2
LIVRO

2
AULA

Os Espaços Vetoriais

META

Promover a identificação de vetores no plano e no espaço e suas propriedades.

OBJETIVOS

Decompor um dado vetor relativamente a uma base de vetores.

Estabelecer a igualdade entre vetores.

Reconhecer propriedades entre vetores, como o paralelismo.

PRÉ-REQUISITOS

Para seguir avante nesta aula, é necessário que você tenha compreendido os conceitos apresentados na aula anterior.

2.1 Introdução

Olá! Que bom encontrá-lo novamente! Espero que tenha gostado da nossa primeira aula. Nela definimos o objeto geométrico, vetor e algumas de suas propriedades.

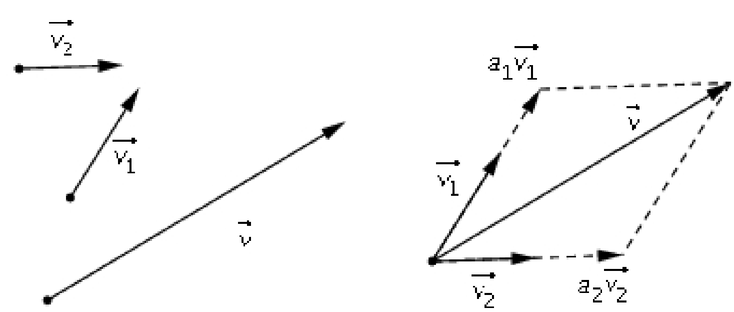
Nesta aula, iremos identificar e localizar pontos no plano (bidimensional) e no espaço (tridimensional). Veremos que é possível decompor um dado vetor (no plano ou no espaço) com uma combinação (linear) de outros vetores. Verificaremos também que propriedades algébricas inerentes às operações entre vetores acarretam em propriedades geométricas sobre esses, como por exemplo, a existência de um elemento neutro aditivo que implica um elemento neutro na soma de vetores, a saber, o vetor nulo.

2.2 Decomposição de um vetor no Plano ($\mathbb{R}^2$)

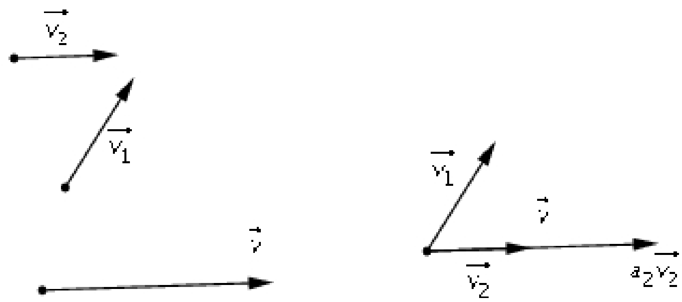
Dados dois vetores não coplanares (ver Aula 1) $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, qualquer vetor $\vec{v}$ pode ser decomposto dependendo de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$. Para isso, devemos encontrar $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tal que

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} \tag{2.1}$$

Exemplo 2.2.1. Sejam $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ vetores não colineares e $\vec{v}$ qualquer vetor no mesmo plano de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$.



Exemplo 2.2.2. No caso em que o vetor $\vec{v}$ tiver a mesma direção de $\vec{v_1}$ ou de $\vec{v_2}$, $\vec{v}$ não é a diagonal do paralelogramo e um dos números reais a_1 ou a_2 é nulo.



Neste caso, o número $a_1 = 0$, e a partir de $\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}$, temos que

$$\vec{v} = 0 \cdot \vec{v_1} + a_2\vec{v_2} \Rightarrow \vec{v} = a_2\vec{v_2}.$$

Definição 2.9.

1. Dizemos que $\vec{v}$ é a **combinação linear** de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ sempre que $\vec{v}$ for representado como em (2.1).

2. O par de vetores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ não colineares é chamado de **base** no plano.

3. Os números reais a_1 e a_2 de (2.1) são chamados **componentes** ou **coordenadas** de $\vec{v}$ em relação à base $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$.

Por conveniência, sempre tomamos as bases **ortonormais**.

Definição 2.10. Uma base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ é considerada ortonormal se os seus vetores forem ortogonais (isto é , $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$) e unitários (ou seja, $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1$).

Observação 3. Embora tenhamos definido uma base ortonormal como um conjunto, iremos pensá-la como um conjunto ordenado, isto é, numa base $\beta = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, temos que o primeiro elemento da base é $\vec{e_1}$ e o segundo, $\vec{e_2}$.

Exemplo 2.2.3. Considere a base ortonormal ilustrada na figura(2.17), no plano xOy, e um vetor $\vec{v}$ cujas componentes são 2 e 4.

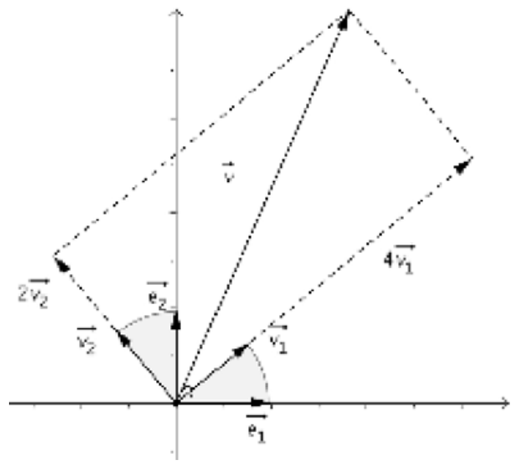


Figura 2.17: $\vec{v_2}$ e $\vec{v_2}$ são ortonormais.

Notação 1. Consideraremos, de agora em diante, que os vetores com extremidades na origem e nos pontos (1,0) e (0,1) serão representados por $\vec{i}$ e $\vec{j}$ respectivamente. Isto é,

$$(1,0) = \vec{i} \;\text{ e }\; (0,1) = \vec{j}.$$

Tendo uma base fixada, podemos fazer uma correspondência biunívoca entre os pares ordenados (x, y) do plano $(\mathbb{R}^2)$ e os vetores. Desta forma,

$$\vec{v} = (x, y)$$

é a **expressão analítica** de $\vec{v}$. Assim, nomeamos x como **abcissa** e y como **ordenada**.

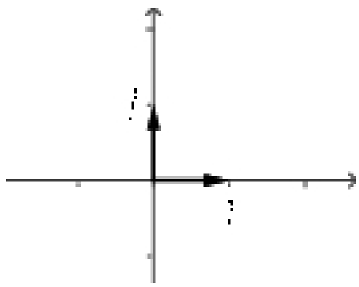


Figura 2.18: $\vec{i}$ e $\vec{j}$ como base para o plano $\mathbb{R}^2$.

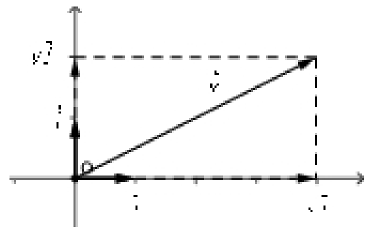


Figura 2.19: Neste caso, o vetor arbitrário $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, em que $x, y \in \mathbb{R}$, são as componentes de $\vec{v}$ em relação à base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Exemplo 2.2.4. Seja $\vec{v} = 2\vec{i} + (-3)\vec{j}$, podemos representar por $\vec{v} = (2, -3) \in \mathbb{R}^2$. Perceba que,

$$2\vec{j} = (2, 0),$$

$$(-3)\vec{i} = (0, -3) \text{ e assim}$$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + (-3)\vec{j} = (2 + 0, 0 + (-3)) = (2, -3)$$

2.3 Igualdade e Operações

2.3.1 Igualdade

Os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, e assim, $\vec{u} = \vec{v}$.

Exemplo 2.3.1. Os vetores $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (2, 1)$ são iguais, porém, $\vec{p} = (2, 1)$ e $\vec{q} = (1, 2)$ não o são.

2.3.2 Operações

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, define-se:

1. $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$;

2. $\lambda\vec{u}=(\lambda x_1, \lambda y_1)$.

Exemplo 2.3.2. Sejam os vetores $\vec{u}=(2,-1)$ e $\vec{q}=(1,3)$, temos que

$$\vec{u}+\vec{q}=(2+1,-1+3)=(3,2)$$

e

$$3\vec{u}=(3\cdot 2, 3\cdot(-1))=(6,-3).$$

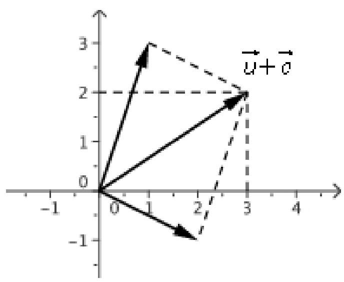


Figura 2.20: $\vec{u}+\vec{q}=(3,2)$.

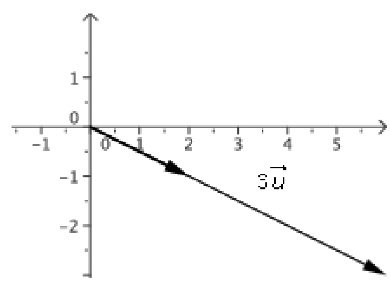


Figura 2.21: $3\vec{u}=(6,-3)$.

Com base nas operações definidas anteriormente, constatamos que o conjunto dos vetores tem as propriedades que apresentaremos a seguir.

Teorema 2.1. *Para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, tem-se*

A_1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;

A_2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;

A_3) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$;

A_4) $\vec{u}+(\vec{-u})=\vec{0}$.

e para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se

$P_1)$ $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$;

$P_2)$ $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;

$P_3)$ $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;

$P_4)$ $1\,\vec{v} = \vec{v}$.

Observação 4. O vetor $\vec{0}$ denota o vetor nulo, isto é, $\vec{0} = (0, 0)$.

Demonstração. É importante que você acompanhe o nosso raciocínio, pois vamos verificar a seguir algumas das propriedades que já apresentamos. Dados $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$, temos que:

- em (A_1),

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

  Mas como sabemos que as coordenadas de ambos os vetores são números reais, e como os reais são comutativos em relação à soma, ou seja, $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ e $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$, assim

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} = &\ (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\ = &\ (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = \vec{v} + \vec{u}. \end{aligned}$$

- em (A_4), iremos supor $\vec{w} = (a_1, a_2)$, tal que

$$\vec{0} = \vec{u} + \vec{w} = (x_1, y_1) + (a_1, a_2) = (x_1 + a_1, y_1 + a_2)$$

  Deste modo, $\vec{u} + \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow (x_1 + a_1, y_1 + a_2) = (0, 0)$, e assim,

$$x_1 + a_1 = 0 \quad \text{e} \quad y_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -x_1 \quad \text{e} \quad a_2 = -y_1,$$

  portanto, $\vec{w} = (-x_1, -y_1) = -\vec{u}$.

- já em (P_2), sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tal que

$$(\alpha+\beta)\vec{u} = (\alpha+\beta)\cdot(x_1,y_1) = ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)y_1)\,.$$

Mas sabemos que os números reais são comutativos em relação à soma e à multiplição, como também têm a propriedade da distributividade,

$$\begin{aligned}((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)y_1) = &\ (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1)\\ = &\ (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1)\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\vec{u} = &\ (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1)\\ = &\ \alpha(x_1,y_1) + \beta(x_1,y_1) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}.\end{aligned}$$

$\square$

Agora que você acompanhou o nosso raciocínio e compreendeu todo o desenvolvimento das propriedades demonstradas, deixamos para você a atividade a seguir.

Exercício 2.3.1. Mostre cada um dos itens das propriedades que não foram demonstradas.

Exemplo 2.3.3. Dados os vetores $\vec{u} = (3,-1)$ e $\vec{v} = (-1,2)$, na equação

$$4(\vec{u}-\vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$$

pretendemos determinar o vetor $\vec{w}$. Para isso, faremos uso das propriedades das operações entre vetores. Façamos

$$\begin{aligned}&4(\vec{u}-\vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w} \Rightarrow\\ &\frac{1}{3}\vec{w} + \vec{w} = 2\vec{u} - 4(\vec{u}-\vec{v}) \Rightarrow\\ &\frac{4}{3}\vec{w} = -2\vec{u} + 4\vec{v}\end{aligned}$$

então, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{3}\vec{w} = -2\vec{u} + 4\vec{v} \Rightarrow \\
&4\vec{w} = -6\vec{u} + 12\vec{v} \Rightarrow \\
&\vec{w} = \frac{-6}{4}\vec{u} + \frac{12}{4}\vec{v} \Rightarrow \\
&\vec{w} = \frac{-3}{2}\vec{u} + 3\vec{v}.
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição, chegamos a

$$\begin{aligned}
&\vec{w} = \frac{-3}{2}\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \\
&\vec{w} = \frac{-3}{2}(3,-1) + 3(-1,2) \Rightarrow \\
&\vec{w} = \left(\frac{-9}{2}, \frac{3}{2}\right) + (-3,6)
\end{aligned}$$

ou podemos escrever assim: $\vec{w} = \left(\frac{-9}{2} - 3, \frac{3}{2} + 6\right) = \left(\frac{-15}{2}, \frac{15}{2}\right)$, ou se preferir, desta forma:

$$\boxed{\vec{w} = \frac{-15}{2}(1,-1)}$$

.

Definição 2.11 (Vetor Definido por Dois Pontos)**.** Considere o vetor $\overrightarrow{AB}$ de origem no ponto $A = (x_1, y_1)$ e extremidade em $B = (x_2, y_2)$. Como na figura (2.22), as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são obtidas por $\overrightarrow{AB} = B - A$, assim

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Exemplo 2.3.4. Na figura (2.24), observamos que os segmentos orientados AB, CD e OP representam o mesmo vetor $(3,1)$, pois

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB} = B - A = (1,4) - (-2,3) = (3,1) \\
&\overrightarrow{CD} = D - C = (4,3) - (1,2) = (3,1) \\
&\overrightarrow{OP} = P - O = (3,1) - (0,0) = (3,1)
\end{aligned}$$

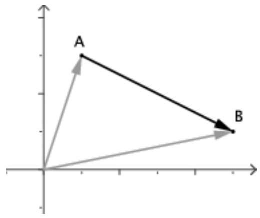


Figura 2.22: $\vec{AB} = B - A$

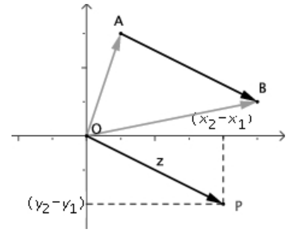


Figura 2.23: $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

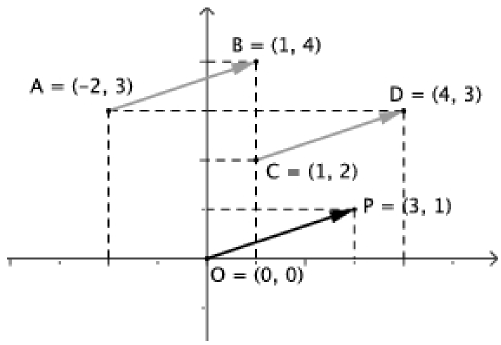


Figura 2.24: Os segmentos orientados AB, CD e OP representam o mesmo vetor $(3, 1)$.

2.4 Decomposição do Espaço ($\mathbb{R}^3$)

Nesta segunda etapa de nossa aula, procederemos nossos estudos de forma análoga à decorrida na seção (2.2), porém, com algumas adequações necessárias.

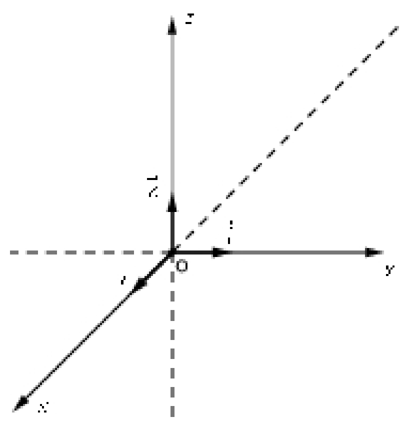
Dados três vetores não coplanares $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$, qualquer vetor $\vec{v}$ pode ser decomposto dependendo de $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$. Para isso, devemos encontrar $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, tal que

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3} \tag{2.1}$$

Analogamente ao que ocorre no plano, o vetor $\vec{v}$ é a combinação linear dos vetores da base, isto é, sempre existem números reais a_1, a_2, a_3, tal que a decomposição do espaço seja satisfeita, em que a_1, a_2, a_3 são as componentes de $\vec{v}$ em relação à base considerada (neste caso, $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$).

Uma base no espaço é ortonormal se os três vetores forem unitários e, dois a dois, ortogonais. Assim como fizemos para o plano, iremos adotar uma base entre muitas, como a **base canônica** representada por $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Em alguns livros são adotados $\{e_1, e_2, e_3\}$ em vez de $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e ainda representando o vetor por uma letra do alfabeto, v em vez de $\vec{v}$.



A reta com a direção de $\vec{i}$ é o eixo dos x (das abscissas), a reta com a direção do vetor $\vec{j}$ é o eixo dos y (das ordenadas) e a reta com a direção do vetor $\vec{k}$ é o eixo dos z (das cotas). As setas indicam o sentido positivo de cada eixo. Esses eixos são chamados de **eixos coordenados**.

Observação 5. O vetor $\vec{0}$ denota o vetor nulo, isto é, $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

Cada par de eixos determina um plano coordenado, como ilustrado nas figuras (2.25), (2.26) e (2.27).

Notação 2. A cada ponto P no espaço ($\mathbb{R}^3$) corresponde uma terna (x_1, y_1, z_1) de números reais chamados coordenadas de P.

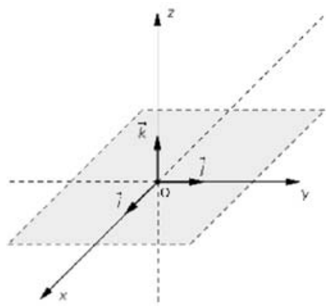


Figura 2.25: plano xy

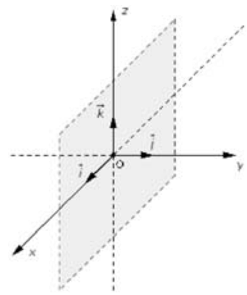


Figura 2.26: plano xz

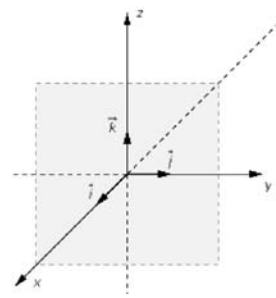


Figura 2.27: plano yz

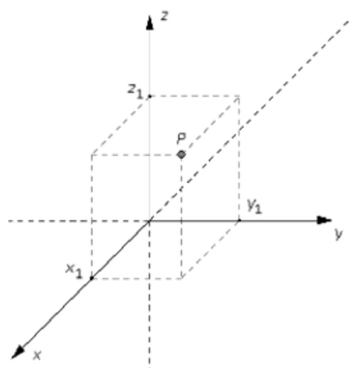


Figura 2.28: $P = (x_1, y_1, z_1)$

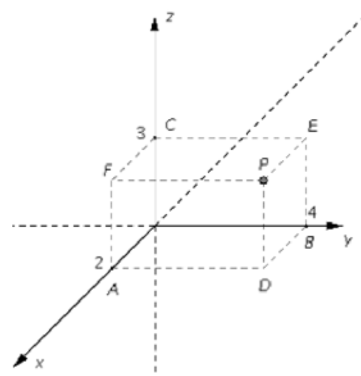


Figura 2.29: $P = (2, 4, 3)$

Observando a figura (2.29), temos:

$A = (2, 0, 0)$ - ponto no eixo dos x quando $y = z = 0$.

$B = (0, 4, 0)$ - ponto no eixo dos y quando $x = z = 0$.

$C = (0, 0, 3)$ - ponto no eixo dos z quando $x = y = 0$.

$D = (2, 4, 0)$ - ponto no plano xy quando $z = 0$.

$E = (0, 4, 3)$ - ponto no plano yz quando $x = 0$.

$F = (2, 0, 3)$ - ponto no plano xz quando $y = 0$.

Seja $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, em que x, y e z são as componentes de $\vec{v}$ na base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, como fizemos para vetores no plano.

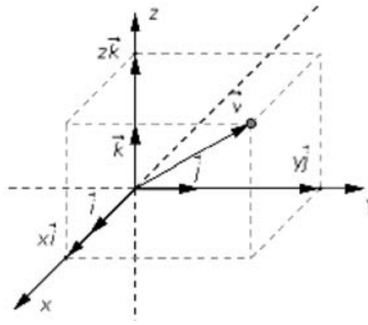


Figura 2.30: $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

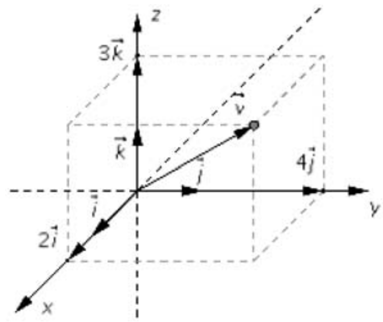


Figura 2.31: $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$

O conjunto formado por um ponto e por uma base constitui um sistema referencial.

- O espaço tem três dimensões, ou seja, é **tridimensional**, porque qualquer uma de suas bases tem três vetores.
- O plano tem dimensão 2, ou seja, **bidimensional**.
- A reta tem dimensão 1, ou seja, **unidimensional**.

Por outro lado, a representação geométrica do conjunto $\mathbb{R}$ é a reta chamada de **reta real**. O produto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (ou ainda, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$) tem como representação geométrica o **plano cartesiano**. E por fim, o produto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ (ou ainda, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$) tem como representação geométrica o **espaço cartesiano**.

2.4.1 Igualdade e Operações

Definição 2.12 (Igualdade)**.** Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

Figura 2.32: Reta real, $\mathbb{R}$.

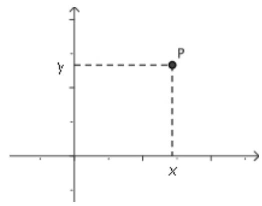


Figura 2.33: Plano cartesiano, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

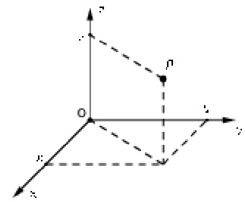


Figura 2.34: Espaço cartesiano, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

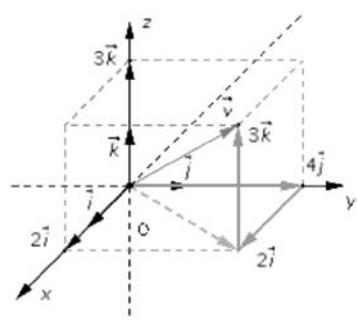
Definição 2.13 (Soma e Produto por um escalar)**.** Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, define-se:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
- $\lambda\vec{u} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

Na soma $2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$, sabendo que

$$\begin{aligned} 2\vec{i} &= 2(1,0,0) = (2,0,0) \\ 4\vec{j} &= 4(0,1,0) = (0,4,0) \\ 3\vec{k} &= 3(0,0,1) = (0,0,3) \end{aligned}$$

Observando no plano xy, temos que:



$$\begin{aligned} \vec{v} &= 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} \\ &= \underbrace{(2,0,0) + (0,4,0)}_{\text{vetor } \textit{tracejato}} + (0,0,3) \\ &= (2,4,0) + (0,0,3) = (2,4,3) \end{aligned}$$

Figura 2.35: A soma dos vetores que estão no plano xy, $2\vec{i} + 4\vec{j}$, é ilustrada pelo vetor *tracejado*, enquanto a soma do vetor *tracejado* ao vetor $3\vec{k}$ resulta no vetor $\vec{v}$.

Definição 2.14 (Vetor Definido por Dois Pontos)**.** Se $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos quaisquer no espaço, então

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Notação 3. Em vez de escrever $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, podemos escrever $\vec{v} = (2, 3, 4)$. Assim,

$$\begin{aligned} \vec{i} - \vec{j} &= (1, 1, 0) \\ 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} &= (2, -3, 1) \\ 4\vec{k} &= (0, 0, 4) \end{aligned}$$

em particular, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Definição 2.15 (Condição de Paralelismo de Dois Vetores)**.** Se dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são colineares (ou paralelos), existe um número $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, ou seja $(x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_2, y_2, z_2)$. Esta é a condição de paralelismo de dois vetores. Representamos por $\vec{u}//\vec{v}$ dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralelos.

Exemplo 2.4.1. Determinar os valores de m e n para que sejam paralelos os vetores $\vec{u} = (m + 1, 3, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, 2n)$.

Para encontrarmos m e n, iremos usar a condição de paralelismo de dois vetores, assim, temos

$$(m + 1, 3, 2) = \lambda(2, 1, 2n),$$

ou seja,

$$\begin{cases} m + 1 = 2\lambda \\ 3 = \lambda \\ 2 = 2n\lambda \end{cases}.$$

O que resulta em $m = 5$ e $n = 1/3$.

2.5 Resumo

Nesta aula, aprendemos que um vetor pode ser decomposto sob uma combinação linear de outros vetores. Conhecemos o conceito de base ortonormal e aprendemos que é possível usá-lo para descrever qualquer vetor num plano (ou espaço) coordenado, como uma combinação linear dos vetores desta base. Além disso, também verificamos algumas propriedades das operações entre vetores.

2.6 Atividades

1. Exprima o vetor $\vec{w} = (1, 1)$ como combinação linear de $\vec{u} = (-2, 1)$ e $\vec{v} = (1, -1)$.

2. Quais são as condições de a e b, números reais, para que os vetores do plano $\vec{u} = (2a+1, 1)$ e $\vec{v} = (3, 2b-3)$ sejam iguais?

3. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ e $\vec{w} = (-12, 6)$, determinar k_1 e k_2, tal que $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$.

4. Encontre os números λ_1 e λ_2, tal que $\vec{w} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 0, 4)$ e $\vec{w} = (-4, -4, -10)$.

5. No quadrado $ABCD$ tem-se $A = (-1, -3)$ e $B = (5, 6)$. Quais são as coordenadas dos vértices C e D?

6. Mostre que qualquer conjunto $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ de vetores não colineares constitui uma base no plano.

7. Seja $ABCD$ um quadrilátero. Se E é o ponto médio dos segmentos AC e BD simultaneamente, sendo $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, $C = (0,2)$ e $D = (-1,1)$, mostre que $ABCD$ é um paralelogramo.

Dizemos que E é o ponto médio de um segmento cujas extremidades são $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ se, e somente se,

$E = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

8. Dê um exemplo no plano que seja baseado na afirmação do item (6).

9. Mostre que os pontos $A = (4,0,1)$, $B = 5,1,3)$, $C = (3,2,5)$ e $D = (2,1,3)$ são vértices de um paralelogramo.

10. Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo comprimento, demonstre que $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ são ortogonais. E a recíproca?

2.7 Comentário das atividades

Você concluiu as atividades 1,2,3 e 4? Para resolvê-las entendeu e utilizou o conceito de combinação linear. Se resolveu as questões 5,6 e 9, então entendeu os conceitos de operações entre vetores e vetores definidos por dois pontos. E as atividades 7 e 8? Conseguiu concluí-las? Então você entendeu o conceito de paralelismo entre vetores. Já na questão 10, você usou o conceito de vetores ortogonais.

2.8 Referências

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra, 1980.

LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

STEINBRUCH, Alfredo. **Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 1987.