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(18-4t) = 0-4 = -4m/s^2$$

## CONCLUSÃO

A utilização do cálculo diferencial nos permitiu apreciar a beleza da descrição dada pela cinemática ao movimento dos corpos. As equações horárias assumiram uma nova face onde uma deriva da outra naturalmente. Equações horárias que não são lineares no tempo foram discutidas sem levar em consideração o que causava o movimento, e, apesar disto, foram suficientes para se descrever o mesmo movimento com riqueza de detalhes.A diferença entre a velocidade média e a velocidade instantânea foi bem estabelecida, assim como os casos onde uma é igual à outra. A partir desta percepção, foi possível observar que, para que a velocidade instantânea seja diferente da média, é necessário que algum novo fenômeno tenha influência neste movimento. Isto é o assunto da próxima aula: a aceleração.

## RESUMO

O estudo do movimento de um objeto real nos mostra que o conceito de velocidade média não é o mais adequado para descrevê-lo. Um carro que passa por uma avenida de grande movimento durante o dia e durante a noite terá velocidades médias bastante diferentes. Esta diferença pode ser vista naturalmente pela presença de outros carros durante o dia. Por esta razão a velocidade instantânea do carro é muito parecida com a velocidade média durante a noite, mas muito diferente durante o dia. Para descrever a velocidade instantânea utilizamos um novo conceito onde os intervalos de tempo e espaço se tornam infinitesimais. Quando isto acontece, utilizamos o cálculo diferencial. O cálculo diferencial é uma ferramenta matemática utilizada por todas as ciências para descrever a taxa de variação de uma grandeza em relação à outra. Aqui ela é utilizada para calcular a taxa de variação do espaço em relação ao tempo para definir a velocidade em cada ponto da trajetória. Por não ser parte deste curso, não é feito nenhum estudo sistemático e rigoroso de cálculo diferencial, apenas apresentamos a sua mecânica de uso, ou seja, as suas regras básicas. A aplicação do mesmo conceito para a derivação da velocidade nos induz a pensar qual o significado de tal derivada. O conceito de aceleração fica implícito, sendo guardada a sua apresentação formal para a próxima aula. O movimento dos corpos e sua velocidade em função do tempo podem ser descritos através de gráficos, onde a relação de tangente com derivada foi explorada.

## PRÓXIMA AULA

Na próxima aula será apresentado o conceito de aceleração, com ênfase na aceleração da gravidade. O movimento dos corpos quando acelerados será estudado em detalhe, com uma maior ênfase no movimento de queda livre.

## REFERÊNCIAS

DOUGLAS C. Giancoli. **Physics for Scientists and Engineers**. 3ed. New Jersey: Editora Prentice Hall, 2000.

HUGH D. Young e Roger A. Freedman. **Física I – Mecânica**.10ed. São Paulo: Editora Addison Wesley, 2003. Tradução de Adir Moysés Luiz.

FREDERICK J. Keller, W. Edward Gettys e Malcolm J. Skove. Física. São Paulo: Editora Makron Books, 1997. Vol.1. Tradução de Alfredo Alves de Farias.

ROBERT RESNICK, David Halliday e Kenneth S. Krane. **Física 1**. 5ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2003. Tradução de Pedro M. C. L. Pacheco, Marcelo A. Savi, Leydervan S. Xavier, Fernando R. Silva.