Aula 6

MOVIMENTO DE PROJÉTEIS

META

Expandir o estudo do movimento em duas dimensões para o caso de aceleração constante; descrever o movimento de projéteis.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá:
Utilizar equações vetoriais para descrever o movimento em duas dimensões; reconhecer a aceleração da gravidade como um vetor; e descrever o movimento de projéteis sob a ação da gravidade.

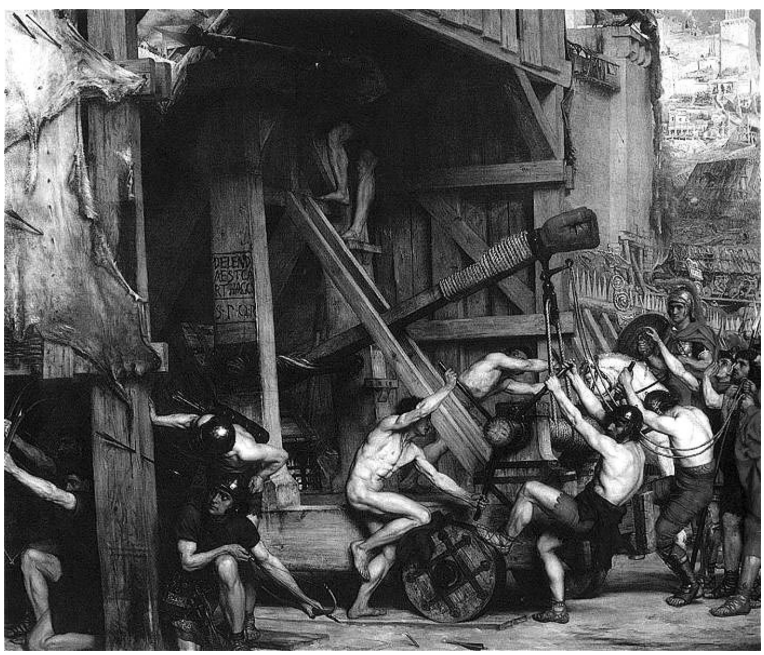
PRÉ-REQUISITOS

Conhecimento básico de vetores e de cinemática unidimensional.

Frederico Guilherme de Carvalho Cunha

INTRODUÇÃO

Bem vindos à nossa sexta aula. Acabamos de terminar nosso primeiro quarto de curso. O restante será tão interessante quanto este. Hoje nos libertamos dos exemplos pouco convincentes sobre a sua aplicabilidade e trataremos diretamente do problema geral do lançamento de projéteis. O Homem descobriu, desde sua infância antropológica, a utilidade das armas como elemento de subjugação da natureza e de seus pares. Na falta de um arsenal mais sofisticado, uma pedra ou pedaço de madeira apareciam como elementos bastante interessantes para a consecução de seus objetivos. O cálculo de risco já fazia parte de seu mecanismo de defesa, o que o levava a decidir qual atitude tomar diante de algumas circunstâncias. Verdade ou não, nasceu, a partir de preocupações semelhantes, o estudo do movimento de projéteis. Na Idade Média, porém, foi criada uma arma formidável no ataque a fortificações: a catapulta! Seu mecanismo de cálculo de alcance dependia das tentativas e erros: se aumentasse a força de lançamento, poderia ir mais longe ou mais perto; dependia do ângulo de lançamento. De qualquer forma, estes dois exemplos indicam a necessidade de um estudo científico do lançamento de projéteis. Ele se enquadra na cinemática em duas dimensões e é o objeto desta aula.

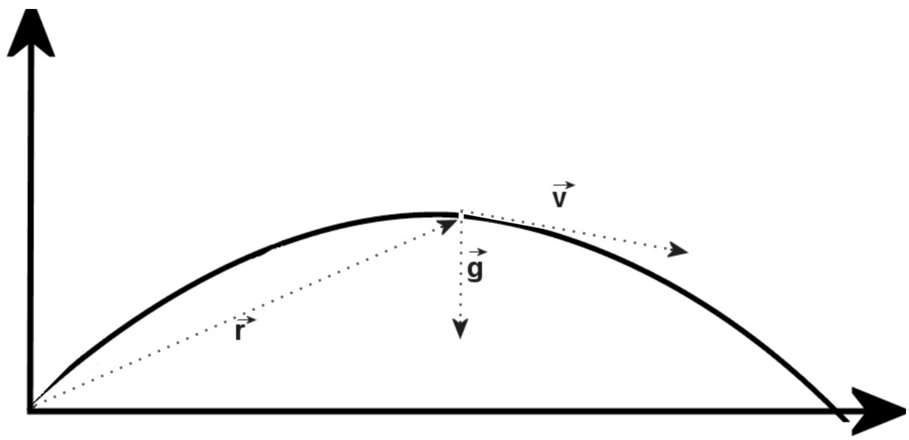


(Fonte: http://upload.wikimedia.org).

O lançamento de projéteis também é conhecido como lançamento parabólico (como mostraremos mais à frente). O movimento de projéteis estudado em nosso curso utiliza duas premissas simples, mas necessárias:

1. A aceleração da gravidade é sempre perfeitamente vertical e tem sempre o mesmo valor, independentemente da altura e posição no globo;
2. A resistência do ar pode ser ignorada.

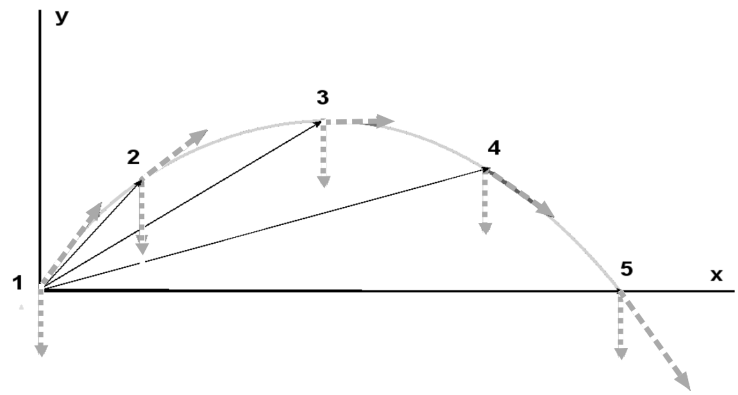
Em todas as nossas discussões, dependeremos da escolha de sistemas de referência para descrever os movimentos. Isto equivale a determinar onde se encontra a origem, a partir da qual definiremos os vetores que descrevem o movimento. Na figura abaixo, indicamos um exemplo daquilo a que estamos nos referindo.



Em certo instante no tempo, um objeto foi lançado com certa velocidade. Depois de outro espaço de tempo, nós o localizamos e verificamos algumas de suas características. Neste tempo t, podemos definir:

- r = r(t) é o vetor posição do objeto no instante t;
- v = v(t) é o vetor velocidade quando o objeto está no instante t;
- g = g(t) é o vetor aceleração da gravidade quando o objeto está no instante t.

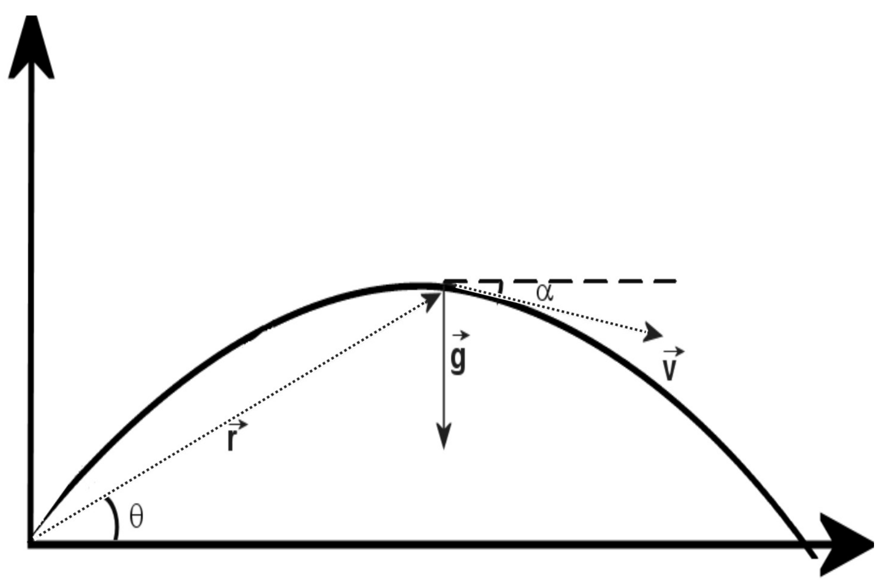
Note alguns aspectos importantes destas definições: o tempo aparece como uma variável independente: seja qual for o tempo, temos alguns vetores que dependem deste tempo. Os vetores posição e velocidade mudam a cada instante. O vetor aceleração da gravidade, no entanto, nunca muda. Poderia se argumentar que o seu início varia com o tempo. Se este ponto o angustia, sugiro que releia o texto sobre vetores das aulas anteriores. Se imaginarmos como estes vetores variam com o tempo, podemos chegar a algumas conclusões bem interessantes. Veja a figura abaixo:



Aqui nós podemos ver o objeto em cinco instantes diferentes, desde o seu lançamento até o seu impacto com o chão. Os vetores, em linha pontilhada, correspondem à aceleração da gravidade. Todos eles têm a mesma magnitude, direção e sentido. Os vetores em linha tracejada, que correspondem à velocidade, variam em todos os parâmetros, assim como os vetores em linha contínua, que correspondem ao vetor posição. Como se trata, de qualquer modo, de um movimento em duas dimensões, podemos equacioná-lo com muita simplicidade:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \overline{v_0}\,t + \frac{1}{2}\bar{a}t^2$$

Esta equação pode parecer difícil de solucionar, mas, na verdade, é bem simples quando trabalhamos com componentes como discutido na aula passada. Para isso, basta lembrar que cada um dos vetores pode ser decomposto. Para tornar este conceito visualmente reconhecível, examine cuidadosamente a figura abaixo:



Trata-se da mesma figura apresentada antes, com a diferença que agora os vetores têm ângulos definidos com a horizontal (e conseqüentemente com a vertical). Podemos, então, decompor agora todos estes vetores nas componentes x e y:

• Componente x (horizontal):

$$r_x = |\bar{r}|\ cos\theta$$

$$v_x = |\bar{v}|\ cos a$$

$$g_x = 0$$

• Componente y (vertical):

$$r_y = |\bar{r}|\ sen\theta$$

$$v_y = |\bar{v}|\ sen a$$

$$g_y = g$$

Devemos atentar para o fato de que as equações acima tratam de valores em módulo. O sinal destas grandezas sempre dependerá dos ângulos e dos sistemas de referência escolhidos.

O grande mérito desta separação em componentes é o de que agora já podemos trabalhar com as duas componentes individualmente, ou seja, aplicamos as equações de movimento para cada uma delas:

$$r_x = r_{0x} + v_{0x}\, t + \frac{1}{2} g_x t^2$$

$$r_y = r_{0y} + v_{0y}\, t + \frac{1}{2} g_y t^2$$

Os valores de r_{0x} e r_{0y} dependem apenas da escolha da origem. Os valores da aceleração já estão definidos com apenas uma componente vertical e, por isso, já podemos escrever as equações finais de movimento em suas componentes (assumindo que o eixo y é vertical e cresce no sentido inverso ao da gravidade).

$$x = x_0 + v_{0x}\, t$$

$$y = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

É fácil reconhecer estas equações como as do movimento retilíneo uniforme da componente x e do movimento retilíneo uniformemente variado da componente y.

Então, temos de fato um movimento único que pode ser tratado pela superposição de dois outros. Passamos de um problema bidimensional para dois unidimensionais. Apesar de parecerem independentes, estes problemas estão indexados, ou parametrizados, pelo tempo. Isto quer dizer que o tempo que aparece em uma equação é o mesmo tempo que aparece na segunda. Sendo assim, podemos isolar o tempo na primeira equação e substituí-lo na segunda:

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

$$y = y_0 + v_{0y} x \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2} g \, \mathrm{x} \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}}\right)^2$$

Uma boa simplificação desta equação leva a algo parecido com:

$$y = A + Bx + Cx^2$$

E esta é a equação de uma parábola, explicando o nome de movimento parabólico. Agora já temos uma boa ferramenta para iniciar os exercícios.

ATIVIDADES

I. Uma bola é lançada de tal modo que as componentes vertical e horizontal são 20 m/s e 40 m/s, respectivamente. Determine o tempo total de vôo e a distância alcançada.

II. Utilizando os dados do problema anterior, assuma que uma camada de névoa de 3 metros de altura cobre todo o campo visual. Determine o instante em que a bola sai da névoa e o instante que ela volta a entrar na mesma. Determine, também, a distância horizontal percorrida pela bola em cada um destes instantes.

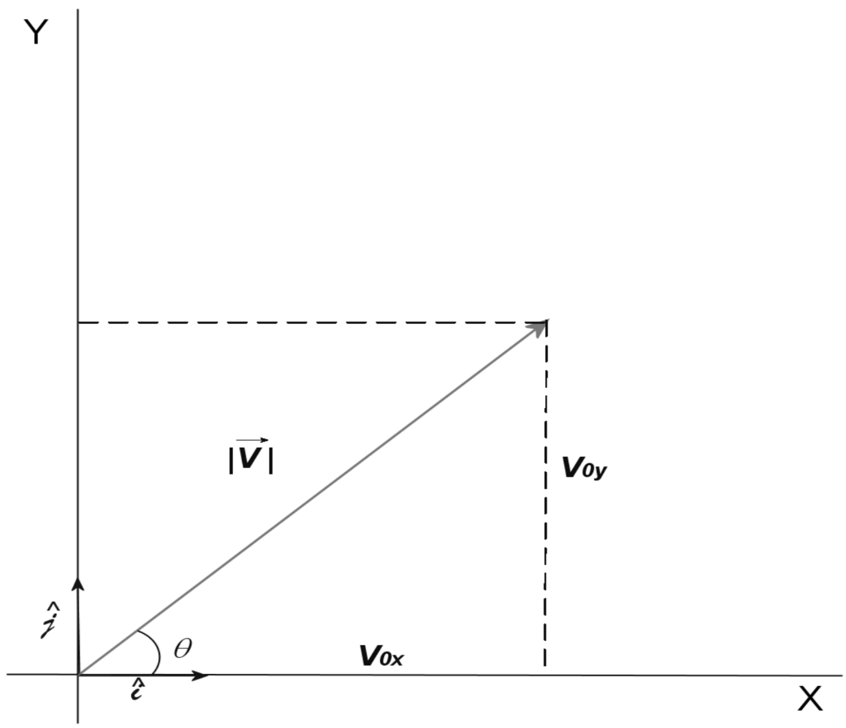
III. Passamos agora a um problema mais perigoso: um aluno de física decide fazer um teste de seus cálculos da seguinte maneira: vai tentar voar sobre um vão de 20 metros com a sua motocicleta. Usará para isto uma plataforma de lançamento de cerca de três metros de altura que faz um ângulo de 30º com a horizontal. Sua aterrissagem deve ocorrer em uma segunda rampa que tem seis metros de altura e o mesmo ângulo com a horizontal. Qual deve ser a sua velocidade de lançamento para que ele não se arrebente?

IV. Um jogador de futebol chuta uma bola horizontalmente da beirada de um abismo de 40 metros de altura. Se este jogador escuta o som da bola batendo no chão cerca de três segundos depois, qual era a velocidade inicial da bola? Assuma que a velocidade do som no ar seja igual a 343 m/s.

V. Um arqueiro atira uma flecha a uma velocidade de 45 m/s fazendo um ângulo de 50º com a horizontal; um assistente que se encontra a uma distância de 150 m do local de lançamento atira para cima uma maçã com a mínima velocidade necessária para que alcance a trajetória da flecha. Determine qual é a velocidade inicial da maçã e quanto tempo depois do lançamento da flecha ele deve lançar a maçã para que elas se encontrem.

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

I. Este é o problema padrão do movimento parabólico. Ele claramente não traz informações completas sobre o evento real. Por exemplo, não sabemos a partir de qual altura do solo ela é atirada. Neste caso vamos assumir que a bola é lançada a partir do chão (não importa como isto é feito, mas pode ser uma tacada de golfe, por exemplo). Nossa primeira informação indica o valor das componentes da velocidade inicial: $v_{0x} = 20$ m/s e $v_{0y} = 40$ m/s. Nós podemos imediatamente obter o valor do módulo da velocidade e o ângulo que esta velocidade faz com a horizontal.



$$tg\theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{40}{20} = 2 \rightarrow \theta \cong 63{,}4°$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 44{,}7\,\frac{m}{s}$$

Obtivemos, assim, o módulo e o ângulo de lançamento. Isso nos ajuda em algo? Não, mas serve para nos dar uma idéia um pouco melhor de como foi o lançamento. Para resolver o problema em si, não precisávamos disso. Como discutimos no texto, vamos dividir o problema em dois. Vamos tratar primeiramente do movimento vertical. A razão para esta escolha ficará mais clara mais para a frente. Vamos também definir que o eixo y tem valores positivos para cima e negativos para baixo. Sendo assim, a equação deste movimento é:

$$y(t) = 40t - \frac{1}{2}9{,}80t^2$$

Tudo que precisamos saber está nesta equação: dado o tempo sabemos exatamente onde a bola está. Neste problema, em particular, queremos saber quando a bola atinge o chão. Nós não sabemos onde ela estará, mas isso não é importante. Só precisamos notar que, quando a bola cair ao chão novamente, $y(t) = 0$. Resolvemos, então, a equação acima:

$$0 = 40t - 4{,}90t^2 = (40 - 4{,}90t)t$$

Essa equação tem duas raízes: uma é trivial: $t = 0\ s$, e corresponde ao instante de lançamento da bola. A outra também é simples: $40 = 4{,}90t \rightarrow t = 8{,}2\ s$. A bola fica, portanto, apenas 8,2 segundos no ar. Agora chegou a vez de calcular a distância percorrida pela bola neste intervalo de tempo. Nada mais fácil:

$$x(t) = 20t \rightarrow x(8{,}2) = 20 \text{ x } 8{,}2 = 164\ m$$

Esta distância percorrida pelo lançamento até a queda é chamada de *alcance*. Incidentalmente, podemos também calcular a altura máxima alcançada pela bola. Isto pode ser feito de várias maneiras. A mais simples leva em consideração que esta altura máxima será alcançada na metade da trajetória, que equivale à metade do tempo: 4,1 segundos. A altura máxima, então, é dada por:

$$y(4{,}1) = 40 \text{ x } 4{,}1 - 49 \text{ x } 4{,}1 = 144\ m$$

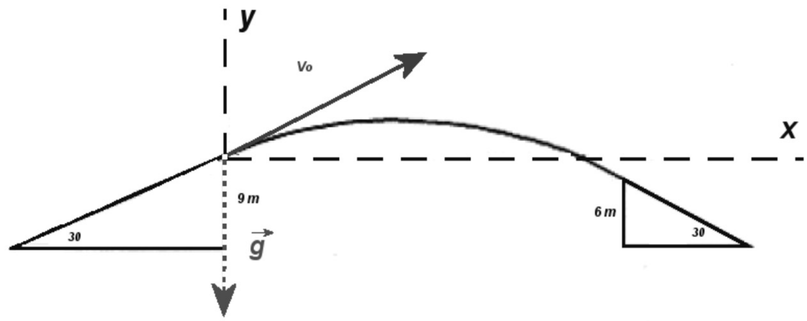
II. A solução deste segundo problema passa novamente pela aplicação direta das fórmulas. Precisamos apenas refazer as perguntas pensando em duas dimensões: queremos saber quanto tempo a bola leva para alcançar três metros de altura. Podemos desprezar o movimento horizontal e, assim, voltarmos ao clássico problema de queda livre:

$$y(t) = 40t - 4{,}90t^2 = 3$$

Esta é uma simples equação do segundo grau com raízes iguais a 0,08 segundos e 8,08 segundos. Estes tempos claramente referem-se à saída da região de neblina e à sua re-entrada, respectivamente. De posse destes tempos, fica muito simples determinar as distâncias percorridas na horizontal, simplesmente utilizando a equação horária:

$$x(t) = 20t \rightarrow x(0{,}08) = 1{,}6\ m \rightarrow x(8{,}08) = 161{,}6\ m$$

Vejamos em detalhes o tamanho do desafio:



Agora, sim, temos um problema interessante. Não fazemos menção ao tempo em nenhum momento, mas ele é, naturalmente, de suma importância. O sistema de coordenadas foi colocado arbitrariamente no ponto de lançamento, mas isto absolutamente não importa (como veremos a seguir). Nós apenas precisamos equacionar os movimentos em suas componentes e refazer a pergunta de uma maneira que possamos responder. Comecemos com o movimento vertical uma vez que, como no problema anterior, a componente horizontal não nos interessa agora. Nós temos um problema clássico de queda livre, apesar de termos uma velocidade inicial para cima. Vamos chamar esta quantidade vetorial de v-$_0$. Ela faz um ângulo de trinta graus com a horizontal; então, podemos concluir (por trigonometria) que suas componentes horizontal e vertical são, respectivamente;

$$v_x = v_o \cos 30° = 0{,}87 v_o$$

$$v_y = v_o \operatorname{sen} 30° = 0{,}5 v_o$$

Conhecendo nossa componente vertical da velocidade e notando que o sentido da velocidade inicial é para cima (positivo) e o sentido da gravidade é para baixo (negativo), podemos escrever a equação horária:

$$y(t) = 0{,}5 v_o t - 4{,}9 t^2$$

Podemos, agora, determinar quando o motoqueiro alcançará a altura de seis metros (que corresponde a um ponto três metros abaixo do centro de coordenadas). Matematicamente falando:

$$-3 = 0{,}5 v_o t - 4{,}9 t^2$$

Vimos, então, que este tempo já depende da velocidade inicial, ou seja, que a velocidade inicial depende do tempo. Mas qual é o fator limitante deste tempo? Por que ele não pode ser um tempo qualquer? A resposta é dada pelo senso de auto-preservação do motoqueiro: seu alcance deve ser precisamente de 20 metros. Mas, esta equação horária também é simples, pois a componente horizontal da velocidade já é conhecida...

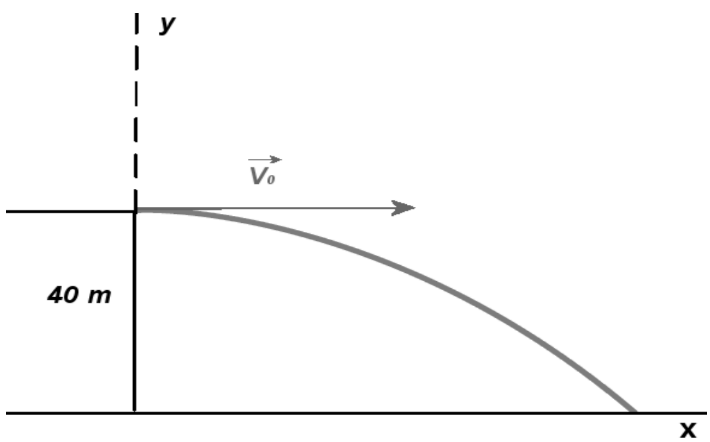
$$x(t) = 0{,}87 v_o t - 20$$

Podemos agora isolar o tempo e substituir na equação anterior:

$$t = \frac{23}{v_o} \rightarrow -3 = 0{,}5 v_o \, x \frac{23}{v_o} - 4{,}9 \left(\frac{23}{v_o} \right)^2$$

Resolvendo esta simples equação do segundo grau, temos: $v_o = 13{,}4 \frac{m}{s}$. Note que esta é a mínima velocidade necessária para chegar ao limite esquerdo da rampa. Existe, no entanto, outro limite: o máximo. Se a velocidade for maior que certo valor, o motociclista ultrapassará o limite da rampa e cairá diretamente no solo. O cálculo é exatamente o mesmo, trocando apenas os limites de x e y.

III. Vamos observar como o problema pode ser estudado:



O problema nos diz que a bola é chutada na horizontal, portanto, a velocidade inicial na direção y é zero. Se assumirmos as direções dos eixos coordenados como sendo as usuais, podemos equacionar o movimento horizontal como sendo:

$$y(t) = 40 - 4{,}9t^2$$

Podemos, então, calcular o tempo necessário para a bola chegar ao chão, ou seja, quando y=0: $0 = 40 - 4{,}9t^2 \longrightarrow t = 2{,}86\ s$. Mas, o tempo que o jogador precisou esperar foi de três segundos, o que dá uma diferença de $\Delta t = 3{,}00 - 2{,}86 = 0{,}14\ s$. Este tempo corresponde ao tempo necessário para o som do impacto chegar (em linha reta) aos ouvidos do jogador. Isto quer dizer que podemos calcular a distância percorrida pelo som, uma vez que sabemos qual é a sua velocidade:

$$v_{som} = \frac{343m}{s} = \frac{Distância}{Tempo} = \frac{Distância}{0{,}14} \rightarrow Distância = 49\ m$$

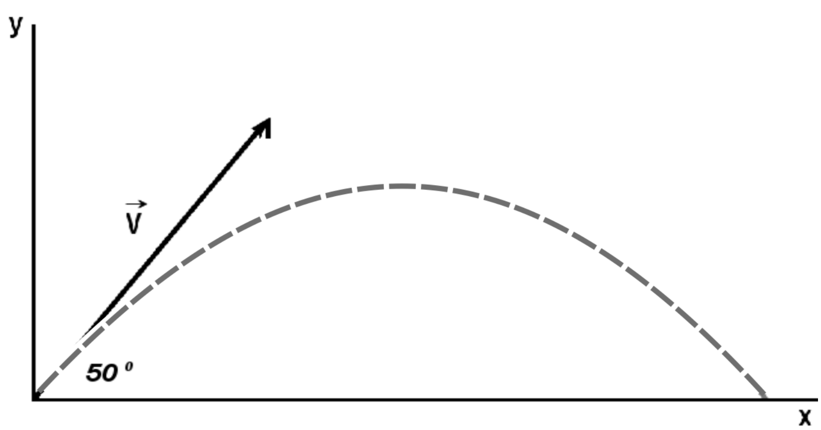
Temos então, finalmente, a distância em linha reta (hipotenusa) que é de 49 metros e a distância vertical, de 40 metros. Utilizando Pitágoras, determinamos, então, qual é a distância horizontal: x.

$$(49)^2 = (40)^2 + (x)^2 \rightarrow x = 28{,}3m$$

Concluímos que a distância horizontal percorrida em 2,86 segundos foi de 28,3 metros, e podemos, a partir daí, obter a velocidade inicial na direção x, que se mantém constante durante o movimento.

$$x(t) = v_o t \rightarrow 28{,}3 = v_o 2{,}86 \rightarrow v_o = \frac{9{,}91m}{s}$$

IV. Este problema também é muito interessante e, para a sua solução, será dividido em dois. No primeiro deles, determinaremos qual é a trajetória da flecha dada a velocidade inicial e o ângulo de tiro. Para chegar a este objetivo, dividiremos esta velocidade inicial entre as suas componentes vertical e horizontal.



As componentes são dadas por:

$$v_{ox} = v_o \cos\theta = 45 \cos 50^o = 28{,}9 \frac{m}{s}$$

$$v_{oy} = v_o \operatorname{sen}\theta = 45 \operatorname{sen} 50^o = 34{,}5 \frac{m}{s}$$

Os movimentos da flecha podem ser equacionados (considerando o ponto de lançamento como sendo a origem do sistema de coordenadas):

$$x(t) = 28{,}9t \; e \; y(t) = 34{,}5t - 4{,}9t^2$$

Podemos, agora, determinar quanto tempo a flecha levará para chegar à distância horizontal de 150m:

$$150 = 28{,}9t \rightarrow t = 5{,}19s$$

Depois de decorrido este tempo, determinaremos qual é a altura da flecha (acima da cabeça do ajudante):

$$y(5{,}19) = 34{,}5 \text{ x } 5{,}19 - 4{,}9(5{,}19)^2 = 47m$$

Nosso problema com a flecha está resolvido. Estudemos agora a maçã. Nossa primeira questão é: qual a menor velocidade inicial para que a maçã chegue à altura de 47 metros? Esta pergunta pode ser facilmente respondida através da equação de Torricelli:

$$v_f^2 = v_i^2 - 2g\Delta y \rightarrow 0 = v_i^2 - 2 \text{ x } 9{,}8 \text{ x } 47 \rightarrow v_i = 30{,}3\,\frac{m}{s}$$

Agora o que nos resta é garantir que a flecha e a maçã chegarão a este ponto ao mesmo tempo. O tempo que a flecha levará já foi calculado: 5,19 segundos. Precisamos, agora, perguntar qual é o tempo que a maçã leva para chegar àquela altura de 47 metros quando é lançada a uma velocidade de 30,3 m/s. Para isto, só precisamos aplicar a equação horária da velocidade: $v(t) = 30{,}3 - 9{,}8t = 0 \rightarrow$ t=3,10 segundos

Como os tempos de vôo da flecha e da maçã são distintos, então precisaremos determinar a sua diferença para saber quanto o ajudante deverá esperar antes que possa lançar a maçã: t=5,19-3,10=2,09 segundos.

CONCLUSÃO

Vimos, nesta aula, que o movimento de projéteis pode ser adequadamente tratado quando grandezas vetoriais, tais como posição e velocidade são tratadas exclusivamente através de suas coordenadas. Problemas de razoável complexidade podem facilmente ser decompostos em pares de problemas simples, onde os grandes pontos de interrogação encontram-se na correta interpretação das perguntas e na escolha bem feita de sistemas de coordenadas. Apesar de o sistema cartesiano usual ser geralmente o mais utilizado, em algumas situações é mais interessante inverter os sentidos dos eixos coordenados para se obter maior simplicidade.

RESUMO

Nesta aula, tratamos sobre o problema de lançamento de projéteis. Este movimento é composto por uma componente horizontal e uma vertical. A estas direções serão atribuídos eixos cartesianos, que as dividirão entre componentes x e y (horizontal e vertical). O movimento global então poderá ser estudado em suas duas componentes, individualmente, o que possibilita a solução de pares de problemas simples e que indicam a solução de um problema complicado. O tempo é mostrado como um fator de parametrização, que pode, ou não, ser utilizado para a resolução dos problemas.

PRÓXIMA AULA

Na próxima aula estudaremos o Movimento Circular Uniforme. Serão discutidas as forças necessárias para a manutenção de tal movimento e como fazer para equacioná-lo.

REFERÊNCIAS

GIANCOLI, Douglas C. **Physics for Scientists and Engineers**. 3ed. New Jersey: Editora Prentice Hall, 2000.

YOUNG, Hugh D. & FREEDMAN, Roger A. **Física I- Mecânica**. 10ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003. Tradução: Adir Moysés Luiz.

KELLER, Frederick J.; GETTYS, Edward & SKOVE, Malcolm J. Física. São Paulo: Makron Books, 1997. Trad. Alfredo Alves de Farias. Vol. 1.

RESNOCK, Robert; HALLIDAY, David & KRANE, Kennneth S. Física 1. 5ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2003. Trad. Pedro M. C. L. Pacheco, Marcelo A. Savi, Leydervan S. Xavier, Fernando R. Silva.