2
LIVRO

4
AULA

Produto de Vetores - Parte II

META

Apresentar o produto vetorial entre vetores e suas propriedades.

OBJETIVOS

Reconhecer e efetuar produtos vetoriais entre vetores.

Reconhecer propriedades ligadas aos produtos vetoriais entre vetores, como a área de um paralelogramo que tem como lados dois vetores e o produto misto com sua representação geométrica.

PRÉ-REQUISITOS

Para que você possa ter um bom desempenho nesta aula, é necessário que saiba reconhecer e efetuar produtos escalares entre vetores, além de interpretá-los geometricamente.

4.1 Introdução

Olá! Estamos aqui para mais um encontro em que transitaremos pelos produtos entre vetores. Na aula passada, introduzimos o conceito de produto escalar entre vetores e suas propriedades. Além disso, aplicamos esse produto para encontrar, por exemplo, o cosseno do ângulo entre eles.

Em continuidade ao tema da aula anterior, em que definimos e vimos algumas aplicações do produto escalar (ou produto interno), nesta aula estudaremos outro produto, isto é, o vetorial, que, diferentemente do produto escalar, permite a conversão de dois vetores no espaço em outro vetor. Esta operação tem um significado geométrico interessante que será mostrado no transcorrer da aula. Você conhecerá, também, o produto misto cujo valor absoluto representamos como $1/6$ do volume de um tetraedro.

4.2 Produto vetorial

Nesta primeira seção, vamos apresentar a você o produto vetorial. Seu resultado difere do produto escalar por ser um vetor e não um escalar. Seu uso principal associa-se ao fato de o resultado de um produto vetorial ser sempre perpendicular a ambos os vetores originais. Assim, comecemos pela sua definição e, logo em seguida, você verá que há algumas formas diferentes de representá-lo.

Definição 4.20 (Produto vetorial)**.** Dados os vetores

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$$

(ou $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$) e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ (ou $\vec{u} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$) tomados nesta ordem, chamamos de **produto vetorial** dos vetores

$\vec{u}$ e $\vec{v}$, os vetores

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

ou simplesmente,

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2 \, , \, z_1 x_2 - x_1 z_2 \, , \, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

Outra maneira de escrevermos o produto vetorial, muito útil e fácil de usar, é

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

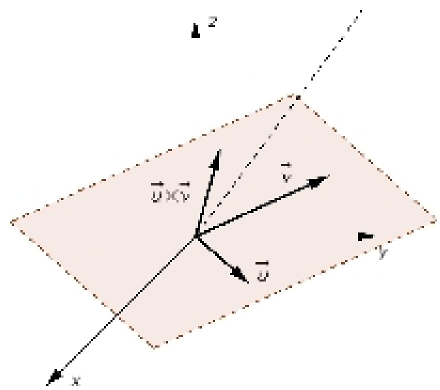
ou

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Observação 6. Chamamos a sua atenção neste ponto, caro aluno, pois é fundamental perceber que $\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$ ou $\langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$, pois (sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos e não colineares)

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = {} & x_1(y_1 z_2 - z_1 y_2) + y_1(z_1 x_2 - x_1 z_2) + z_1(x_1 y_2 - y_1 x_2) \\ = {} & x_1 y_1 z_2 - x_1 z_1 y_2 + y_1 z_1 x_2 \\ & -y_1 x_1 z_2 + z_1 x_1 y_2 - z_1 y_1 x_2 \\ = {} & 0 \end{aligned}$$

O mesmo ocorre para $\langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$. Isto significa que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais a $\vec{u} \times \vec{v}$, isto é, $\vec{u} \times \vec{v}$ não está no mesmo plano que $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Portanto, não faz sentido estudarmos produtos vetoriais entre vetores no plano, pois não seria possível encontrar o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$.



Exemplo 4.2.1. Sejam $\vec{u} = (5, 4, 3)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$ vetores em $\mathbb{R}^3$. Deste modo,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4-0)\vec{i} + (3-5)\vec{j} + (0-4)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k} = (4, -2, -4).$$

Veja ainda que

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (0-4)\vec{i} + (5-3)\vec{j} + (4-0)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \times \vec{u} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} = (-4, 2, 4).$$

Portanto, neste exemplo, $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$. Mas será que esta propriedade é válida para quaisquer dois vetores em $\mathbb{R}^3$?

Para que você possa verificar se isto é possível, acompanhe o nosso raciocínio no próximo tópico.

4.3 Propriedades do produto vetorial

Agora que você sabe o que é um produto vetorial, vamos apresentar-lhe as propriedades desse produto.

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

(V$_1$) $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$, qualquer que seja $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. *De fato, pela definição temos o seguinte*

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \\
&= (y_1 z_1 - z_1 y_1)\vec{i} + (z_1 x_1 - x_1 z_1)\vec{j} + (x_1 y_1 - y_1 x_1)\vec{k} \\
&= (0)\vec{i} + (0)\vec{j} + (0)\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{u} = (0,0,0) = \vec{0}.$$

Como conseqüência disso, temos que $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$.

(V$_2$) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$. *De fato, veja que*

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\
&= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} \\
&= (y_2 z_1 - z_2 y_1)\vec{i} + (z_2 x_1 - x_2 z_1)\vec{j} + (x_2 y_1 - y_2 x_1)\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{u} = -(\vec{v} \times \vec{u}), \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

A partir desta propriedade, temos como resultado que

$$\begin{aligned}\vec{i}\times\vec{j} &= -(\vec{j}\times\vec{i})\\ \vec{j}\times\vec{k} &= -(\vec{k}\times\vec{j})\\ \vec{i}\times\vec{k} &= -(\vec{k}\times\vec{i})\end{aligned}$$

(V$_3$) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$. *De fato, se* $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ *e* $\vec{w}=(x_3,y_3,z_3)$, *verificamos que* $\vec{v}+\vec{w}=(x_2+x_3,y_2+y_3,z_2+z_3)$, *e assim,*

$$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2+x_3 & y_2+y_3 & z_2+z_3\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = {} & (y_1(z_2+z_3)-z_1(y_2+y_3))\vec{i}+\\ & +(z_1(x_2+x_3)-x_1(z_2+z_3))\vec{j}+\\ & +(x_1(y_2+y_3)-y_1(x_2+x_3))\vec{k}\\ \Rightarrow \vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = {} & ((y_1z_2-z_1y_2)+(y_1z_3-z_1y_3))\vec{i}+\\ & +((z_1x_2-x_1z_2)+(z_1x_3-x_1z_3))\vec{j}+\\ & +((x_1y_2-y_1x_2)+(x_1y_3-y_1x_3))\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\\ &\underbrace{\Big((y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}\Big)}_{\vec{u}\times\vec{v}}+\\ &+\underbrace{\Big((y_1z_3-z_1y_3)\vec{i}+(z_1x_3-x_1z_3)\vec{j}+(x_1y_3-y_1x_3)\vec{k}\Big)}_{\vec{u}\times\vec{w}}\end{aligned}$$

$$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

Portanto, $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w},\ \forall\,\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$.

(V$_4$) $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$.

Exercício 4.3.1. A verificação desta propriedade fica como exercício.

(V$_5$) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, um dos vetores é nulo ou se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares. *De fato, se $\vec{u} = \vec{0}$, então,*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

E se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não forem ambos nulos, mas colineares, isto é, $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, então

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{u}) \underbrace{=}_{\text{por } (V_4)} \lambda(\vec{u} \times \vec{u})$$

Mas como sabemos da propriedade V_1, obtemos $\lambda(\vec{u} \times \vec{u}) = \lambda(\vec{0}) \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

(V$_6$) $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal simultaneamente aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. *Então, se $\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$, $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal simultaneamente aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

Perceba que

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = x_1 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

e assim, obtemos

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Pois neste caso o determinante tem duas linhas iguais. Fazendo o mesmo para $\langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle$, constatamos (de modo análogo) que

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal simplesmente aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Um triedro $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v} \times \vec{u}\}$ (supondo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam não colineares) diz-se **positivamente orientado** (em relação ao sistemas de eixos fixados, no caso, xyz) quando é positivo o determinante cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos vetores dados, na ordem em que são listados.

(V_7) O triedro $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v} \times \vec{u}\}$ é positivamente orientado. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, tal que*

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ y_1 z_2 - z_1 y_2 & z_1 x_2 - x_1 z_2 & x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{vmatrix}$$

em que $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Assim, obtemos

$$\alpha = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = |\vec{u} \times \vec{v}|^2 > 0.$$

.

Exercício 4.3.2. Mostre a igualdade entre o determinante e o número real $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle$ da propriedade (V_7).

(V_8) (Identidade de Lagrange)

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \cdot \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \tag{4.1}$$

De fato,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Portanto,

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2$$

Mas, temos que

$$|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \quad e$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2$$

. Efetuando as operações indicadas, verificamos que $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$.

(V_9) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \operatorname{sen} \theta. \tag{4.2}$$

De acordo com a identidade de Lagrange, na equação (4.1), temos

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \, |\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$$

ou seja,

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \, |\vec{v}|^2 - (|\vec{u}| \, |\vec{v}| \, \cos \theta)^2$$

$$\Downarrow$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \, |\vec{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \, |\vec{v}|^2 (\operatorname{sen}^2 \theta)$$

pois $1 - \cos^2 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta$. *E sabemos que*

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 \, |\vec{v}|^2 (\operatorname{sen}^2 \theta)$$

$$\Downarrow$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|(\operatorname{sen}\theta)$$

.

Tal qual na propriedade (V_7), percebemos que os vetores da base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ são válidos.

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

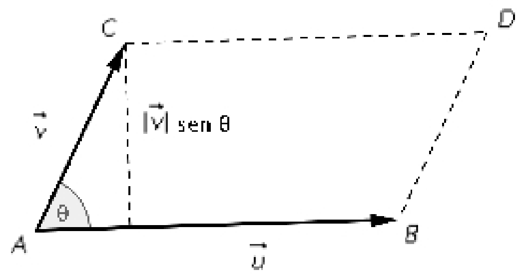
e para as outras combinações:

$\vec{j} \times \vec{k}$	$=$	$\vec{i}$
$\vec{k} \times \vec{i}$	$=$	$\vec{j}$

percebemos ainda que

$\vec{j} \times \vec{i}$	$=$	$-\vec{k}$
$\vec{k} \times \vec{j}$	$=$	$-\vec{i}$
$\vec{i} \times \vec{k}$	$=$	$-\vec{j}$

No paralelogramo $ABCD$ a seguir, observamos que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. A altura do paralelogramo relativa aos lados CD e AB é dada por $|\vec{v}|\operatorname{sen}\theta$.



Assim, a área do paralelogramo é dada por

$$\text{Área}_{ABCD} = \underbrace{|\vec{u}|}_{\text{base}} \cdot \underbrace{(|\vec{v}|\ \text{sen}\,\theta)}_{\text{altura}},$$

Portanto,

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = \text{Área}_{ABCD}}$$

Exemplo 4.3.1. Determine o vetor $\vec{w}$, tal que $\vec{w}$ seja ortogonal ao eixo$-y$ e $\vec{u} = \vec{w} \times \vec{v}$, sendo $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

Como $\vec{w} \perp$ eixo$-y$ deve ser da forma $\vec{w} = (x, 0, z)$, assim, $\vec{u} = \vec{w} \times \vec{v}$ equivale a

$$(1, 1, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} & \vec{k} \\ x & 0 & z \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

ou ainda, $(1, 1, -1) = (z, -x + 2z, -x)$. Basta-nos solucionar os sistemas

$$\begin{cases} z & = & 1 \\ -x + 2z & = & 1 \\ -x & = & -1 \end{cases}$$

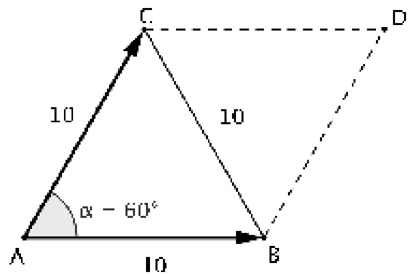
cuja solução é $x = 1$ e $z = 1$. Logo, $\vec{w} = (1, 0, 1)$.

Exemplo 4.3.2. Seja um triângulo eqüilátero ABC de lado 10. Calcular $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

Veja que

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|\ \text{sen}\,\alpha$$

em que α é o ângulo interno de ABC no vértice A.



Como $\alpha = 60^o$, tem-se que $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = (10) \cdot (10)\ \mathrm{sen}\, 60^o$

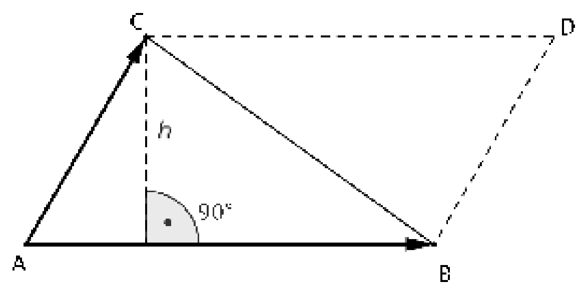
$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 100\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 50\,\sqrt{3}$$

Mas como o valor $50\sqrt{3}$ representa a área do paralelogramo, portanto a área do triângulo é a metade, ou seja, $\boxed{\text{Àrea}_{ABC} = 25\sqrt{3}}$.

Exemplo 4.3.3. Dados os pontos $A = (2, 1, 1)$, $B = (3, -1, 0)$ e $C = (4, 2, -2)$, vamos determinar:

(i) a área do triângulo ABC;

(ii) a altura do triângulo relativa ao vértice C.



Resolução do exemplo:

(i) A partir do triângulo ABC podemos construir o paralelogramo $ABCD$, cuja área é o dobro da área do triângulo. Assim, com base nos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, temos

$$\text{A}_{\triangle} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$$

Mas $\overrightarrow{AB} = (1, -2, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 1, -3)$ e

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = |(7, 1, 5)|$$

Logo,

$$\mathrm{A}_{\triangle} = \frac{1}{2}\sqrt{49 + 25 + 1} = \frac{5}{2}\sqrt{3}\text{u.a.}$$

(ii) Já para obtermos a altura do triângulo indicado na figura, basta lembrarmos que

$$\mathrm{A}_{ABCD} = (\text{base})(\text{altura}) = b\, h.$$

Assim, como a base b no triângulo é dada por $|\overrightarrow{AB}|$, obtemos

$$h = \frac{\mathrm{A}}{b} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{75}}{|(1, -2, -1)|} = \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ u.c.}$$

Definição 4.21. Chama-se **produto misto** dos vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, tomados nesta ordem, o número real

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Também denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

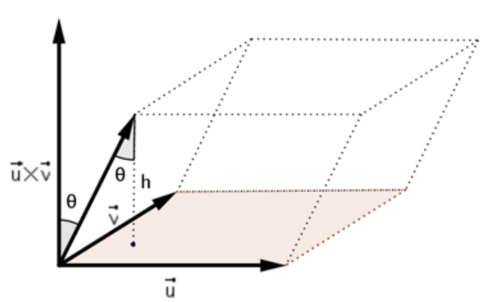


Figura 4.42: Produto misto dado pelos vetores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AD}$.

Sejam A, B, C e D pontos não colineares e os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ também não colineares. Esses vetores determinam um paralelepípedo como na figura (4.42), cujo volume é

$$V = (\text{Área da base}) \cdot (\text{altura}).$$

Note que a altura é

$$\begin{aligned} h = & \ |\vec{w}|. \cos\theta \\ h = & \ |\vec{w}| \frac{\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \\ h = & \ \frac{\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \end{aligned}$$

e que a área da base é dada por $\mathrm{A}_{\text{base}} = |\vec{u} \times \vec{v}|$. Logo

$$V = h \cdot \mathrm{A}_{\text{base}} \ \Rightarrow V = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

Se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, podemos reescrever o volume do paralelepípedo da seguinte forma

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle|$$

ou seja, $V = |\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle|$.

Exemplo 4.3.4 (Volume do Tetraedro)**.** O volume do tetraedro (como ilustrado na figura (4.42)) é dado por

$$V_t = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \right|$$

e assim, se um tetraedro é formado pelos pontos $A = (1, 2, -1)$, $B = (5.0, 1)$, $C = (2, -1, 1)$ e $D = (6, 1, -3)$ como vértices, temos que

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 36 \Rightarrow V_t = \frac{1}{6}|36|$$

Portanto, o volume do tetraedro é $V_t = 6$ u.v. .

4.4 Resumo

Nesta aula, conhecemos a definição vetorial entre vetores e suas propriedades. Conhecemos também a possibilidade de usar o produto vetorial para representar a área de um paralelogramo. Definimos o produto misto e o representamos geometricamente como o volume do paralelogramo formado por três vetores não todos coplanares.

4.5 Atividades

1. Se $\vec{u} = (3, -1, -2)$, $\vec{v} = (2, 4, -1)$ e $\vec{w} = (-1, 0, 1)$, determine:

   (a) $|\vec{u} \times \vec{v}|$;

   (b) $2\vec{v} \times 3\vec{v}$;

   (c) $\vec{u} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}$;

   (d) $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$.

2. Determine o vetor $\vec{x}$, tal que $\langle \vec{x}, (1, 4, -3) \rangle = -7$ e $\vec{x} \times (4, -2, 1) = (3, 5, -2)$.

3. Dados os vetores $\vec{u} = (3, 1, 1)$, $\vec{v} = (-4, 9, 3)$ e $\vec{w} = (1, 2, 0)$, determine $\vec{x}$ de modo que $\vec{x} \perp \vec{w}$ e $\vec{x} \times \vec{u} = -\vec{v}$.

4. Encontre um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos P, Q e R e calcule a área do triângulo PQR.

   (a) $P = (3, 0, 0), Q = (0, 3, 0), R = (0, 0, 2)$

   (b) $P = (2, 3, 0), Q = (0, 2, 1), R = (2, 0, 2)$

5. Fixando o sistema de coordenadas com a base canônica no espaço, mostre que para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{t}$ vale

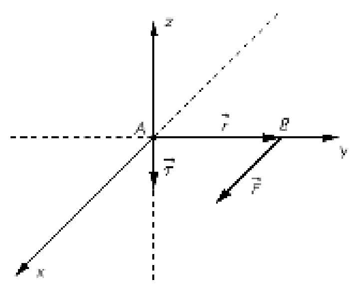
$$\begin{vmatrix} \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{t}\, \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{t}\, \rangle \end{vmatrix} = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \times \vec{t}\, \rangle.$$

6. (Aplicação Física) O produto vetorial é uma importante ferramenta utilizada na Física. Entre algumas das suas aplicações, podemos citar o *torque*. A equação para o cálculo do torque é

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

em que $|\vec{r}|$ é a distância do ponto de aplicação da força $\vec{F}$ ao eixo de rotação a que o corpo está vinculado.

O **torque** é uma grandeza vetorial representada pela letra grega τ, que está relacionada à posibilidade de um corpo sofrer uma torção ou alterar seu movimento de rotação.



- Calcule o torque sobre a barra $\overline{AB}$ em que $\overrightarrow{AB} = \vec{r} = 2\vec{j}$ em metros, $\vec{F} = 10\vec{i}$ (em newtons) e o eixo de rotação é o eixo$-z$.

4.6 Comentário das atividades

Ao resolver as atividades 1, 2 e 3, você entendeu a definição de produto vetorial. Quanto às atividades 4, 5 e 6, se as concluiu, você trabalhou as propriedades do produto vetorial. Caso não tenha obtido sucesso na resolução das questões desta aula, lembre-se sempre de que você dispõe de um tutor para tirar suas dúvidas. Faço bom proveito deste recurso.

4.7 Referências

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica.* São Paulo, Makron Books, 1987.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro, IMPA, 2005.

BOLDRINI, José Luiz, *'Algebra Linear* . São Paulo, Harbra, 1980.