Capítulo 8

Fundamentos de Probabilidade

Objetivos

- Apresentar e discutir os principais conceitos de probabilidade.
- Apresentar as variáveis aleatórias discretas contínuas e as funções densidade de probabilidade além das distribuições amostrais, estimação de parâmetros e os testes de hipóteses.
- Compreender e adotar corretamente os conceitos e atributos fundamentais para o uso da probabilidade.

1. Introdução

Probabilidade é o estudo de experimentos aleatórios ou não determinísticos. Mas o que é experimento? Um experimento é qualquer processo de observação. Um experimento pode ser, por exemplo

- Uma observação meteorológica ou sísmica. Nesse caso temos observações de experimentos naturais.
- Uma pesquisa de opinião para saber quantos eleitores votarão no candidato x ou y na próxima eleição ou para saber quantos alunos almoçam no RU (restaurante universitário) da UECE.
- Uma verificação de um exame de sangue ou o teste de fadiga de determinado material da construção civil são observações de experimentos controlados.

Nos experimentos mencionados, pode-se notar que a incerteza sempre está presente, o que quer dizer que, se esses experimentos forem repetidos em condições idênticas, não se pode determinar qual o resultado que ocorrerá. Tais experimentos são conhecidos como **experimentos aleatórios**. A incerteza esta associada à chance de ocorrência que atribuímos ao resultado de interesse.

Exemplo 1: Vai chover neste final de semana na Praia do Futuro, em Fortaleza?

Conjunto de possibilidades: S = {chove, não chove}

Para calcular a probabilidade de chover, podemos ou usar a intuição (subjetivo) ou usar a frequência relativa dos últimos dez fins de semana em que choveu (objetivo).

Exemplo 2: Lançamento de um dado: você ganha se sair uma face par.

Conjunto de possibilidades: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Conjunto de possibilidades favoráveis: $F = \{2, 4, 6\}$

Probabilidade de você ganhar = ?

Supondo que um dado é honesto e equilibrado, será natural atribuirmos a probabilidade

$$\frac{3}{6} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

A teoria da probabilidade está baseada na estabilidade da frequência relativa após N repetições de um experimento. Essa estabilidade (aproxima-se de um limite) é base da Teoria da Probabilidade. A definição clássica ou histórica de probabilidade é dada por

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)},$$

onde, $P(A)$ = probabilidade de ocorrer o evento A, $n(A)$ = número de casos favoráveis à ocorrência do evento A e $n(S)$ = números de casos possíveis do experimento, desde que sejam igualmente prováveis. Essa definição pode ser aplicada apenas a uma classe limitada de problemas, isto é, aqueles em que é possível contar os elementos do espaço amostral, S, e do evento A. Nessa contagem, a técnica usada é análise combinatória.

Historicamente, a Teoria da Probabilidade começou com o estudo de jogos de azar (roleta, cartas etc.). Vejamos um breve histórico a partir do século XVI.

A era dos jogos de azar

- Cardano (1501-1576) → 1º matemático a calcular uma probabilidade correta.
- Fermat (1601-1655), Pascal (1623-1662) e Huygens (1629-1695) → envolveram-se na solução de um dos primeiros problemas de probabilidade.

O começo

- Bernoulli (1654-1705) → provou a Lei dos Grandes Números.
- Laplace (1749-1827) → publicou a Théorie Analytique des Probabilités.
- Poisson (1781-1840) → distribuição de probabilidade com seu nome.
- Gauss (1777-1855) → originou a Teoria dos Erros, particularmente, a dos Mínimos Quadrados.

Estamos chegando

- Chebyshev (1822-1894) → explorou as relações entre variáveis aleatórias e suas esperanças.

- Markov (1856-1922) → criou um novo ramo que é a Teoria das Variáveis Aleatórias Dependentes, conhecida como Cadeias de Markov.

Axiomatização

- Borel (1871-1956) → criou a álgebra de Borel.
- Kolmogorov → publicou em 1933 um livro com a axiomática usada até hoje.

Mente brilhante

- John von Neumann (1903-1957) → criou a Teoria dos Jogos (1928) e contribui para a descoberta da mecânica quântica e para o desenvolvimento da 1ª bomba atômica. É o pai da arquitetura digital dos computadores.

Hoje

- Idéias recentes → Probabilidade Intervalar, Probabilidade Imprecisa, Teoria dos Fractais e a Teoria da Complexidade.

2. Espaço Amostral e Eventos

Espaço amostral, denotado por *S*, é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento. Um resultado particular de *S* é um ponto amostral.

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral *S*, ou seja, é um conjunto de resultados possíveis do experimento aleatório. Ao se realizar um experimento aleatório, se o resultado pertence a um dado evento *A*, diz-se que *A* ocorreu. O evento $A = \{a\}$, em que $a \in S$, consistindo do único ponto amostral é o evento elementar.

Evento impossível: é o evento igual ao conjunto vazio ($\varnothing$).

Evento certo: é o evento igual ao espaço amostral S.

Exemplo 3: S = {chove, não chove}

Em geral, temos interesse em eventos particulares do experimento.

- **Evento A**: chove

Então, $A = \{\text{chove}\} \subset S$. O evento *A* é um subconjunto de S.

Exemplo 4: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- **Evento B**: sair face par.

Então, $B = \{\text{sair face par}\} = \{2, 4, 6\} \subset S$. O evento B é um subconjunto de S.

Exemplo 5: Ainda considerando S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, podemos definir outros eventos como

- **Evento C**: sair uma face ímpar.

Então, C = {1, 3, 5}

A um experimento aleatório está associado um espaço amostral S. O evento A ocorre se o resultado do experimento pertence a A. Os conjuntos S (evento certo) e $\varnothing$ também são eventos (evento impossível).

- **Evento D**: sair uma face maior que 3.

  Então, D = {4, 5, 6}
- **Evento E**: sair face 1.

  Então, E = {1}

2.1 Operações com eventos

- **União:** $A \cup B$ é o evento que ocorre se e somente se *A* ocorre ou *B* ocorre ou ambos ocorrem simultaneamente**.**
- **Intersecção**: $A \cap B$ é o evento que ocorre se e somente se A e B ocorrem simultaneamente. Obs: se $A \cap B = \varnothing$, então A e B são ditos mutuamente exclusivos ou disjuntos.
- **Complementar:** A^C ou $\overline{A}$ é o evento que ocorre se e somente se A não ocorrer.

Exemplo 6: Considerando o lançamento de um dado e os eventos *A, B, C, D* e *E* definidos nos exemplos anteriores, temos

$B \rightarrow D$ = sair uma face par e maior que 3

Então, $B \rightarrow D = \{2, 4, 6\} \rightarrow \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$

$B \rightarrow C$ = sair uma face par e ímpar

Então, $B \rightarrow C = \{2, 4, 6\} \rightarrow \{1, 3, 5\} = \varnothing$ (B e C são disjuntos)

$C = \overline{B}$

$B = \overline{C}$

$B \cup D$ = sair uma face par ou maior que 3

Então, $B \cup D = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$

$B \cup C$ = sair uma face par ou ímpar

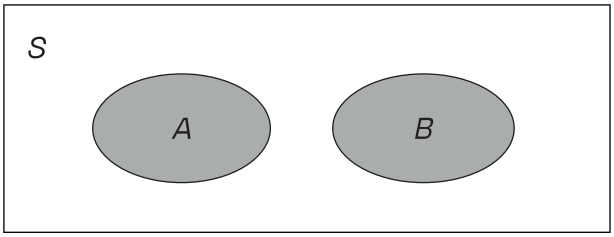
Então, $B \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3. Definição de probabilidade

A probabilidade é uma função que atribui um número aos eventos de *S* (se *A* é um evento de *S*, então *P*(*A*) é a probabilidade de *A*), que satisfaz os seguintes axiomas

- **Axioma 1**: $\forall A,\ 0 \le P(A) \le 1$.
- **Axioma 2**: $P(S) = 1$.
- **Axioma 3**: Se *A* e *B* são mutuamente exclusivos ou disjuntos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

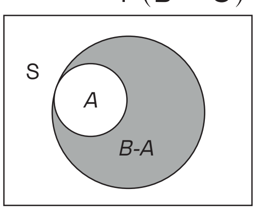
- **Axioma 4**: $A_1, A_2, \dots$ são mutuamente exclusivos, então $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$



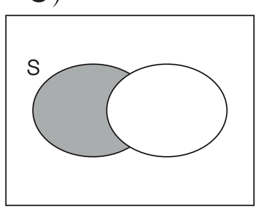
$A \cup B = A + B$

Teoremas:

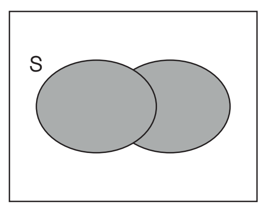
- **T1**: Se Æ é o conjunto vazio, então $P(\varnothing) = 0$.
- **T2**: Se A^c é o complemento de A, então $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- **T3**: Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.
- **T4**: Se A e B são dois eventos quaisquer, então $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
- **T5**: Se A e B são dois eventos quaisquer, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- **T6**: Se A, B e C são eventos quaisquer, então $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$ $- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$



$B - A$



$A - B$



$A \cup B$

Exemplo 7: Dados do Censo Demográfico de 1991 publicado pelo IBGE relativos aos habitantes do Ceará, na faixa etária entre 20 a 24 anos com relação às variáveis sexo e leitura.

Sexo	Lê	Não lê	Total
Masculino	39.577	8.672	48.249
Feminino	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Um jovem entre 20 e 24 anos é escolhido ao acaso no estado do Ceará.

S = conjunto de 101.850 jovens do Ceará, com idade entre 20 e 24 anos.

Eventos de interesse:

- M = jovem sorteado é do sexo masculino = jovens do sexo masculino de S
- *F* = jovem sorteado é do sexo feminino
- *L* = jovem sorteado sabe ler
- $M \cap L$ = jovem sorteado é do sexo masculino e sabe ler
- $M \cup L$ = jovem sorteado é do sexo masculino ou sabe ler

Podemos obter algumas probabilidades:

$$P(L) = \frac{\text{n° jovens que sabem ler de S}}{\text{n° de jovens de S}} = \frac{85.881}{101.850} = 0,843$$

$$P(M) = \frac{\text{n° de jovens do sexo masculino de S}}{\text{n° de jovens de S}} = \frac{48.245}{101.850} = 0,473$$

$$F = \overline{M} \Rightarrow P(F) = P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0,473 = 0,527$$

$$P(M \cap L) = \frac{\text{n° de jovens do sexo masculino e que sabem ler de S}}{\text{n° total de jovens (S)}} = \frac{39.557}{101.850} = 0,388$$

$$P(M \cap L) = P(M) + P(L) - P(M \cap L) = 0,473 + 0,843 - 0,388 = 0,928$$

4. Espaços amostrais finitos e infinitos

Seja $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ um espaço amostral finito. Obtemos um espaço de probabilidade finito se a cada ponto $a_i \in S$ associarmos a um número real p_i, chamado de probabilidade de a_i ou $P(a_i)$ As seguintes propriedades são válidas para esses espaços.

Cada p_i é não negativo, ou seja, $p_i \geq 0$

A soma dos p_i é 1, ou seja, $\sum_{i-1}^{n} p_i = 1$

Observação: a probabilidade de um evento *A* passa a ser a soma das probabilidades dos pontos amostrais que o compõem.

Exemplo 8: Lance 3 moedas e observe o número de caras; então $S = \{0, 1, 2, 3\}$ Obtém-se o espaço de probabilidade da seguinte forma.

$$P(\{0\}) = \frac{1}{8},\ P(\{1\}) = \frac{3}{8},\ P(\{2\}) = \frac{3}{8} \text{ e } P(\{3\}) = \frac{1}{8}.$$

Como a probabilidade é não negativa, a soma delas é igual a 1.

Descreva os seguintes eventos e suas probabilidades: *A* = “pelo menos uma cara aparece” e *B* = “todas caras ou todas coroas aparecem”.

$A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 3\}$

$$P(A) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

$$P(B) = P(\{0\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Seja *S* um espaço amostral infinito, S = {a_1, a_2,...}. Obtém-se um espaço de probabilidade, associando a cada $a_1 \in$ S um número real p_i, chamado de probabilidade, tal que

i) $p_i \geq 0$

ii) $\sum_{i-1}^{\infty} p_1 = 1$

Exemplo 9: Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$ de um experimento de lançamento de uma moeda até que apareça uma cara. Chame de *n* o número de vezes que a moeda é lançada. Um espaço de probabilidade é obtido fazendo-se

$$P(\{1\}) = \frac{1}{2}, P(\{2\}) = \frac{1}{4}, \ldots, P(\{n\}) = \frac{1}{2^n}, \ldots, P(\{\infty\}) = 0.$$

Em resumo:

Relembrando a interpretação da probabilidade, seja A um evento de um experimento aleatório de um espaço amostral. Consideramos duas formas de se atribuir probabilidades aos eventos de um espaço amostral.

- *P*(*A*) é uma crença (subjetiva) que se deposita na ocorrência de *A*.
- Interpretação frequentista ou de frequência relativa (objetiva)

$$f_m(A) = \frac{\text{n° de ocorrências de A em n ensaios independentes do experimento}}{n}$$

Quando *n* cresce: $f_n(A)$ ƒ $P(A)$, isto é, quando *n* cresce, a probabilidade é aproximada pelo valor da frequência relativa.

Há uma terceira definição ou interpretação, chamada de probabilidade geométrica, que não será abordada neste texto.

5. Probabilidade condicional

No exemplo anterior, se soubermos que o jovem sorteado é do sexo masculino, qual é a probabilidade de que saiba ler? Temos uma informação parcial: o jovem é do sexo masculino. Vamos designar a probabilidade de L quando se sabe que o jovem é do sexo masculino por *P*(*L*/*M*) e denominá-la probabilidade condicional de *L* dado *M*.

É natural atribuirmos

$$P(L/M) = \frac{\text{n° de jovens que sabem ler dentre aqueles do sexo masculino}}{\text{n° total de jovens do sexo masculino}}$$

$$= \frac{39.577}{48.249} = 0,820$$

Note que

$$P(L/M) = \frac{\dfrac{\text{n° jovens do sexo masculino e que sabem ler}}{\text{no total de jovens}}}{\dfrac{\text{n° jovens do sexo masculino}}{\text{n° total de jovens}}}$$

Sejam *A* e *B* eventos de um experimento aleatório qualquer. Imitando a equação. 1, podemos dizer que a probabilidade condicional de A dado B (nota-se por P (A / B)) é definida como

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Por exemplo, a probabilidade de ser do sexo masculino dado que lê é dada por

$$P(M/L) = \frac{P(M \cap L)}{P(L)} = \frac{0,388}{0,843} = 0,460$$

5.1 Regra do produto

Da equação equação. 2 obtemos a **regra do produto** para a probabilidade da interseção de dois conjuntos:

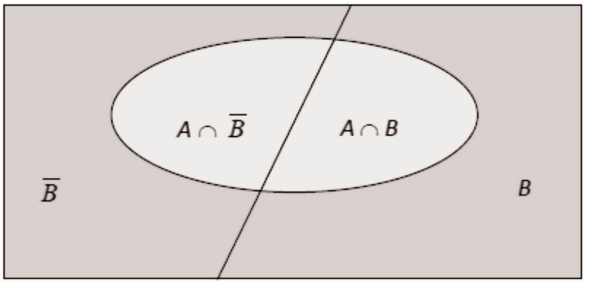
$$P(A \cap B) = P(A/B)\,P(B)$$

válida para quaisquer eventos *A* e *B* de *S*.

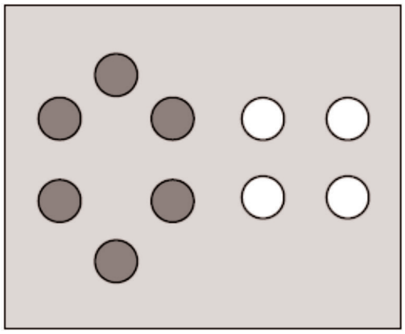
5.2 Regra da probabilidade total

Sejam A e B dois eventos. Há duas maneiras de A ocorrer: ou A e B ocorrem ($A \cap B$) ou A e $\overline{B}$ ocorrem ($A \cap \overline{B}$).

Desse modo, $A = \{A \cap B\} \cup \{A \cap \overline{B}\}$, onde $A \cap B$ e $A \cap \overline{B}$ são conjuntos disjuntos. Pela regra da soma, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$. Pela regra do produto, $P(A) = P(B).P(A/B) + P(\overline{B})\,P(A/\overline{B})$ (regra da probabilidade total).



Exemplo 10: Em uma urna, há 10 bolas, sendo 4 brancas e 6 vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, sem reposição. Qual é a probabilidade da 2ª bola ser vermelha?

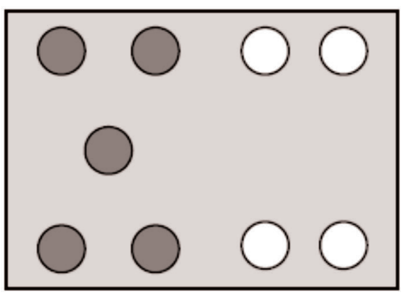


Se *A* é a probabilidade de a segunda bola sorteada ser vermelha, queremos calcular *P*(*A*). Seja *B* a probabilidade de a primeira bola sorteada ser vermelha.

$$P(B) = \frac{6}{10}$$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$$

Se *B* ocorreu, isto é, saiu vermelha na primeira retirada, então



$P\{A/B\}$ = P{sortear 1 bola vermelha dentre 5 vermelhas e 4 brancas}

$$P\{A/B\} = \frac{5}{9}$$

$P\{A / B^{c}\}$ = P (sortear 1 bola vermelha dentre 6 vermelhas e 3 brancas) = 6/10

Portanto,

$$P\{A\} = P\{B\} \cdot P\{A / B\} + P\{\overline{B}\} \cdot P\{A \mid \overline{B}\}$$

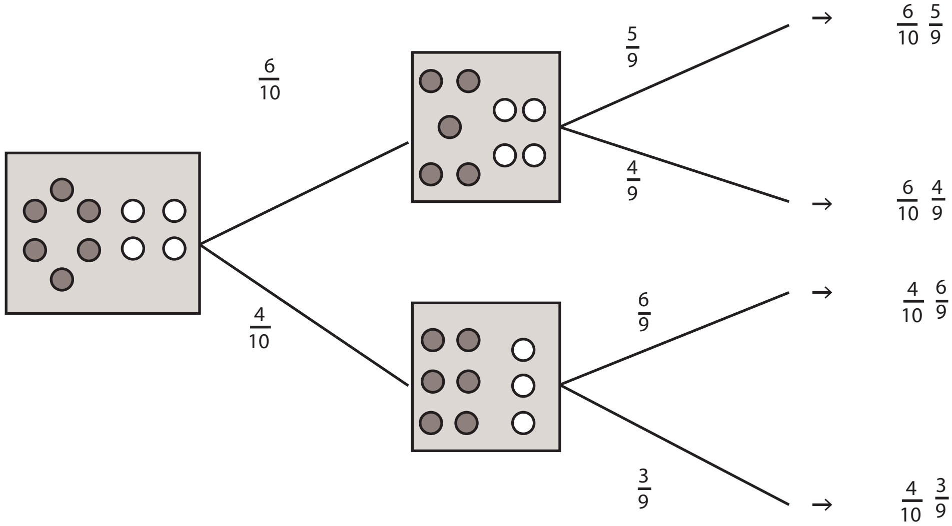
$$P\{A\} = \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} + \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10}$$

$$P\{A\} = \frac{6}{10}\left(\frac{5}{9} + \frac{4}{9}\right)$$

$$P\{A\} = \frac{6}{10}$$

Podemos fazer o diagrama em árvore ou árvore de probabilidades da situação descrita neste exercício.

$$P\{A\} = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} + \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{6}{10}$$



5.3 Independência

Dois eventos A e B são independentes se $P\{A / B\} = P\{A\}$ ou $P\{B / A\} = P\{B\}$.

No exemplo anterior, $P\{A/B\} = \frac{5}{9} \neq \frac{6}{10} = P\{A\}$, ou seja, A e B não são independentes.

Se o sorteio da 2ª bola for com reposição,

$P\{A / B\}$ = P {sortear 1 bola vermelha dentre 6 vermelhas e 4 brancas}

$= \frac{6}{10} = P\{A\}$, então os eventos são independentes.

5.4 Regra do produto para eventos independentes

Se A e B são eventos independentes,

$P\{A \cap B\} = P\{B\}.P\{A / B\} = P\{B\}.P\{A\}$

Exemplo 11: Considerando o exemplo anterior, qual a probabilidade de serem retiradas 2 bolas vermelhas (no sorteio com reposição)?

Calculando a probabilidade de A , temos

$$\begin{aligned} &P\{A \cap B\} = P\{A\}\cdot P\{B\} \\ &= \frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10} \\ &= 0,36 \end{aligned}$$

6. Variáveis aleatórias, funções densidade de probabilidade

O objetivo do cálculo das probabilidades é criar modelos matemáticos capazes de representar os experimentos aleatórios.

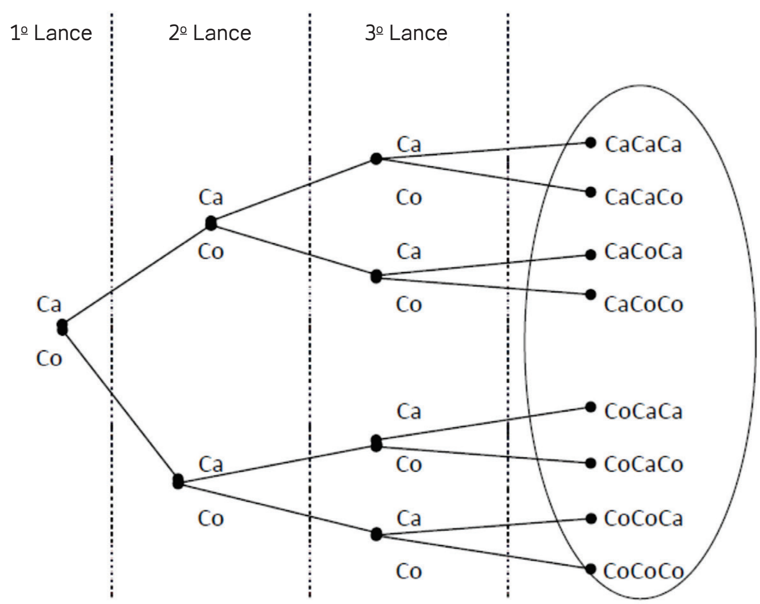
Experiência aleatória designa uma situação à qual estejam associados, de forma não controlada, dois ou mais resultados possíveis.O conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória é chamado de **espaço amostral**.

Os espaços amostrais podem ser discretos ou contínuos consoante os seus elementos sejam numeráveis ou não. Os espaços discretos podem ser finitos ou infinitos. O espaço amostral associado a uma experiência aleatória depende da forma como a experiência é avaliada, isto é, depende daquilo que está sendo observado.

Exemplo 12: Considere uma experiência constituída pelo lançamento de uma moeda ao ar por três vezes consecutivas.

Se o resultado for avaliado pelo número de "Ca" {caras} obtido, o espaço amostral é constituído pelo conjunto {0, 1, 2, 3}.

Se o resultado for avaliado pela sequência de "Ca"(caras) e "Co" (coroas), o espaço amostral é constituído por oito resultados possíveis.



Árvore de resultados　　　　Diagrama de VENN

O diagrama de Venn é utilizado na representação de resultados sequenciais. No entanto, é difícil lidar com espaços amostrais dessa maneira, é muito mais fácil trabalhar com quantidades numéricas. Neste exemplo específico poderíamos estar interessados no número de “caras” nas 3 jogadas, e seria interessante definir uma função que associasse um número a cada resultado no **espaço amostral**.

Seja *S* o espaço amostral e *X* uma função que “lpega” elementos deste espaço (resultados da experiência) e os leva num subconjunto de números reais. Essa função *X* é chamada de variável aleatória.

6.1 Definição (variável aleatória)

Considere uma experiência aleatória com espaço amostral *S*. Seja *c* um elemento de *S*. Uma variável aleatória *X* é uma função que associa um único número real $X(c) = x$ a cada elemento do espaço amostral *S*. O espaço de *X* é o conjunto de números reais $\aleph = \{x : x = X(c) \forall c \in S\}$.

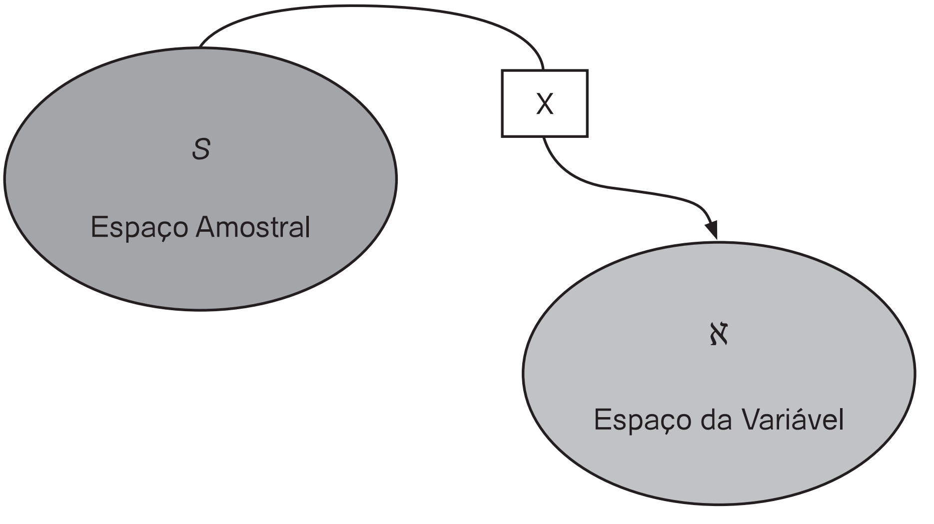


Figura 4 - Espaço amostral espaço da variável aleatória

Seja X uma variável aleatória definida num espaço amostral S e seja $\rightarrow$ o espaço de X. Seja A um subconjunto de $\rightarrow$ e s um subconjunto de S.

Já definimos a probabilidade de um evento s $\rightarrow$ S e, agora, gostaríamos de estender essa definição e falar da probabilidade de um evento A $\rightarrow$ $\rightarrow$. Ou seja, o nosso objetivo agora é definir probabilidades a partir de valores possíveis da variável aleatória, sem referência explícita aos pontos do espaço amostral que deram origem àqueles valores da variável aleatória.

Na verdade, o estudo de probabilidades começa a se aprofundar com a definição de variável aleatória, que será o objeto principal das nossas atenções a partir de agora. A noção de variável aleatória é tão importante que, frequentemente, nem nos preocupamos com o que está "por trás" delas, isto é, na prática, muitas vezes, ignoramos o espaço amostral.

Como definir $P(X \to A)$?

A maneira mais natural de fazer isso é associar a probabilidade do evento $X \to A$ à probabilidade do evento S no espaço amostral S.

Ou seja, se $A \to \to$, definimos

$P(X \to A) = P(S)$, onde $S = \{c \to S: X(c) \to A\}$

Assim, a variável aleatória X é uma função que "transporta" a probabilidade de um espaço amostral S para um espaço $\to$ de números reais.

Exemplo 13: Jogamos uma moeda duas vezes e estamos interessados no número de "caras" observado. O espaço amostral é

S = {onde *c* = CaCa, CaCo, CoCa, CoCo}.

Podemos definir uma variável aleatória *X* como

$$X(c) = \begin{cases} 0 sec = CaCa \\ 1 sec = CaCo \text{ ou } CoCa \\ 2 sec = CoCo \end{cases}$$

Ou seja, X é o número de caras nas duas jogadas. O espaço da variável aleatória X é $\to = \{0,1,2\}$, um subconjunto dos inteiros.

Seja $A = \{x \to \to: x = 1\}$. Como definir a probabilidade do evento A? É só olhar para o subconjunto S do espaço amostral cujos elementos c são tais que $X(c) \to A$, ou seja, $X(c) = 1$ aqui.

Nesse caso, S = {CaCo, CoCa}, o evento "uma cara em duas jogadas", pois X{CaCo}=1 e X{CoCa} = 1. Assim,

$P\{A\} = P\{X \to A\} = P\{S\} = P\{X=1\}$

6.2 Definição de variável aleatória discreta e densidade de probabilidade discreta

Seja X uma variável aleatória cujo espaço é o conjunto unidimensional $\to$. Dizemos que X é uma variável aleatória discreta se o número de valores possíveis de X é finito ou contável.

Por exemplo, se os valores possíveis de X são {0, 1, 2, ...} ou {2, 4, 6, 8, ...}, ou ainda {1/3, 1/4, 1/5, ..., 1/n, ...}, X é uma variável aleatória discreta. A partir da definição de variável aleatória discreta, podemos definir a densidade de probabilidade discreta, que é uma função da variável aleatória X que nos permite calcular probabilidades para todos os valores de X.

Seja *f*(x) uma função tal que

i) $f(x) \geq 0 \forall x \in \aleph$

ii) $\sum_{x \in \aleph} f(x) = 1$

iii) $\forall A \, \alpha \, \lambda$, $P(A) = P(X \in A) = \sum_{x \in A} f(x)$

Ou seja, esta última propriedade nos permite calcular a probabilidade de qualquer evento envolvendo a variável aleatória X. Para qualquer evento A definido no espaço da variável aleatória X, a probabilidade de A é apenas o somatório de todos aqueles valores de x que compõem A.

f(x) é chamada densidade de probabilidade da variável aleatória X, e dizemos que X é uma variável aleatória discreta.

6.3 Definição de variável aleatória contínua e densidade de probabilidade contínua

Seja *X* uma variável aleatória com espaço *A* tal que:

i) $f(x) \geq 0 \forall x \in \aleph$

ii) *f*(x) tem no máximo um número finito de descontinuidades em qualquer subintervalo finito de $\rightarrow$.

iii) Seja A $\subseteq \rightarrow$. A probabilidade de X $\rightarrow$ A é:

$$P(X \in A) = P(A) = \int_A f(x)dx$$

A variável aleatória *X* é uma variável aleatória contínua e f(*x*) é sua densidade de probabilidade.

Seja *X* uma variável aleatória qualquer (contínua ou discreta). A função de distribuição da variável aleatória *X* é definida como

F(x) = P(X   x)

Seja f(x) a densidade de probabilidade de X, então

$$F(x) = \sum_{a \leq x} f(x)$$

Se X é variável aleatória discreta ou

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Se X é variável aleatória contínua.

Propriedades da Função de Distribuição

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ pois $0 \leq Pr\ (X \leq x) \leq 1$.

ii) $F(x)$ é uma função não decrescente.

iii) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$

iv) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

v) Se *X* é uma variável aleatória contínua, sua função de distribuição é contínua. Se *X* é discreta, F(*x*) é uma função contínua à direita, isto é, a função de distribuição apresenta “pulos” (descontinuidades) que só são “sentidos” quando nos aproximamos do ponto onde existe o “pulo” pela esquerda.

6.4 Relação entre a função densidade e a função de distribuição

Considere uma variável aleatória contínua com densidade f(*x*) e função de distribuição F(*x*). Então

$$P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \therefore$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Ou seja, a densidade é a derivada da função de distribuição.