

Aula 12

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

META

Definir os sistemas não dissipativos e utilizar os conceitos de energia mecânica, potencial e cinética na resolução de problemas.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá:

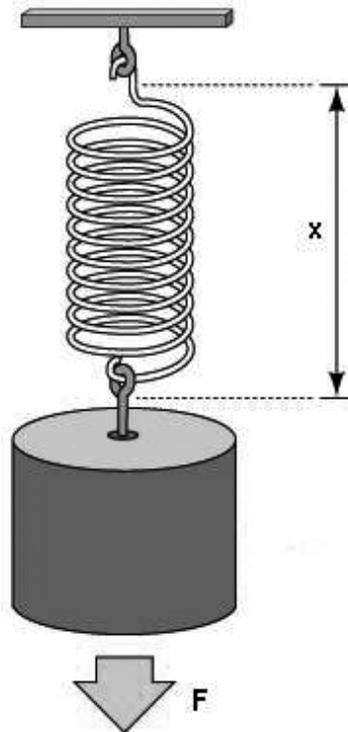
- diferenciar os tipos de energia na mecânica;
- calcular a energia potencial de corpos suspensos;
- calcular a energia cinética de corpos em movimento;
- utilizar a conservação da energia para resolver problemas simples de mecânica.

PRÉ-REQUISITOS

Álgebra, trigonometria, leis de Newton e vetores.

INTRODUÇÃO

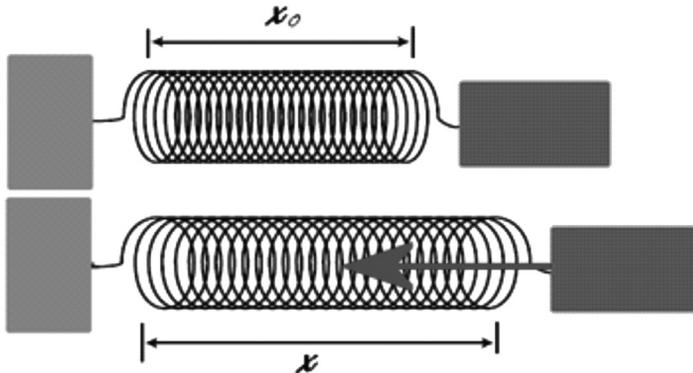
Enquanto nas aulas anteriores tratamos da resposta cinemática dos corpos sob ação de forças, nesta trataremos do efeito destas mesmas forças sobre as formas dos corpos. Trataremos das deformações dos corpos quando aplicamos estas forças em determinados pontos dos corpos. Veremos que quando aplicamos uma força para empurrar um dado objeto (por exemplo, uma geladeira em nossa cozinha), podemos alterar o seu estado de movimento, acelerando-a. Sendo a geladeira de um modelo antigo, onde as paredes são metálicas, corremos o risco de amassá-la no processo. Por isto devemos tomar cuidados a respeito de onde aplicar a força. Os modelos mais novos têm paredes de plástico, que aceitam melhor a força aplicada, sofrendo uma deformação, mas voltando rapidamente à sua forma original. Esta diferença de comportamento é devida às características dos materiais, onde alguns têm um comportamento mais elástico enquanto outros têm um comportamento mais plástico. Veremos que a lei que descreve a dinâmica do sistema massa mola é apenas uma simplificação de um comportamento mais geral dos corpos sujeitos a algum tipo de tensão. Chegaremos mais perto da realidade ao tomar conhecimento de tabelas que mostram como os corpos, de diferentes materiais, se comportam sob tração, compressão e cisalhamento. E, no limite, veremos quais são os valores máximos de tensão que cada material pode suportar antes de se romper.



(Fonte: <http://br.geocities.com>).

CARACTERÍSTICAS ELÁSTICAS DOS SÓLIDOS

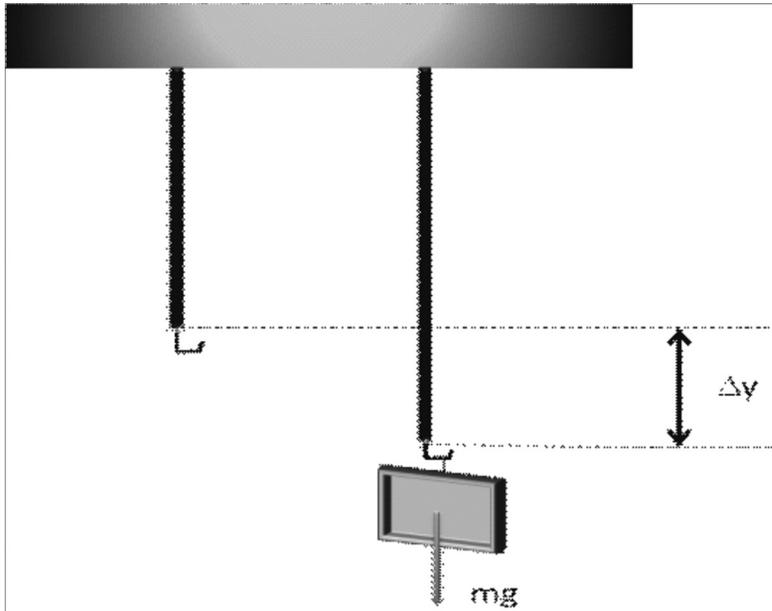
Bem vindos caros alunos. Hoje estudaremos as características elásticas dos sólidos. Começaremos a nossa discussão com o caso mais comum e simples de deformação, que é aquele sofrido por uma mola simples. Considere a figura abaixo:



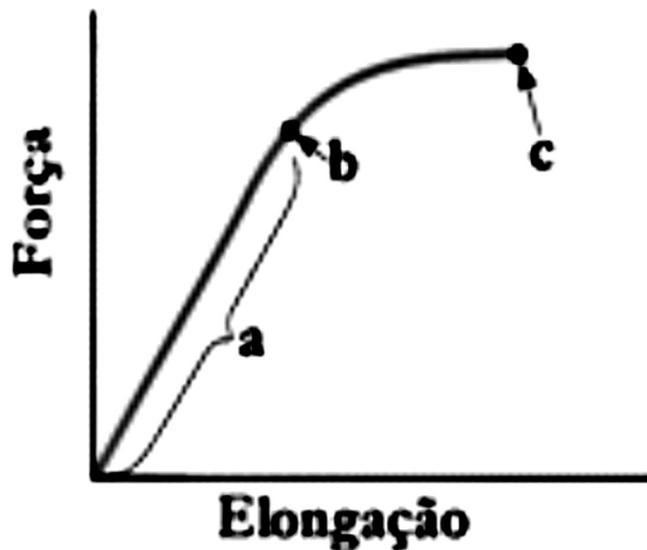
Isto nada mais é que um simples sistema massa-mola. A mola em seu tamanho natural não se encontra tracionada e nem comprimida. Neste estado o seu comprimento é dado por x_0 metros. Se aplicarmos uma força àquele bloco azul para a direita, ocorrerá uma distensão da mola, quando seu comprimento passará a um novo valor dado por x metros. Quando a mola se encontra com este comprimento e em equilíbrio (parada), a força aplicada pela mola sobre o corpo se iguala à força externa. Robert Hooke (1635-1703) estabeleceu uma relação experimental entre a força aplicada, que é igual à força restauradora, e a elongação da mola. Esta relação é dada por:

$$\vec{F} = -k(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

O sinal negativo aparece por se tratar de uma força que se opõe à deformação. A validade desta equação está restrita a pequenas deformações. Se forças externas muito intensas são aplicadas a lei deixa de ter validade, pois depois de um certo ponto a mola não tem mais um comportamento elástico (chama-se de comportamento plástico) e em casos extremos ocorre a ruptura da mola. A constante k que aparece na equação é conhecida como constante de mola e depende de vários fatores, mas principalmente do material de que a mola é feita, sua espessura, número de voltas por metro, etc. Como são muitas as variáveis é praticamente impossível criar uma tabela com este tipo de constantes. Quando passamos para o caso mais geral dos corpos extensos ocorrem algumas mudanças. Vejamos o caso de uma massa acoplada à extremidade de um tubo, como na figura abaixo:

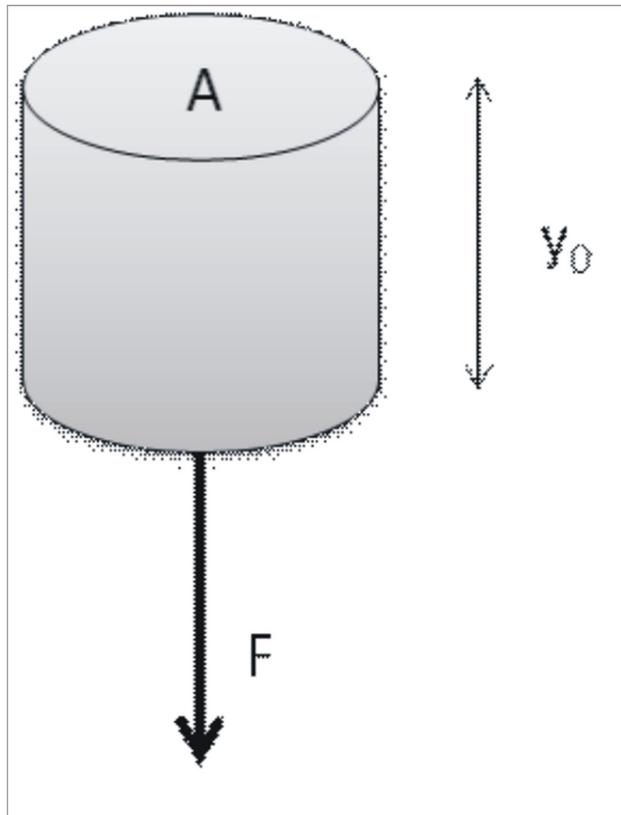


Trata-se exatamente do mesmo caso estudado no ensino médio para o sistema massa-mola na vertical. Um corpo de massa m é acoplado à extremidade de um cilindro. Se esta massa for grande o suficiente, ela provocará uma elongação deste tubo, da mesma maneira que uma mola. E, novamente, se a massa não for muito grande, a elongação será proporcional à força (mg) aplicada. Com certeza continuamos com a lei de Hooke: $F \approx k\Delta y$. Vejamos como é um comportamento típico de elongação (deformação) de um corpo sujeito a uma força (ou tensão) crescente.



Neste gráfico identificamos três regiões de importância. A primeira delas, chamada de região “a”, corresponde a uma relação linear entre a tensão e a deformação. Nesta região é válida a lei de Hooke. Quando a força externa é retirada o corpo retorna à sua forma anterior, sem deformação permanente. Se a força externa alcança o ponto designado pela letra “b”, a relação entre tensão e deformação deixa de ser linear. O ponto b é conhecido como ponto proporcional ou limite elástico. Na realidade, o ponto proporcional corresponde à máxima força aplicada que corresponde a uma elongação linear, e o limite elástico corresponde à máxima força aplicada que ainda permite uma volta à forma original. Para muitos materiais estes pontos são muito próximos. O aumento continuado da intensidade da força aplicada corresponde a um aumento da elongação, mas não existe uma relação simples entre eles. Existe um ponto, no entanto, onde o material não consegue mais suportar a tensão e se rompe. Este é o ponto de ruptura mostrado na figura como ponto “c”. As curvas no gráfico podem ser divididas em duas regiões: entre a origem e o limite elástico temos a “região elástica” e entre este ponto e o de ruptura temos a “região plástica”.

A deformação que o cilindro sofre depende primordialmente da força aplicada, mas também depende do material e das dimensões deste material. Para visualizar corretamente as dimensões, considere a figura abaixo:



Mostramos agora um cilindro de comprimento y_0 (quando a força é zero), área A , sujeito a uma força F . É intuitivo esperar que a variação no comprimento do cilindro, Dy , seja proporcional ao comprimento inicial do mesmo e inversamente proporcional à área. Sendo assim, podemos escrever uma equação que relaciona estas grandezas:

$$\Delta y = \frac{F}{EA} y_0$$

Todas as variáveis que aparecem nesta equação já foram definidas acima, menos E . Esta é uma constante que depende apenas do material e é chamada de módulo de elasticidade ou módulo de Young. Note a diferença em relação à lei de Hooke. A constante k englobava as características geométricas do corpo e também as características físicas do material empregado. Nesta equação nós separamos as características geométricas e ficamos apenas com o módulo de Young que depende apenas do material. Este valor pode ser tabelado e apresentamos uma pequena amostra abaixo.

Material	
	Módulo de Young (GPa)
Diamante	1120
Granito	45
Tungstênio	390
Ferro	196
Madeira	. . .
Aço	200
Cobre	110
Titânio	116
Vidro (SiO_2)	94
Alumínio	69
Vidro ($(\text{Na}_2\text{O} - \text{SiO}_2)$)	69
Nylon	2 - 4
Osso (membros)	15

Gostaram? Entenderam? A primeira vista parece que os vários materiais têm uma constante elástica maior ou menor, e que isto depende de certo modo da dureza do material. Isto é parcialmente correto. Vejamos em primeiro lugar qual é a unidade do módulo de Young:

$$E = \frac{F/A}{\Delta y/y_0} \rightarrow \frac{N/m^2}{m/m} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

Onde Pa (Pascal) corresponde à unidade SI de pressão. A tabela nos apresenta então valores em 10^9 Pa! Outra maneira muito útil de encarar estas equações utiliza os conceitos de tensão e deformação. É comum chamarmos uma grandeza com unidade de força sobre área de tensão.

$$Tensão = \frac{Força}{Área} = F/A$$

A aplicação de uma tensão implica em uma deformação, que é definida como sendo a razão entre a variação no comprimento e o comprimento original:

$$Deformação = \frac{\Delta y}{y_0}$$

Note que a tensão está relacionada com a força aplicada por um agente externo, enquanto a deformação corresponde à resposta do corpo a esta força. Podemos então rearranjar a equação que definiu o módulo de Young:

$$E = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta y}{y_0}} = \frac{Tensão}{Deformação}$$

Isto nos diz que a deformação é diretamente proporcional à tensão e o fator de proporcionalidade é o módulo de Young.

Antes de estendermos este conceito, façamos alguns exercícios para esclarecer o ponto.



ATIVIDADES

1. Uma corda de piano tem um comprimento de 1,6 m e diâmetro de 2 mm. Se a tensão aplicada para esticá-la 3mm é de 1200 N, determine qual é o material de que ela é feita.
2. Duas barras metálicas, uma de ferro e outra de tungstênio, cada uma medindo 10 metros de comprimento são utilizadas para segurar um piano cuja massa é 600 kg. O guindaste que eleva o piano puxará igualmente as duas barras em cerca de 2 metros. Se o raio das duas barras é de cerca de 2 mm, qual será o desnível apresentado pelo piano após todo o processo?

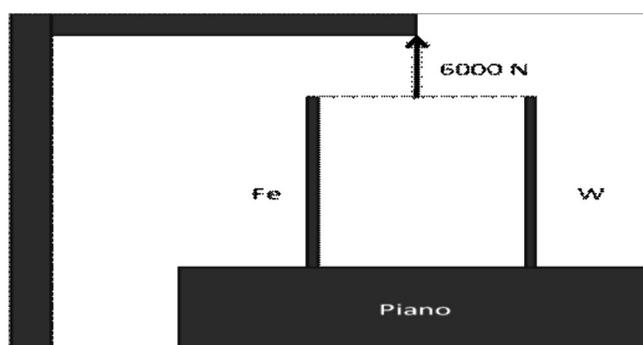
COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

1. A solução deste problema é direta, bastando o uso da fórmula apresentada no texto para a obtenção do módulo de Young. Sendo o diâmetro do fio 2 mm, obtemos a área: $A = \frac{\pi D^2}{4} = 3,1 \times 10^{-6} m^2$.

$$E = \frac{Fy_0}{A\Delta y} = \frac{1200 \times 1,6}{3,1 \times 10^{-6} \times 0,003} = 2,07 \times 10^{11} Pa = 207 GPa$$

Consultando a tabela no texto podemos concluir que o fio pode ser de ferro ou aço.

2. Precisaremos de uma figura para compreender o problema:



Nosso plano estilizado se apresenta aqui apoiado ao chão. Imaginemos agora que o guindaste aplica uma força superior a 6000 N (ou seja, maior que o peso do plano), movendo-o até uma altura de 2 metros do chão e então pára. Vamos assumir que a força se divide entre as duas barras igualmente. Sendo este o caso, a tensão aplicada a cada uma das barras vale 3000 N. Como o comprimento inicial de cada uma das barras é de 10 metros, podemos calcular a deformação de cada uma delas utilizando a relação:

$$\Delta y = \frac{Fy_0}{AE}$$

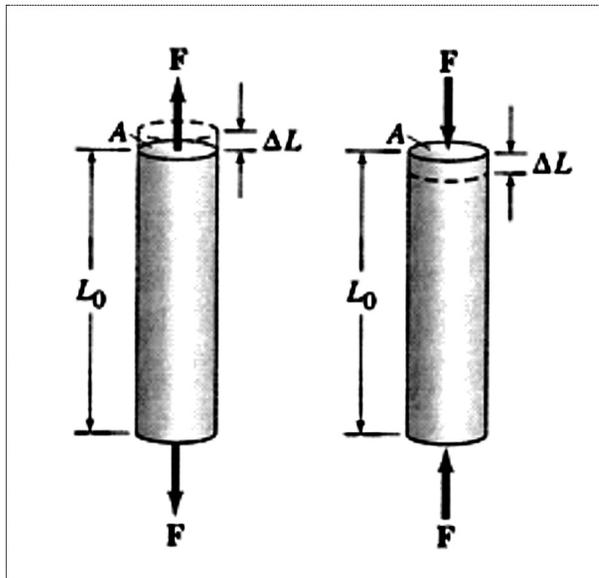
Utilizando a tabela do módulo de Young podemos calcular as deformações:

$$\Delta y_{Fe} = \frac{3000 \times 10}{\pi(0,002)^2 \times 196 \times 10^9} = 0,012m$$

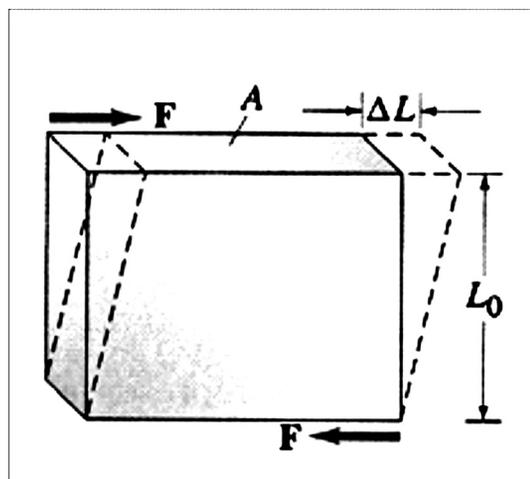
$$\Delta y_W = \frac{3000 \times 10}{\pi(0,002)^2 \times 406 \times 10^9} = 0,0059m$$

Os comprimentos finais das barras são então: $y_{Fe}=10,012m$; $y_W=10,0059m$ e o desnível é apenas a diferença entre os comprimentos: $0,0061m=6,1 \text{ mm}$.

O módulo de Young é utilizado não apenas para materiais sob tração, mas também para objetos sob compressão. Veja a figura abaixo:



Nos dois casos existem duas forças iguais e opostas que deformam o corpo. O mesmo módulo de Young dá uma medida da capacidade do material de suportar a tração e a compressão (duas formas de tensão). Uma terceira categoria de tensão aparece quando as forças não agem na mesma linha. É o que conhecemos como tensão de cisalhamento. A tensão de cisalhamento pode ser apreciada na figura abaixo:



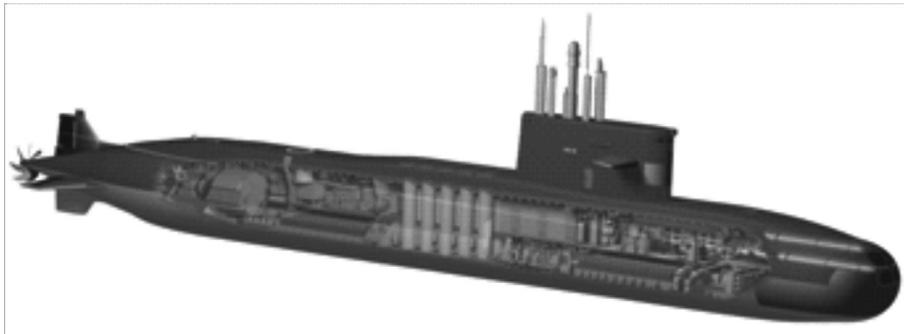
Note que as forças agora agem em linhas diferentes e efetivamente aplicam um torque ao corpo. Se o mesmo se encontra livre ocorre uma rotação, mas quando está estático sofre uma deformação. Apesar de não ocorrer uma variação nas dimensões do objeto, a sua forma muda. A intensidade desta deformação é dada pelo mesmo tipo de relação tensão/deformação:

$$\Delta L = \frac{1}{G} \frac{F}{A} L_0$$

Note que a área em questão corresponde à área na direção da força, em contraste com o caso da tração e compressão, onde a força é perpendicular à área da fórmula. O fator de proporcionalidade, G , recebe o nome de Módulo de Cisalhamento, ou de torção e geralmente corresponde a um terço ou metade do valor do módulo de Young. Para efeito de ilustração apresentamos uma tabela com alguns valores de G .

Material	Módulo de cisalhamento (GPa)
Aço	84
Cobre	44
Titânio	41,4
Vidro	26,2
Alumínio	23
Polietileno	0,117
Borracha	0,0003

Para terminar a discussão de tensão vamos avaliar o que ocorre com um submarino.



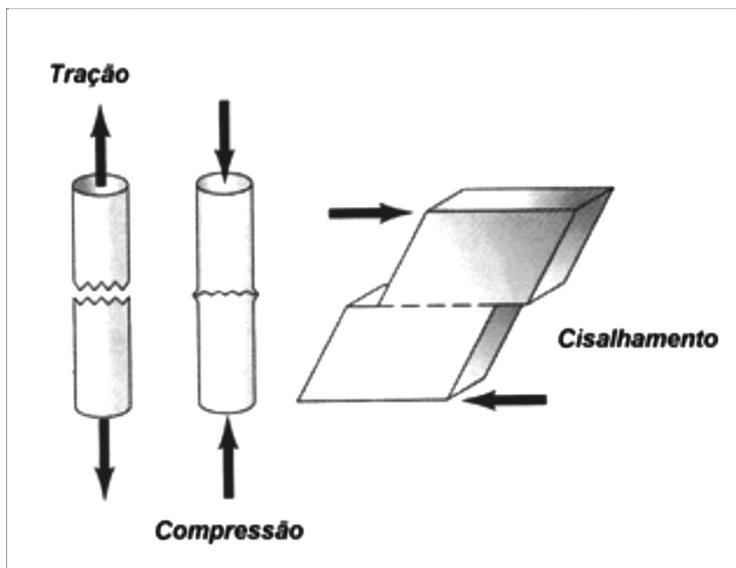
Quando submerso, o submarino está sujeito à pressão que a água ao seu redor aplica sobre as suas paredes. Quanto mais fundo ele esteja, maior é esta pressão, o que de fato limita a profundidade máxima que pode ser alcançada. Você mesmo já pode ter sentido o aumento da pressão quando mergulha muito fundo em uma piscina. Este tipo de tensão não aparece em apenas uma linha, mas em todo o corpo e tende a fazê-lo diminuir o volume. A relação funcional que existe então entre o volume inicial do corpo V_0 , sua variação ΔV e a variação de pressão, ΔP que a causou, é dada por:

$$B = -V_0 \frac{\Delta P}{\Delta V}$$

Aqui temos um sinal de menos para indicar que um aumento da pressão causa uma diminuição do volume. Em analogia aos outros casos, B é conhecido como Módulo Volumétrico, ou Módulo de Compressibilidade, e tem alguns valores representativos na tabela abaixo.

Material	Módulo Volumétrico (GPa)
Aço	160
Cobre	140
Chumbo	7,7
Vidro	31
Alumínio	70
Latão	61
Diamante	540

Antes de passarmos para alguns problemas seria interessante explorar o que ocorre quando o material não suporta a tensão aplicada, ou seja, quando ocorre a fratura. A figura abaixo mostra como isto ocorre:



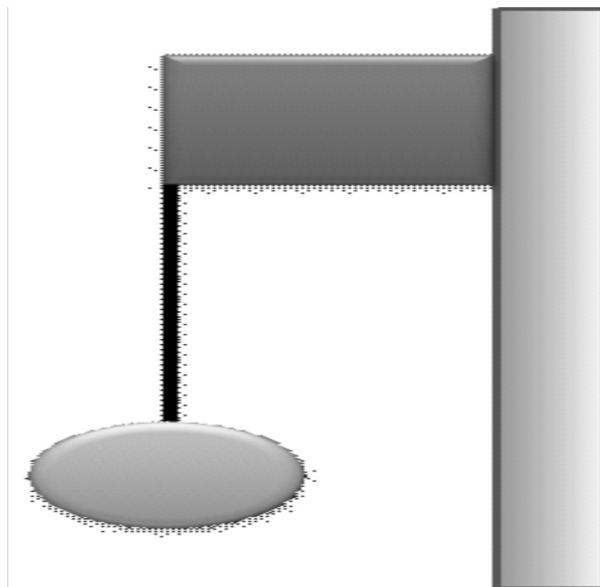
Como podemos ver existem várias maneiras de um material sofrer uma fratura. Os valores máximos de tensão, compressão e cisalhamento de um dado material podem variar muito de uma amostra a outra, mas a tabela abaixo pode nos dar uma idéia destes valores médios.

Material	Resistência à Tensão (10^6 N/m ²)	Resistência à Compressão (10^6 N/m ²)	Resistência ao Cisalhamento (10^6 N/m ²)
Ferro	170	550	170
Aço	500	500	250
Latão	250	250	250
Alumínio	200	200	200
Concreto	2	20	2
Nylon	500	-	-
Ossos	130	170	-

Podemos agora resolver alguns problemas para que o conteúdo fique mais acessível.



1. Um amortecedor automotivo a óleo contém um volume de 1 litro. Calcule a diminuição no volume do óleo quando ele é submetido a um aumento de pressão de $DP = 200$ atm, sendo o módulo de compressibilidade do óleo $B=5,2$ GPa.
2. Um bloco de massa 30 kg é suspenso por um fio e conectado a um bloco conforme a figura abaixo.



Sendo o diâmetro do fio 0,01 metro e as dimensões do bloco 0,2X0,4X0,4 metros, determine a tração sentida pelo fio e a tração (de puro cisalhamento) sentida pelo bloco.

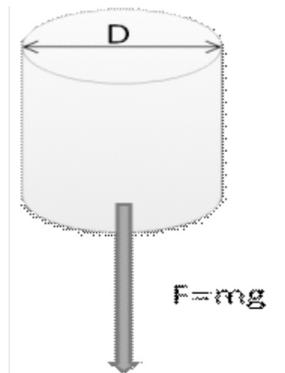
3. Qual é a tensão máxima que uma corda de Nylon de raquete de tênis de 1 mm diâmetro pode suportar?

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

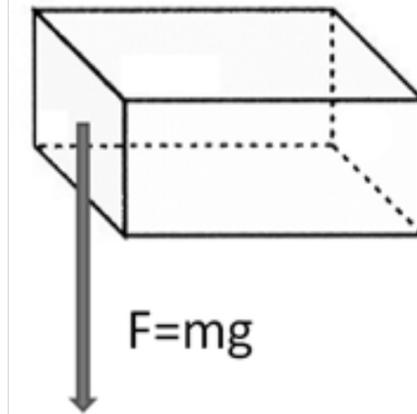
1. Trata-se naturalmente de um problema de compressibilidade volumétrica e sua solução pode ser obtida simplesmente pela aplicação da fórmula. Um primeiro cuidado que deve ser tomado está relacionado ao valor da variação de pressão, que se encontra em atmosferas e deve ser expresso em Pa. A conversão é simples e utiliza a relação: 1 atm=10⁵ Pa. O mesmo ocorre com o volume inicial: 1L=10⁻³ m³. Sendo assim:

$$\Delta V = -\frac{V_0 \Delta P}{B} = -\frac{10^{-3} \times 200 \times 10^5}{5,2 \times 10^9} = 3,8 \times 10^{-6} m^3$$

2. Neste problema não precisamos saber o tipo de material empregado uma vez que não queremos calcular a deformação, apenas a tensão. Vamos lá. A tensão no cabo é aquela definida no início desta aula e corresponde à divisão da força aplicada pela área transversal, veja a figura:



A área é calculada facilmente: $A = \pi \left(\frac{D}{4}\right)^2 = 0,0000196 m^2$. Sendo a força correspondente $T = \frac{F}{A} = 30 \times \frac{9,8}{0,0000196} = 15 MPa$. A força que este bloco aplica ao cabo é igual à força que o cabo aplica sobre o bloco, assumindo que a massa do cabo seja desprezível. Neste caso podemos calcular de maneira análoga a tensão no bloco. Um cuidado deve ser tomado, no entanto: a área em questão não é a área perpendicular à força. A área adequada é a área paralela à força, veja o diagrama:



Enquanto as faces superior e inferior têm uma área de $(0,4)^2 \text{ m}^2$, a área das faces laterais é $0,4 \times 0,1 = 0,04 \text{ m}^2$. A Tração então é dada por

$$T = \frac{F}{A} = 30 \times \frac{9,8}{0,04} = 7,4 \text{ KPa}$$

1. Neste problema tratamos do limite de ruptura dos materiais. Sendo a corda feita de Nylon, vemos que seu limite de tração é de 500 MPa. Com um diâmetro de 0,01 m, sua área é $0,00000079 \text{ m}^2$. Portanto a sai tração (força) máxima é dada por:

$$F = E \times A = 0,00000079 \times 500 \times 10^6 = 392,5 \text{ N}$$

CONCLUSÃO

Vimos nesta aula que os corpos sujeitos a qualquer tipo de tensão podem sofrer deformação. A escolha de um material de engenharia depende de vários fatores, dentre eles os seus módulos de tração, compressão e cisalhamento. A escolha do material para construir uma coluna, por exemplo: para que ela sustente um edifício é necessário que o material escolhido tenha um módulo de compressão bastante elevado. O concreto é um exemplo de um material que se presta maravilhosamente bem para esta tarefa ($20 \times 10^6 \text{ N/m}^2$). Se quisermos, por outro lado utilizar o concreto na construção de uma ponte, onde a tensão de tração é muito grande, teremos problemas pois seu módulo de tração é muito baixo ($2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$). Esta é a razão de utilizarmos cabos de aço no interior das estruturas de concreto, pois seu módulo de tração é muito maior ($500 \times 10^6 \text{ N/m}^2$).



RESUMO

Nesta aula estudamos o processo de deformação dos materiais sujeitos aos seguintes tipos de tensão:

- Tração;
- Compressão;
- Cisalhamento.

Vimos que uma pequena alteração na lei de Hooke do sistema massa mola é suficiente para o equacionamento dos problemas e suas simples soluções. Vimos também que é possível fazer uma escolha de materiais a partir de seus módulos de tensão para obter os melhores resultados em termos de segurança.



PRÓXIMA AULA

Na próxima aula estudaremos o importante princípio da conservação da energia. Veremos que através dele podemos resolver facilmente problemas de mecânica, praticamente insolúveis a partir apenas das equações de Newton. Até lá.

REFERÊNCIAS

Giancoli, Douglas C. **Physics for Scientists and Engineers**, 3 ed. Editora Prentice Hall, New Jersey, 2000.

Young, Hugh D.; Freedman, Roger A. **Física I – Mecânica**, 10 ed. Tradução de Adir Moysés Luiz. Editora Addison Wesley, São Paulo, 2003.

Frederick, J. Keller; Gettys, W. Edward; Skove, Malcolm J. **Física**, v. 1, 1 ed. Tradução de Alfredo Alves de Farias. Editora Makron Books, São Paulo, 1997.

Resnick, Robert; Halliday, David; Krane, Kenneth S. **Física 1**, 5 ed. Tradução de Pedro M. C. L. Pacheco, Marcelo A. Savi, Leydervan S. Xavier, Fernando R. Silva. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2003.