Aula 4

QUEDA LIVRE

META

Aprofundar o estudo de corpos sujeitos à aceleração no caso específico da queda livre.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá:

discernir entre objetos que sobem e que descem;

verificar quando a gravidade aumenta a velocidade e quando ela diminui a velocidade de um objeto;

equacionar o movimento de queda livre sob ação da gravidade; e

resolver problemas simples de movimento uniformemente variado.

PRÉ-REQUISITOS

Conhecimentos sobre cálculo diferencial básico, cinemática básica e sobre sistemas de referência.

Frederico Guilherme de Carvalho Cunha

INTRODUÇÃO

Bem-vindos à nossa quarta aula! O tempo parece que voa, não é mesmo? Mas não voa. Algumas outras coisas, no entanto, voam: aviões, pássaros e o super-homem… Entre os exemplos existentes e não existentes que citamos, existe uma coisa em comum: a habilidade de vencer a atração que a Terra exerce sobre nós e nos mantém bem firmes sobre o chão. Nós, humanos, não temos esta habilidade, e se resolvermos pular do galho de uma frondosa árvore, estaremos em grandes apuros. O terrível movimento que experimentaremos é chamado de "queda livre". Se não nos preocuparmos muito com as conseqüências de tal insanidade podemos até nos divertir com loucuras do tipo: salto de pára-quedas ou "bungee-jumping". A fotografia abaixo mostra ao que me refiro.

Colocando de lado as nossas preocupações com bem estar físico, passemos ao estudo desta classe de movimento chamado queda livre.

Todos nós sabemos que um objeto, deixado à sua própria sorte, sem um apoio, cairá ao chão. Este comportamento acontece devido à atração que a Terra exerce sobre todos os corpos, comunicando-lhes uma aceleração, chamada de atração gravitacional.

Nesta aula, aplicaremos todos os conceitos discutidos até agora a respeito da cinemática para entendermos a queda livre, que, como já dissemos, corresponde ao movimento de um objeto que está sujeito apenas à aceleração da gravidade. Entretanto, este estudo exige que façamos algumas aproximações:

· Não consideraremos a resistência do ar;

· Todos os movimentos estudados serão realizados com pouca variação de altitude, o que garantirá que a aceleração da gravidade se mantenha constante;

· A localização geográfica não será levada em consideração, e o valor da gravidade será aproximado para 9.81 m/s^2.

Trabalharemos sempre em uma dimensão, utilizando as equações horárias do movimento retilíneo uniformemente acelerado. O conceito de derivada será utilizado brevemente. Um dos pontos mais importantes, nesta aula, relaciona-se não só com a escolha dos pontos de referência – pois a escolha adequada de um ponto de referência, ou seja, a posição de nossa origem pode ajudar ou dificultar a solução de problemas –, como também com a escolha da direção da gravidade – se a altura aumenta na mesma direção, ou ao contrário.

Uma pergunta muito importante que podemos nos fazer é a seguinte: todos os corpos são acelerados com a mesma intensidade? Colocado de outra forma: se você, que é magro, e seu primo gordinho caírem de uma árvore, quem chegará primeiramente ao solo?

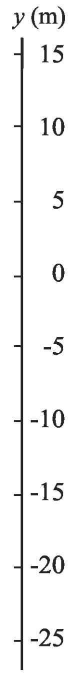
Esta pergunta foi respondida por um grande filósofo grego: Aristóteles. Ele viveu alguns séculos antes de Cristo e concluiu, por observação, que os corpos mais pesados são mais acelerados que os mais leves... e estava errado! O século XVII nos trouxe a correta compreensão de que, na ausência da resistência do ar, todos os objetos sofrem a mesma aceleração, idealizado e provado por Galileu Galilei. Para seus experimentos, Galileu lançou mão de algumas estratégias para contornar a falta de instrumentos de medidas de tempo de alta precisão. O objetivo era comparar o tempo de queda de vários objetos quando lançados de alturas conhecidas. Para aumentar a sua precisão, Galileu necessitava aumentar o tempo de queda e, para isso, usou planos inclinados onde esferas rodavam enquanto o tempo era medido.

Devemos aqui ressaltar que o movimento de queda livre não necessariamente é aquele experimentado por um objeto solto em repouso. Um objeto em queda livre corresponde a qualquer objeto que se move livremente sob a ação exclusiva da atração gravitacional. Quaisquer objetos jogados para cima, para baixo ou simplesmente soltos estão em um movimento de queda livre, independentemente de seu movimento inicial. Qualquer objeto lançado em qualquer direção, e que esteja em queda livre, vai sentir apenas a aceleração da gravidade em direção ao solo. A aceleração da gravidade é simbolizada pela letra g. O valor de g varia com a distância entre o objeto e o solo e também varia ligeiramente com a posição no planeta, mas geralmente aceitamos um valor fixo de $g = 9{,}8\ m/s^2$.

As equações de movimento que vimos na aula passada podem ser aqui usadas livremente, levando em consideração dois aspectos:

I. Ao invés de usarmos como variável de coordenada $x = x(t)$, usaremos a coordenada $y = y(t)$. Esta troca é importante para que nos acostumemos com a convenção de que a coordenada x é horizontal e a coordenada y é vertical.

II. Todos os problemas com as quais iremos trabalhar utilizarão para a aceleração o valor $g = -9.80 m/s^2$. O sinal negativo vem da escolha do sistema de coordenadas como mostrado abaixo.



Diferentemente do que fizemos nas aulas anteriores, trabalharemos diretamente com as atividades práticas para que possamos compreender melhor este ponto. Antes disso, no entanto, vamos relembrar aquelas equações horárias que nos foram ensinadas no ensino médio.

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v(t) = \frac{d}{dt} x(\mathrm{t}) = v_0 + at$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

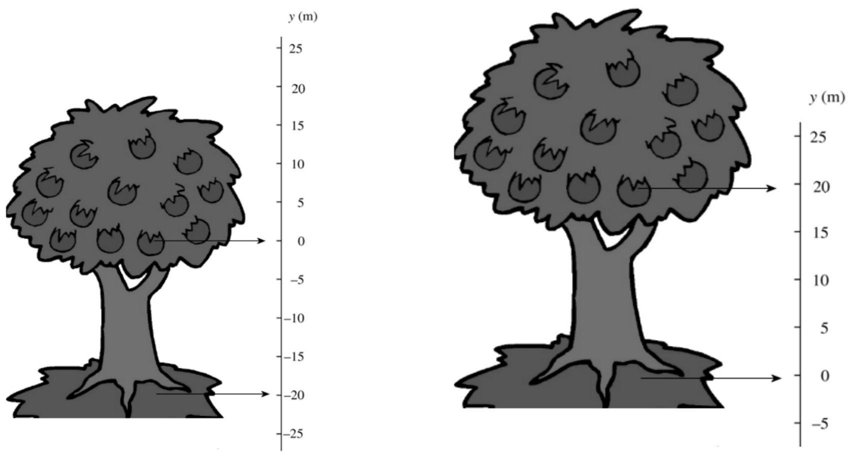
ATIVIDADES

I. Uma maçã se desprende do galho de uma árvore, sendo a sua altura igual a 20.0 metros. Quanto tempo ela levará para chegar ao chão?

II. Resolva o mesmo problema, mas colocando o seu sistema de referência com o zero correspondendo a uma altura de 10 metros em relação ao solo e com o cronômetro sendo disparado quando a maçã passa pela origem.

III. Uma bola é lançada para cima com uma velocidade inicial de 15.0 m/s (não se preocupe com o mecanismo de lançamento, estude apenas o movimento da bola depois do lançamento). Qual é a altura máxima alcançada pela bola? Quanto tempo ela leva para voltar à mão de quem arremessou?

IV. A altura de um helicóptero em relação ao solo é dada pela equação: $y(t) = 3.00t^3$, onde y é dado em metros e t em segundos. Após dois segundos de trajeto vertical, o helicóptero libera um pacote. Quanto tempo após a liberação, o pacote chegará ao solo?



COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

I - Na árvore da esquerda, a nossa maçã sai da origem e viaja em direção ao solo, na posição onde $y = -20m$. Em nossa árvore da direita, nossa maçã cai da posição $y = 20m$ e chega à origem. As duas escolhas de sistemas de referência são absolutamente idênticas. Escolhemos sempre aquela que deixa as contas mais fáceis. Neste caso, faremos as duas. Comecemos com a árvore à esquerda. Aqui a maçã sai da origem, o que nos diz que a posição original, y_0, é zero. Como a maçã parte do repouso, então a sua velocidade inicial, v_0, também é nula. Sendo assim,

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$$

Antes de colocarmos os valores e obtermos os resultados, vamos prestar bastante atenção aos sinais: a maçã sai de um instante zero e de uma posição zero. A força gravitacional aponta para baixo, ou seja, para valores negativos de y, e, portanto, tem um sinal negativo. Depois de um tempo t, que queremos calcular, a maçã estará no pé da árvore, cuja posição corresponde a y(t) = -20 metros. Esta atenção com sinais será o ponto mais importante desta aula. Veja como a correta escolha dos sinais leva a uma resposta adequada:

$$y(t) = -20 = \frac{1}{2} \times (-9.80)t^2 \rightarrow t^2 = \frac{2 \times (-20)}{(-9.80)} = 4.08s^2$$

$$t = \mp 2.02s$$

Novamente obtemos uma resposta ambígua: mais ou menos 2.02 segundos. A resposta para o problema físico proposto só pode ser o valor positivo, afinal de contas o nosso cronômetro não anda para trás, mas, e o sinal negativo? Na verdade, ele indica que, se a maçã saísse do chão com tal velocidade inicial que subisse apenas vinte metros e parasse, levaria exatamente 2.02 segundos, ou seja, a resposta matemática inclui uma situação física inexistente.

A solução para a árvore da direita novamente exige a escolha dos sinais com cuidado. Agora nós colocamos a posição da maçã a uma altura de vinte metros quando ela começa a cair. Por isso, a sua posição inicial, y_0, não é mais nula, mas vale +20 metros. A posição final da maçã quando usamos este sistema de referência corresponde à origem, o que quer dizer que, quando o tempo t passou, $y(t)$ =0. Na equação:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 = 20 + \frac{1}{2}(-9.80)t^2$$

O que nos dá exatamente o mesmo resultado, como esperávamos.

II. Agora o problema ficou razoavelmente mais interessante. Agora precisaremos definir muito claramente quem são as variáveis.Vejamos novamente a equação de movimento:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

A aceleração não muda, naturalmente, será sempre de -9.80 m/s^2. Vamos então reescrever a equação:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(-9.80)t^2 = y_0 + v_0 t - 4.90t^2$$

Para completar esta equação seria interessante saber quem é y_0. Mas isto é muito fácil. Tudo que temos que fazer é nos perguntar: onde está a maçã quando o cronômetro é disparado? Na origem! Está no enunciado do problema. Então podemos reescrever a equação novamente:

$$y(t) = v_0 t - 4.90t^2$$

Mas e quem é v_0? Uma análise apressada diria que a velocidade inicial é nula, afinal a maçã sai do repouso. No entanto, v_0 é definida como sendo a velocidade da maçã quando o cronômetro é disparado! Ou seja, a maçã já está na metade do caminho em direção ao solo e, com certeza, não tem velocidade nula quando passa pela origem. Precisamos, então, calcular quem é esta velocidade. Para isto, usaremos a equação de Torricelli:

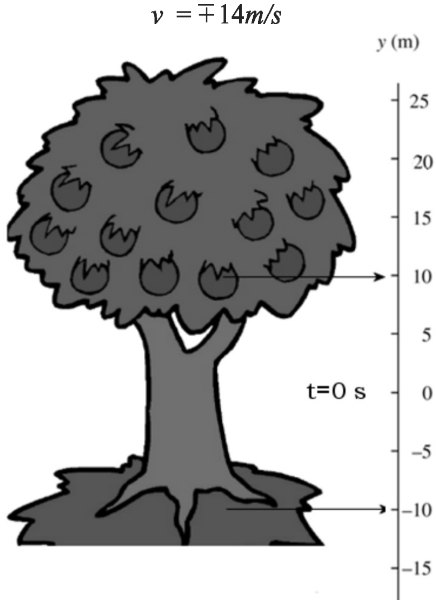
$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta y$$

Como de costume, precisaremos tomar muito cuidado com os sinais e com a correta definição dos termos. Esta equação nos diz que a velocidade que a maçã desenvolve quando passa pela origem, v, depende da velocidade da mesma quando começa a queda da árvore, v_0. A primeira coisa a notar é que o termo v_0, que aparece nesta equação, não é o mesmo que aparece na anterior. A velocidade final v desta equação corresponde à velocidade inicial v_0 da outra. Para que estas mudanças não transformem um problema simples em uma grande confusão, é sempre necessário ter muito claro quem são as variáveis. Sendo assim, nesta última equação, lemos que a maçã parte do repouso (v_0=0), adquire certa velocidade (v) depois de percorrer certa distância (Dy) acelerada pela gravidade (-9.8 m/s²). Na equação:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta y = 0 + 2 \text{ x } (-9.80) \text{ x } (0 - 10) = 196\ m/s$$

Temos, como sempre, a velocidade com dois sinais. Apenas um deles nos interessa, qual será? Voltemos ao problema original. A maçã sai do repouso em certo tempo anterior ao disparo do cronômetro, ou seja, um tempo negativo. Nesse instante, a maçã encontra-se em uma posição que equivale a $y=10\ m$. Talvez fique mais simples se olharmos uma nova figura:

$$v = \mp 14 m/s$$



Quando a maçã passa pela origem, sua velocidade é negativa! É negativa porque o eixo *y* foi escolhido de tal modo que um movimento descendente tem velocidade negativa, assim como a aceleração é negativa. Portanto, a velocidade v_0, quando a maçã passa pela origem é de -14m/s, e nossa equação passa a ser:

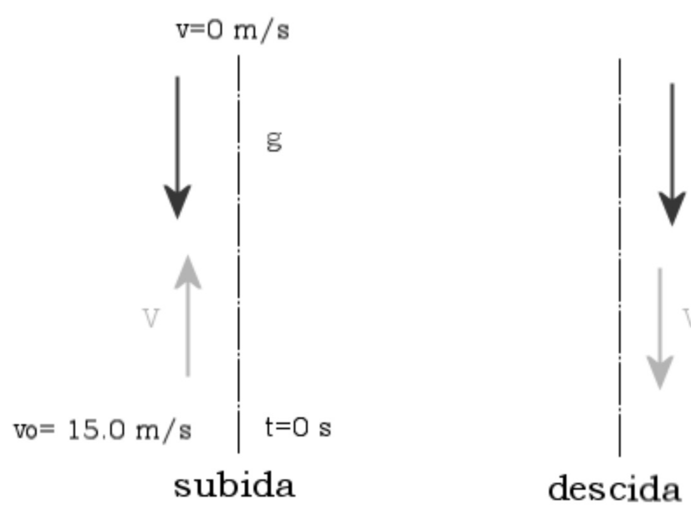
$$y(t) = -14t - 4.90t^2$$

Agora estamos prontos para resolver esta equação. Tudo que precisamos fazer é compreender qual a pergunta: quanto tempo passará entre a passagem da maçã pela origem e a sua chegada ao solo. A chegada ao solo corresponde a $y(t) = -10\ m$. Vamos, então, fazer o cálculo.

$$y(t) = -10 = -14t - 4.90t^2$$

Obteremos, assim: $t1=0.63\ s$ e $t2=-3.70\ s$. Esse resultado pode parecer estranho. Sem levar em consideração a opção de tempo negativo, o tempo de 0.63 segundos pode parecer curto quando comparado com aquele obtido na primeira questão, 2.02 s. Se você esperava que estes tempos fossem iguais é porque cometeu um engano muito comum. A diferença entre os dois problemas não é apenas em relação ao ponto de referência; o instante em que o cronômetro é disparado também muda. No primeiro caso, medimos todo o tempo de queda; no segundo, medimos apenas o tempo de queda da segunda metade do movimento. Isto nos diz que a primeira metade da queda tomou (2.02-0.63) = 1.34 segundos. E isto, é surpreendente!

I. Para facilitar a visualização do problema, considere a figura abaixo:



Vamos escolher, como origem de nosso sistema de coordenadas, o ponto de lançamento. Poderia ser qualquer outro, mas este facilita muito as contas. Vamos também escolher o sentido para cima como sendo o sentido de *y* positivo. Através desta escolha, vemos que a velocidade da bola é positiva quando está subindo e negativa quando está descendo (setas verdes).

Vemos também que a aceleração da gravidade é sempre negativa (setas vermelhas). Note que, à medida que a bola sobe, a sua velocidade diminui até chegar a zero no ponto mais alto. Em seguida, ela começa a crescer (em módulo apenas). Para determinar a altura máxima, nós calculamos a sua posição quando a velocidade é igual a zero. Poderemos utilizar uma das equações de movimento, mas a equação de Torricelli nos serve melhor:

$$v^2 = v_0^2 + 2ay \rightarrow 0 = 15^2 + 2\,(-\,9.8)y$$

fornecendo-nos: y=11.5m. Para calcular o tempo total de subida e descida, poderíamos calcular os dois separadamente, mas consideramos mais simples calcular os dois ao mesmo tempo. Fazendo o cálculo desta maneira, obteremos um resultado também bastante interessante. Vamos utilizar a equação horária como sempre:

$$\mathbf{y(t)} = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^{\,2}$$

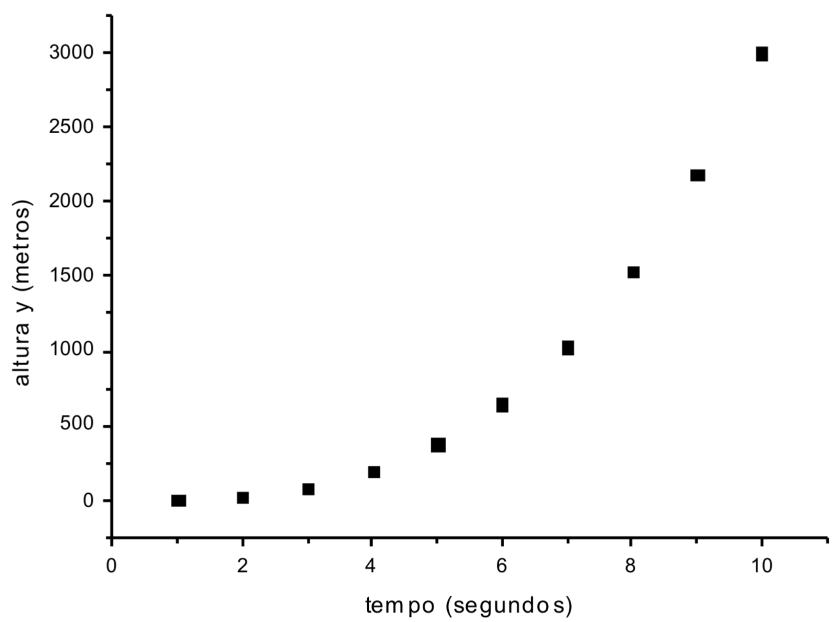
Notemos, em primeiro lugar, que queremos saber quanto tempo levará a bola para voltar à origem, ou seja: y(t)=0. Em segundo lugar, notemos que a partícula sai da própria origem, ou seja: y0=0. Notemos também que a velocidade inicial é positiva, e a aceleração é sempre negativa. Sendo assim, e colocando o tempo em evidência:

$$0 = 0 + 15.0t + \frac{1}{2}(-9.80)t^2 \rightarrow 0 = (15 - 4.9t)t$$

dois resultados são possíveis: t=0 s e t=3.06 s. Fica aqui cristalino que o tempo nulo corresponde ao momento do lançamento e que o tempo 3.06 segundos corresponde ao tempo decorrido para que a bola passasse novamente pela origem.

I. Este problema adiciona um pouco de sofisticação a um assunto que já está bem assimilado. Temos aqui uma equação horária que descreve o movimento de um helicóptero em movimento para cima. Com certeza, ele está acelerado por seus motores. Vemos que a sua altura, y, varia com o cubo do tempo! Antes de nos preocuparmos em resolver o problema, vamos tentar compreender melhor o que esta equação está dizendo: a altura alcançada pelo helicóptero após t segundos será $3t^3$ metros. A primeira coisa estranha é esta: como pode acontecer de uma variável de tempo, t, elevada ao cubo e multiplicada por uma constante, ter unidades de distância em metros? A única explicação possível é de que a constante que multiplica o tempo e tem um valor igual a três não é adimensional. Isto quer dizer que não se trata apenas de um número. Devemos ler então aquele número como sendo 3.00 m/s^3. Não devemos mais nos preocupar com ele, passemos ao estudo do movimento em si. Notamos que a aceleração da gravidade não aparece na equação horária. Isto poderia parecer estranho, mas, na realidade, estamos equacionando o movimento do helicóptero sob ação de diversas forças, e a resultante nos levou àquela equação horária. A partir dela podemos tirar várias conclusões e, portanto, vamos trabalhar cuidadosamente com ela. Iniciamos fazendo um gráfico da posição em relação ao tempo: y(t). Para isto, construiremos uma tabela de valores que vão de 1 a 10 segundos.

tempo (segundos)	altura (metros)
1	3
2	24
3	81
4	192
5	375
6	648
7	1029
8	1536
9	2187
10	3000



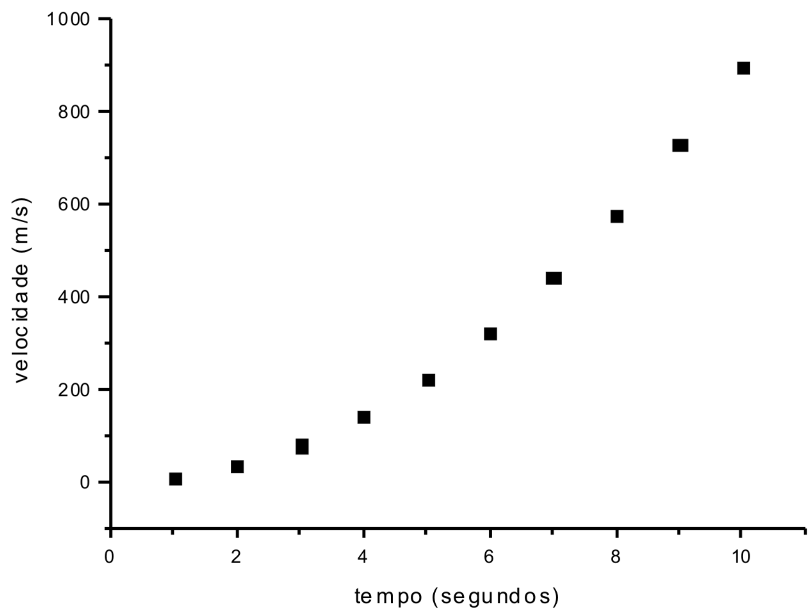
Podemos ver, pelo gráfico, que o helicóptero ganha altura muito rapidamente. Em apenas dez segundos, já se encontra a uma altura de 3000 metros! De acordo com nossa tabela, vemos também que, após dois segundos, o helicóptero encontra-se a uma altura de 24 m. Neste instante, o pacote é liberado. Para podermos calcular o tempo que este pacote levará para chegar novamente ao chão, precisamos saber em que condições ele foi liberado. Ao sair do helicóptero, ele estava em repouso? Pensando bem, não. Quando ele é largado do helicóptero, ele se encontra na velocidade do mesmo. Vamos, então, calcular as velocidades deste helicóptero em função do tempo da mesma maneira que fizemos com a sua posição. Para começar, obteremos a derivada da equação horária do helicóptero para saber como varia a sua velocidade com o tempo.

$$v(t) = \frac{d}{dt}\, y(t) = \frac{d}{dt}(3.00\mathrm{t}^3) = 9.00t^2$$

Utilizando novamente aqueles valores para o tempo, chegamos à seguinte tabela:

tempo (s)	velocidade m/s)
1	9
2	36
3	81
4	144
5	225
6	324
7	441
8	576
9	729
10	900

E com esses valores, construímos um segundo gráfico:

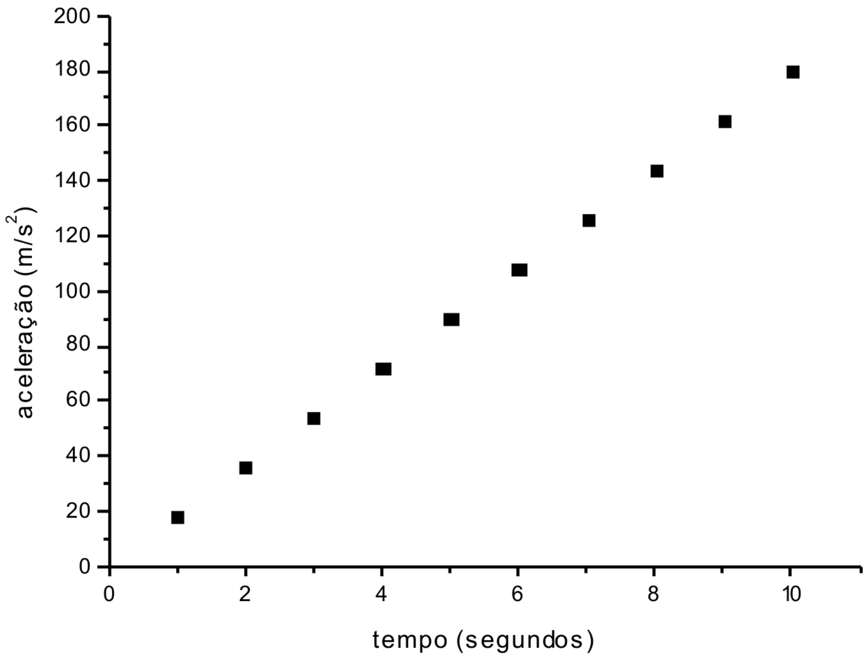


Note que a velocidade também cresce com o tempo, mas não tão rapidamente quanto a altura! Isto já era esperado, uma vez que a altura varia com o cubo do tempo, enquanto a velocidade varia com o quadrado do tempo. Prestando atenção à tabela, você pode ver que, depois de dois segundos, o helicóptero subia a uma velocidade de 36 m/s e que, depois de 10 segundos, ele alcançava a velocidade de 900 m/s. Esse tipo de movimento não é possível na realidade, pois, para um tempo infinito, teríamos uma velocidade infinita. Certamente existem limites reais para a velocidade alcançada (o mesmo acontece com os automóveis).

Por fim, vamos ver o que acontece com a aceleração desse helicóptero:

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(9.00t^2) = 18.00t$$

A aceleração, portanto, aumenta linearmente com o tempo. Desta vez, iremos omitir a tabela com os valores, mostrando apenas o gráfico da aceleração em função do tempo.



Como um bônus especial deste problema, você pode ver, em primeira mão, o que queremos dizer com uma relação linear: o gráfico é uma reta! Vemos também que a aceleração não é constante! Se a aceleração fosse constante, esta reta seria horizontal.

Depois de todos estes cálculos e gráficos, poderemos voltar ao problema em questão: quanto tempo o pacote levará para alcançar o chão novamente? Agora não dispomos mais de um helicóptero para acelerar o pacote e, por isso, a única aceleração que o pacote sofre é a da gravidade. Mas esta é exatamente a condição para a queda livre. Podemos, então, usar a equação horária:

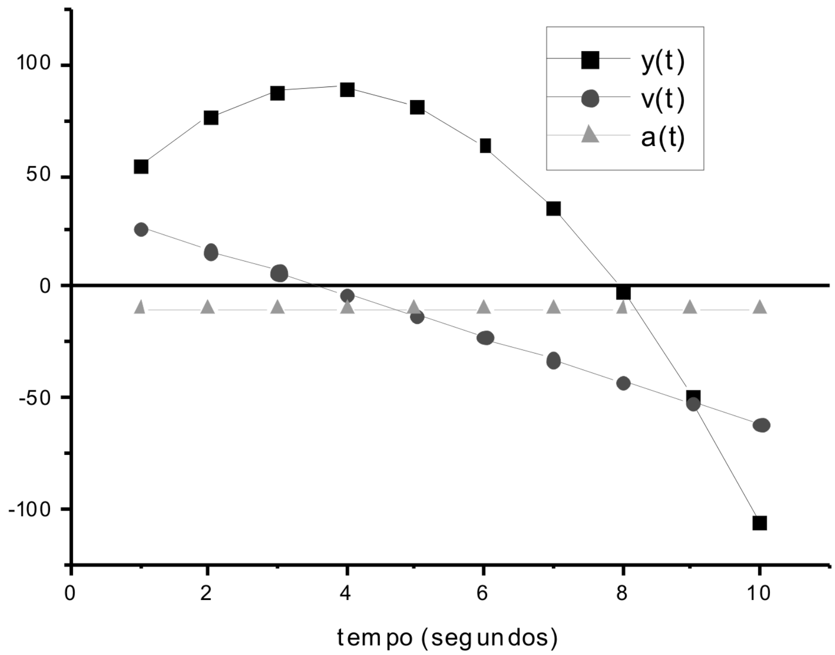
$$\mathbf{y(t)} = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Apesar de bastante simples, esta equação pode nos complicar se não prestarmos atenção aos sinais. Vamos utilizar a mesma convenção do problema anterior. Sendo assim, y_0 é positivo e, para dois segundos, tem o valor de 24 metros. Nesse momento, a velocidade inicial, v_0 também é positiva com o valor de 36 m/s. A aceleração, no entanto, é negativa com o seu valor habitual, ou seja:

$$y(\mathrm{t}) = 24 + 36t - 4.9t^2$$

Nosso problema está agora adequadamente equacionado. Uma última fonte de dúvidas é: quem é $y(t)$ e o próprio t. Veja que o helicóptero continua se movendo para cima. O pacote, no entanto, tem um destino diferente. A posição $y(t)$ descreve onde se encontra o pacote *depois* de ter sido largado. Isto nos diz que o tempo foi zerado! Esqueceremos o helicóptero (como esquecemos a mão que atirou a bola no problema anterior) e vamos estudar apenas o pacote. A pergunta fica então muito simples: para qual valor de t, $y(t)=0$?

Trata-se de uma equação do segundo grau que tem duas raízes, sendo que apenas a positiva nos importa: t = 7.96 segundos. Vemos que, enquanto o pacote levou apenas 2 segundos para subir, levou quase oito segundos para descer. O problema está terminado, mas será instrutivo estudar graficamente este movimento do pacote após ser lançado.



Podemos ver, neste gráfico, em preto, a posição do pacote em função do tempo. Ele continua subindo nos instantes iniciais e, entre 3 e 4 segundos, inverte a trajetória, chegando ao chão próximo aos oito segundos. Após esse tempo, o deslocamento negativo não faz sentido (a não ser que o pacote seja de chumbo, e o chão de algodão...). A forma desta curva também é quadrática, como se poderia inferir da equação de movimento.

Em vermelho vemos que a velocidade varia linearmente com o tempo! É uma reta! No trecho mais à esquerda, ela é positiva, o que significa que o pacote está subindo. Não por acaso, entre três e quatro segundos, ela se anula e passa a ser negativa. Isto nos diz que o pacote parou de subir e começou a descer.

A aceleração, em verde, é constantemente negativa.

CONCLUSÃO

A ação da gravidade determina a trajetória dos corpos, quando os mesmos não se encontram apoiados em algum suporte. A direção inicial do movimento de um corpo pode estar na mesma direção da gravidade ou na direção contrária, isto não faz diferença na solução de problemas, desde que o devido cuidado seja tomado com os sinais. Através de gráficos de posição, velocidade e aceleração em função do tempo, verificamos que, enquanto a primeira varia com o quadrado do tempo, a segunda varia linearmente e a última é constante. Este resultado naturalmente já era esperado pela simples inspeção das equações horárias, mas a visualização dos mesmos trouxe um melhor entendimento do relacionamento entre estas grandezas.

RESUMO

Para o estudo da queda livre, é necessário que seja esclarecida a importância dos sistemas e pontos de referência como discutidos em aulas anteriores. Nesta aula, estudamos o movimento de objetos na vertical, sendo que a gravidade sempre aponta para baixo, enquanto a posição e a velocidade podem ser positivas ou negativas: depende do ponto de referência e escolha de qual a direção de crescimento da coordenada e da velocidade. Uma vez definidas estas convenções podemos aplicar as equações horárias do movimento retilíneo uniformemente acelerado para estudar o movimento de objetos, sejam eles soltos à própria sorte ou lançados com uma velocidade inicial. Um ponto de interesse que aparece naturalmente na resolução dos problemas está associado à presença de sinais negativos nos tempos. Eles são interpretados caso a caso, pois estão associados a elementos de simetria. Na maioria dos casos, no entanto, eles correspondem ao movimento destes corpos nos instantes anteriores ao disparo do cronômetro e assumem que não há nenhuma intervenção na trajetória.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, iniciaremos com o estudo dos vetores em duas dimensões e imediatamente passaremos ao estudo da cinemática em duas dimensões, mas sem aceleração.

REFERÊNCIAS

Douglas C. Giancoli. **Physics for Scientists and Engineers.** 3ed. New Jersey: Editora Prentice Hall, 2000.

Hugh D. Young e Roger A. Freedman. **Física I – Mecânica**.10ed. São Paulo: Editora Addison Wesley, 2003. Tradução de Adir Moysés Luiz.

Frederick J. Keller, W. Edward Gettys e Malcolm J. Skove. **Física**. São Paulo: Editora Makron Books, 1997. Vol.1. Tradução de Alfredo Alves de Farias.

Robert Resnick, David Halliday e Kenneth S. Krane. **Física 1**. 5ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2003. Tradução de Pedro M. C. L. Pacheco, Marcelo A. Savi, Leydervan S. Xavier, Fernando R. Silva.