2
LIVRO

5
AULA

A Reta

META

Expor o conceito das equações de retas no plano e espaço e suas propriedades geométricas.

OBJETIVOS

Identificar a equação da reta nas formas vetorial, paramétrica, simétrica e reduzida.

Reconhecer as propriedades geométricas do paralelismo, retas aos planos e eixos geométricos.

PRÉ-REQUISITOS

Para que você possa ter um bom desempenho nesta aula, é necessário que saiba reconhecer e efetuar produtos escalares e vetoriais entre vetores, além de interpretar geometricamente esses produtos.

5.1 Introdução

Olá! Aos poucos estamos avançando nesta nossa caminhada pela Geometria Analítica. Na aula passada, aprendemos o que é um produto vetorial entre vetores e suas propriedades. Além disso, verificamos que é possível utilizar esse produto para representar a área de figuras geométricas como o paralelogramo. Também apresentamos a você a definição de produto misto, sua representação geométrica e seu valor absoluto.

Nesta aula, vamos aprofundar nossos estudos sobre as retas. Acredito que você já deve ter algum conhecimento a respeito delas, pois já estudou um pouco de Geometria Analítica na 3ª série do Ensino Médio. Assim, vamos definir algumas formas de representá-las no plano e também no espaço.

Em um dos postulados de sua obra "Os Elementos", Euclides nos mostra que dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contêm. Munidos deste pensamento, podemos não apenas confirmar mas também definir equações vetoriais de retas no plano e no espaço, além da equação paramétrica e reduzida da reta. Estudaremos as propriedades do paralelismo entre retas, entre retas e eixos coordenados e entre retas e planos coordenados, além de ângulos constituídos entre retas.

5.2 Equação vetorial da reta

Consideremos um ponto $A = (x_1, y_1, z_1)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Seja r a reta que passa pelo ponto A e tem a direção de $\vec{v}$. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence à reta r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$, isto é,

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v} \tag{5.1}$$

para algum $t \in \mathbb{R}$.

A partir da equação (5.1), verificamos que

$$P - A = t\vec{v}$$

ou ainda

$$P = A + t\vec{v}, \tag{5.2}$$

que em coordenadas fica

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c) \tag{5.3}$$

Qualquer uma das equações (5.1),(5.2) ou (5.3) é denominada **equação vetorial** de r, o vetor $\vec{v}$ é chamado **vetor diretor** da reta r e t é denominado o **parâmetro**.

Exemplo 5.2.1. A reta r que passa por $A = (1, -1, 4)$ e tem a direção de $\vec{v} = (2, 3, 2)$ tem equação vetorial de acordo com (5.3):

$$r:\ (x, y, z) = (1, -1, 4) + t(2, 3, 2)$$

em que (x, y, z) representa um ponto de r arbitrário. Para obtermos a reta, basta-nos fazer o parâmetro t variar sobre os números reais.

$$\begin{array}{lll} t = 1 & \Rightarrow & P_1 = (1, -1, 4) + 1 \cdot (2, 3, 2) = (2, 3, 6) \\ t = 0 & \Rightarrow & P_0 = (1, -1, 4) \\ t = -1 & \Rightarrow & P_{-1} = (-1, -4, 2) \\ t = 3 & \Rightarrow & P_3 = (7, 8, 10) \end{array}$$

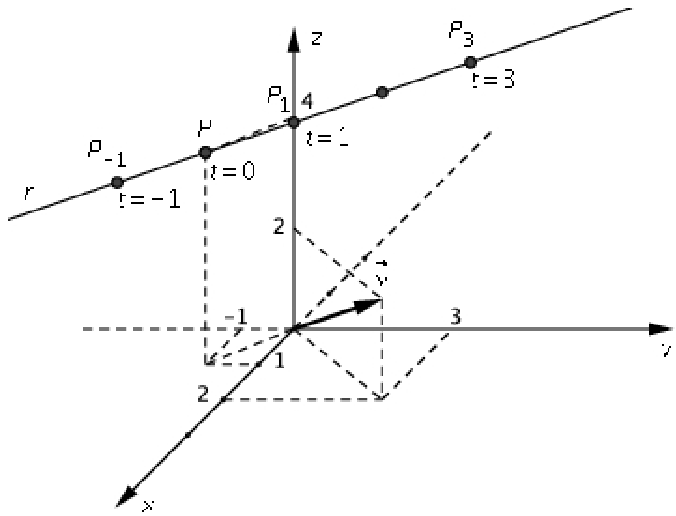

Figura 5.43: $P = A + t\vec{v}$.

Observação 7. A equação que representa a reta r no exemplo anterior não é única. Existem, na verdade, infinitas equações, pois basta tomar outro ponto de r em vez do ponto A, ou outro vetor qualquer não nulo que seja múltiplo de $\vec{v}$, por exemplo,

$$(x, y, z) = (1, -1, 4) + t(4, 6, 4)$$

é outra equação vetorial de r em que se utilizou o vetor $2\vec{v} = (4, 6, 4)$ como vetor diretor em vez de $\vec{v} = (2, 3, 2)$.

5.3 Equações paramétricas da reta

Da equação vetorial da reta

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

ou ainda

$$(x, y, z) = (x_1 + ta, x_2 + tb, x_3 + tc),$$

pela condição de igualdade, obtém-se

$$\begin{cases} x = & x_1 + at \\ y = & y_1 + bt \\ z = & z_1 + ct \end{cases} \tag{5.1}$$

As equações (5.1) são chamadas **equações paramétricas** da reta.

Exemplo 5.3.1. A reta r que passa pelo ponto $A = (3, -4, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = (2, 1, -3)$, de acordo com (5.1), tem equações paramétricas

$$r : \begin{cases} x = & 3 + 2t \\ y = & -4 + t \\ z = & 2 - 3t \end{cases}$$

5.4 Reta definida por dois pontos

A reta definida pelos pontos A e B é a reta que passa por A (ou por B) e tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Exemplo 5.4.1. Escrever equações paramétricas da reta r que passa por $A = (3, -1, -2)$ e $B = (1, 2, 4)$.
Tomando o ponto A e o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 3, 6)$, obtemos

$$r : \begin{cases} x = & 3 - 2t \\ y = & -1 + 3t \\ z = & -2 + 6t \end{cases}$$

Podemos, ainda, usando a equação paramétrica da reta, definir uma parametrização para um segmento de reta.

Exemplo 5.4.2 (Equações Paramétricas de um Segmento de Reta)**.** Consideremos a reta r do exemplo (5.4.1) e nela o segmento AB (origem A e extremidade B). As equações vetoriais dos segmentos AB e BA com $0 \leq t \leq 1$ são

$$P = A + t(B - A) \quad \text{e} \tag{5.1}$$

$$P = B + t(A - B), \tag{5.2}$$

respectivamente, em que $P = (x, y, z)$ é um ponto arbitrário na reta r.

Note que

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow P = A + 0 \cdot (B - A) = A \\ t = 1 \quad &\Rightarrow P = A + 1 \cdot (B - A) = B \end{aligned}$$

para o segmento AB, enquanto para o segmento BA temos

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow P = B + 0 \cdot (A - B) = B \\ t = 1 \quad &\Rightarrow P = B + 1 \cdot (A - B) = A \end{aligned}$$

Podemos ainda reescrever a equação (5.1) de modo equivalente por

$$P = tB + (1 - t)A. \tag{5.3}$$

O mesmo ocorre para (5.2), tal que $P = tA + (1 - t)B$.

5.5 Equações simétricas da reta

Das equações paramétricas

$$x = x_1 + at \qquad y = y_1 + bt \qquad z = z_1 + ct$$

supondo que $abc \neq 0$, temos

$$t = \frac{x - x_1}{a} \qquad t = \frac{y - y_1}{b} \qquad t = \frac{z - z_1}{c}$$

Como cada ponto da reta é correspondente a um único valor de t, temos que

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \tag{5.1}$$

As equações (5.1) são denominadas **equações simétricas** da reta que passa pelo ponto $A = (x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

Exemplo 5.5.1. A reta que passa pelo ponto $A = (3, 0, -5)$ e tem direção do vetor $\vec{v} = (2, 2, -1)$ tem equações simétricas

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z + 5}{-1}$$

Para obtermos os outros pontos da reta, basta atribuirmos um valor a uma das variáveis. Por exemplo, para $x = 5$, temos

$$\frac{5 - 3}{2} = 1 = \frac{y}{2} = \frac{z + 5}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{2} & = 1 \\ \dfrac{z + 5}{-1} & = 1 \end{cases}$$

e assim, $y = 2$ e $z = -6$. Portanto, o ponto $(5, 2, -6)$ pertence à reta r.

5.6 Equações reduzidas da reta

Da equação (5.1), temos que

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \quad \text{e} \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{z - z_1}{c}$$

e assim podemos fazer

$$y = y_1 + \frac{b}{a}(x - x_1) \quad \text{e} \quad z = z_1 + \frac{c}{a}(x - x_1).$$

Ou seja, podemos expressar y e z em função da variável x, e assim constatamos que y e z podem ser da seguinte forma:

$$y = mx + n \quad \text{e} \quad z = px + q.$$

Deste modo, um ponto da reta pode ser encontrado usando $P = (x, mx + n, px + q)$, em que

$$m = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad n = y_1 - \frac{b}{a}x_1$$

$$p = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad q = z_1 - \frac{c}{a}x_1$$

Observação 8. O mesmo pode ser feito para qualquer das outras duas variáveis(y e z), desde que $abc \neq 0$.

Exemplo 5.6.1. Seja a reta r definida pelo ponto $A = (2, -4, -3)$ e pelo vetor diretor $\vec{v} = (1, 2, -3)$ e expressa pelas equações simétricas:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+3}{-3}$$

E assim, fazendo

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} \quad \text{e} \quad \frac{x-2}{1} = \frac{z+3}{-3}$$

$$\Rightarrow y = 2x - 8 \quad \text{e} \quad z = -3x + 3.$$

Desta forma, podemos encontrar todos os pontos da reta, pois eles obedecem a $P = (x, 2x - 8, -3x + 3)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, em que P é um ponto arbitrário na reta r.

ATENÇÃO

Apesar de todas as equações de reta no espaço ($\mathbb{R}^3$) definidas e ilustradas nos exemplos desta aula, podemos sempre reduzir a dimensão para o plano ($\mathbb{R}^2$), bastando-nos suprimir a variável z.

5.7 Paralelismo de retas relativo aos planos e eixos coordenados

5.7.1 Retas paralelas aos planos coordenados

Uma reta é paralela a um dos planos xy, xz ou yz se seus vetores diretores forem paralelos ao correspondente plano. Neste caso, **umas das componentes do vetor é nula.**

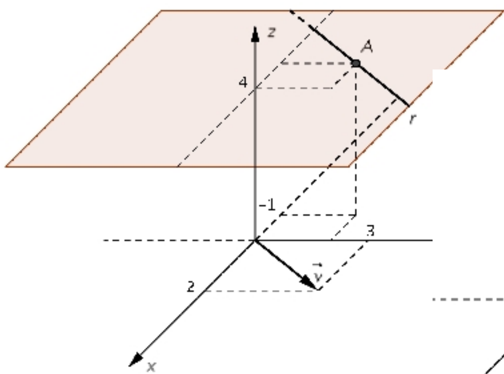

Figura 5.44: $r \parallel$ (plano $- xy$), em que $A = (-1, 2, 4)$ e $\vec{v} = (2, 3, 0)$ ($\vec{v}$//plano $- xy$.

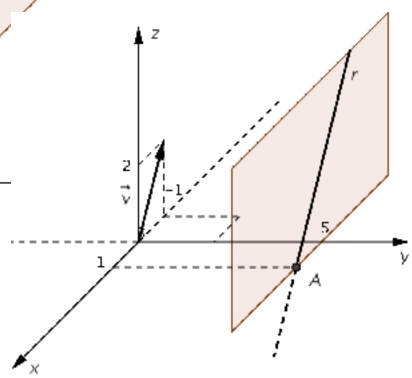

Figura 5.45: r passa por $A = (1, 5, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 2)$.

Perceba que para a figura (5.44) as equações paramétricas de r são:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$$

Mas no caso da figura (5.45), as equações paramétricas de r são:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 \\ z = 2t \end{cases}$$

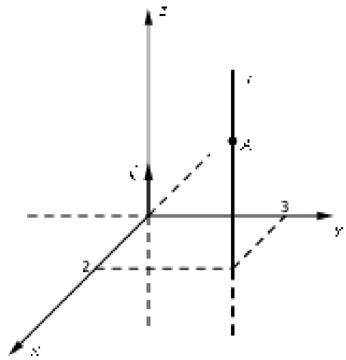

Figura 5.46: $A = (2, 3, 4)$ e $\vec{v} = (0, 0, 3)$.

5.7.2 Retas paralelas aos eixos coordenados

Uma reta é paralela a um dos eixos (eixo$-x$, eixo$-y$ ou eixo$-z$) se seus vetores diretores forem paralelos a $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ou a $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ou a $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Neste caso, **duas das componentes do vetor são nulas**.

Exemplo 5.7.1. Seja r a reta que passa por $A = (2, 3, 4)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (0, 0, 3)$. Como a direção de $\vec{v}$ é a mesma de $\vec{k}$, pois $\vec{v} = 3\vec{k}$, a reta r é paralela ao eixo eixo $- z$. A reta r pode ser representada pelas equações

$$\begin{cases} x &= 2 \\ y &= 3 \\ z &= 4 + 3t \end{cases}$$

As figuras (5.47) e (5.48) apresentam retas que passam por $A = (x_1, y_1, z_1)$ e são paralelas aos eixos eixo $- y$ e eixo $- x$, respectivamente. Suas equações são, de forma respectiva,

$$\begin{cases} x & = x_1 \\ y & = y_1 + k \cdot t \\ z & = z_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x & = x_1 + k \cdot t \\ y & = y_1 \\ z & = z_1, \end{cases}$$

com $k \in \mathbb{R}$ fixo e t parâmetro.

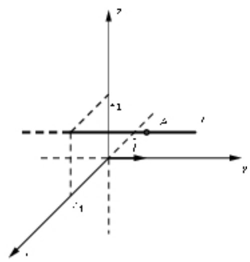

Figura 5.47: $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = \vec{j}$.

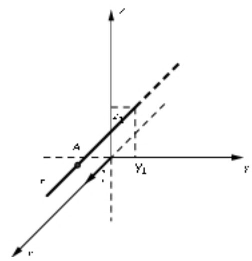

Figura 5.48: $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = \vec{k}$.

5.8 Mais algumas propriedades

Definição 5.22 (Ângulos de Duas Retas)**.** Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. Chama-se **ângulo de duas retas** r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2. Sendo θ este ângulo, então

$$\cos\theta = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|} \quad \text{com} \quad 0 \leq \theta \leq .\frac{\pi}{2} \tag{5.1}$$

Exemplo 5.8.1. Calcular o ângulo entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x & = 3 + t \\ y & = t \\ z & = -1 - 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

Perceba que os vetores diretores de r_1 e r_2 são, respectivamente, $\vec{v}_1 = (1, 1 - 2)$ e $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$. Da equação (5.1) podemos depreender que

$$\cos\theta = \frac{|\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle|}{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|} = \frac{|\langle (1,1,-2), (-2,1,1) \rangle|}{|(1,1,-2)|\,|(-2,1,1)|} = \frac{|-2+1-2|}{\sqrt{6}\,\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\theta = \text{arc cos}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}\text{rad} = 60^o$.

Definição 5.23 (Retas Ortogonais)**.** Sejam as retas r_1 e r_2 com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente. Então

$$r_1 \perp r_2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$$

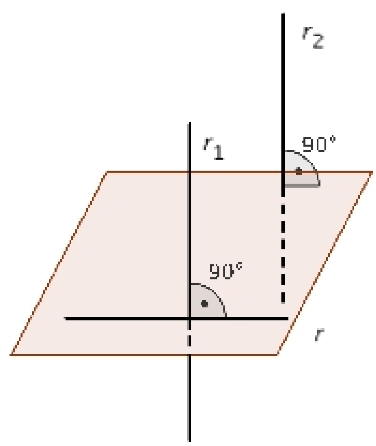

Figura 5.49: $r_1 \parallel r_2$, embora $r_1 \perp r$.

Duas retas ortogonais podem ser concorrentes ou não. No entanto, apesar de ambas as retas r_1 e r_2 da figura (5.23) serem ortogonais a r, não são concorrentes, a r e sim perpendiculares.

Exemplo 5.8.2. Portanto, as retas r_1 e r_2 dadas a seguir são ortogonais.

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= -2t+1 \\ z &= 4t \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x &= 3-2t \\ y &= 4+t \\ z &= t \end{cases}$$

Pois sendo $\vec{v}_1 = (1, -2, 4)$ e $\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$ vetores diretores de r_1 e r_2 e

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 1(-2) - 2(1) + 4(1) = 0,$$

as retas r_1 e r_2 são ortogonais.

Definição 5.24 (Retas ortogonais a Duas retas)**.** Sejam as retas r_1 e r_2 não paralelas, com as direções de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente, então toda reta r simultaneamente ortogonal a r_1 e r_2 terá a direção de um vetor $\vec{v}$, tal que

$$\begin{cases} \langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle &= 0 \\ \langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle &= 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Ao invés de assumirmos $\vec{v} \neq \vec{0}$ como uma solução particular de (5.2), poderíamos usar

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \tag{5.3}$$

como vetor diretor da reta r, bastando conhecer um de seus pontos.

Exemplo 5.8.3. Determinar equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (3, 4, -1)$ e é ortogonal às retas

$$r_1 : (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(2, 3, -4) \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x &= 5 \\ y &= t \\ z &= 1-t. \end{cases}$$

As direções de r_1 e r_2 são definidas pelos vetores $\vec{v}_1 = (2, 3, -4)$

e $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$. Assim,

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 2, 2)$$

Portanto, $r : \begin{cases} x &= 3 + t \\ y &= 4 + 2t \\ z &= -1 + 2t \end{cases}$

Exemplo 5.8.4 (Interseção de Duas Retas)**.** Vamos verificar se as retas r_1 e r_2 são concorrentes e, em caso afirmativo, determinar o ponto de interseção:

(a)

$$r_1 : \begin{cases} x &= 3 + h \\ y &= 1 + 2h \\ z &= 2 - h \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x &= 5 + 3t \\ y &= -3 - 2t \\ z &= 4 + t \end{cases}$$

(b)

$$r_1 : \begin{cases} y &= x \\ z &= 1 - x \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x &= -t \\ y &= 1 + t \\ z &= 2t \end{cases}$$

(c)

$$r_1 : \begin{cases} y &= x + 2 \\ z &= -x - 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}.$$

Se existir um ponto (x, y, z) comum às duas retas, suas coordenadas obedecem a todas as equações de r_1 e r_2.

Solução:(a) Igualando as expressões, temos que

$$\begin{cases} 3 + h &= 5 + 3t \\ 1 + 2h &= -3 - 2t \\ 2 - h &= 4 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h - 3t &= 2 \\ 2h + 2t &= -4 \\ -h - t &= 2 \end{cases}$$

Portanto, a solução é $h = t = -1$ e, assim, $(2, -1, 3)$ o ponto de interseção entre as retas r_1 e r_2.

Solução:(b) Fazendo as devidas substituições, temos o sistema

$$\begin{cases} 1+t & = -t \\ 2t & = 1+t \end{cases}$$

A partir disso, constatamos que $t = -\dfrac{1}{2}$ e $t = 1$. Portanto, como o sistema não tem solução, não existe um ponto de interseção.

Solução:(c) Observe que os vetores diretores de r_1 e r_2 são, respectivamente, $\vec{v}_1 = (1, 1, -1)$ e $\vec{v}_2 = (-2, -2, 2)$, ou seja, $\vec{v}_2 = -2\vec{v}_1$. Portanto, as retas são paralelas e não coincidentes, pois o ponto $(0, 2, -1) \in r_1$, mas $(0, 2, -1) \notin r_2$. E assim, não existe um ponto de interseção entre as retas r_1 e r_2.

5.9 Resumo

Nesta aula, definimos a equação vetorial da reta e, para isso, usamos apenas um vetor e um ponto do plano (ou do espaço) para defini-la. Conhecemos outra forma de representá-la, isto é, através de sua equação paramétrica, descrita por algumas equações que dependem de apenas um parâmetro. Com base na definição da equação vetorial da reta, definimos também uma reta por dois pontos e um segmento parametrizado. Conhecemos propriedades importantes das retas, como o paralelismo de retas relativo aos planos e eixos coordenados, e ângulos entre duas retas.

5.10 Atividades

1. Determine uma equação vetorial da reta r definida pelos pontos $A = (2, -3, 4)$ e $B = (1, -1, 2)$ e verifique se os pontos $C = (\frac{5}{2}, -4, 5)$ e $D = (-1, 3, 4)$ pertencem à r.

2. Dada a reta $r : (x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(2, -3, 0)$, escreva equações paramétricas de r.

3. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A e B nos seguintes casos:

   (a) $A = (1, -1, 2)$ e $B = (2, 1, 0)$;

   (b) $A = (0, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$.

4. O ponto $P = (m, 1, n)$ pertence à reta que passa por $A = (3, -1, 4)$ e $B = (4, -3, -1)$. Detemine P.

5. Verifique se os pontos $P_1 = (5, -5, 6)$ e $P_2 = (4, -1, 12)$ pertencem à reta

$$r : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}.$$

6. Determine o ponto da reta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z}{4}$ que tem:

   (a) abscissa 5;

   (b) ordenada 2.

7. Determine o ângulo entre as retas:

$$r_1 : \begin{cases} x & -2 - t \\ y & = t \\ z & = 3 - 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \frac{x}{2} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-1}{1}$$

8. Determine o valor de n para que seja de 30^o o ângulo entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} y &= nx + 5 \\ z &= 2x - 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$$

9. Verifique se as retas a seguir são concorrentes e, em caso afirmativo, encontre o ponto de interseção:

$$r_1 : \begin{cases} x &= 2 - t \\ y &= 4 - t \\ z &= -t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x &= -3 + 6h \\ y &= 1 + 7h \\ z &= -1 + 13h \end{cases}$$

5.11 Comentário das atividades

Se você entendeu a definição de equação vetorial da reta, então conseguiu fazer as atividades 1,2 e 3. Se resolveu a atividade 4, entendeu o conceito de equação de reta definida por dois pontos. Quanto às questões 5 e 6, pôde concluí-las? Então você compreendeu a definição de equação simétrica da reta. Se fez as atividades 7, 8 e 9, então entendeu os conceitos de equação paramétrica da reta, ângulo entre duas retas e interseção entre retas, respectivamente.

5.12 Referências

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica.* São Paulo, Makron Books, 1987.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro, IMPA, 2005.

BOLDRINI, José Luiz, *'Algebra Linear* . São Paulo, Harbra, 1980.