2
LIVRO

12
AULA

Formas Quadráticas

META

Introduzir o conceito de formas quadráticas no plano e exemplificá-las.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá reconhecer formas quadráticas planares, ou seja, com 2 variáveis; efetuar mudanças de coordenadas; e utilizar a equação característica associada a uma forma quadrática para obter os autovalores e autovetores com o intuito de melhor visualizar cônicas cuja classificação não seja imediata.

PRÉ-REQUISITOS

Ter compreendido as mudanças de coordenadas e as definições das cônicas (parábola, elipse e hipérbole)(Aulas 8, 10 e 11).

12.1 Introdução

Nesta aula, aplicaremos nossos conhecimentos de mudança de coordenadas e conheceremos outras ferramentas para ajudar na percepção de cônicas cuja classificação não seja imediata.

Dadas as funções $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \tag{12.1}$$

Iremos analisar o seu **conjunto de nível**.

Definição 12.35.

- Dizemos que o ponto $P = (x, y)$ **está no nível c** (ou **tem nível c**) em relação a ϕ quando $\phi(x, y) = c$, com $c \in \mathbb{R}$.
- O conjunto de pontos $P = (x, y)$ que obedecem a $\phi(x, y) = c$ é chamado de **conjunto de nível**.

Exemplo 12.1.1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x - 2y$, então o conjunto de nível dado por $f(x, y) = c$ são todas as retas da forma $x - 2y = c$.

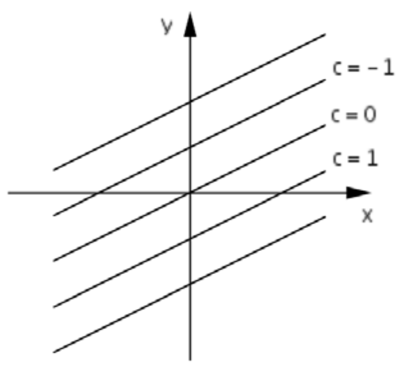

Figura 12.87: $x - 2y = c$.

Exemplo 12.1.2. Já para a função $\phi(x, y) = x^2 + y^2$, note que os conjuntos de nível de $\phi(x, y) = c$ com $c > 0$ são circunferências de raio $\sqrt{c}$.

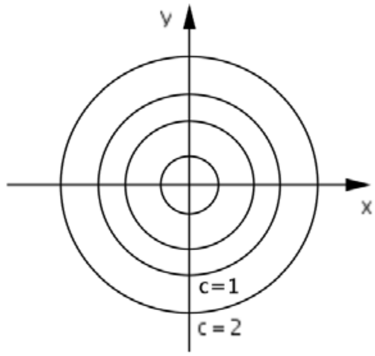

Figura 12.88: $x^2 + y^2 = c$.

Retornando à função (12.1), vamos analisar o caso particular em que $D = E = F = 0$, ou seja,

$$\phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2. \tag{12.2}$$

E assim, (12.2) é um polinômio de segundo grau homogêneo (todas as parcelas têm grau 2).

Definição 12.36 (Forma Quadrática)**.**
Os polinômios a duas variáveis na forma

$$\phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{12.3}$$

e $A, B, C \in \mathbb{R}$ são chamados de **Formas Quadráticas**.

Polinômios como em (12.3) são encontrados em problemas de Geometria Diferencial, Mecânica, Análise Matemática etc.

12.2 Mudando as coordenadas

Dada a forma quadrática ϕ, iremos introduzir novas coordenadas (s, t) obtidas por uma rotação dos eixos x e y de um ângulo θ e teremos

$$x = as - bt, \quad y = bs + at$$

Observação 19. Você deve recordar-se de que $a^2 + b^2 = 1$, com $a = \cos\theta$ e $b = \operatorname{sen}\theta$.

Assim,

$$\phi(x, y) = \phi\,(as - bt, bs + at) = A's^2 + 2B'st + C't^2$$

em que

$$A' = \quad Aa^2 + 2Bab + Cb^2 \tag{12.1}$$

$$B' = \quad -Aab + B(a^2 - b^2) + Cab \tag{12.2}$$

$$C' = \quad Ab^2 - 2Bab + Ca^2 \tag{12.3}$$

12.3 A equação característica, autovalores e autovetores

Para facilitar o nosso trabalho, vamos escolher um ângulo θ conveniente, de tal sorte que $B' = 0$. Primeiramente, vamos verificar se isso é possível.

Tomando

$$B' = a(Ba + Cb) - b(Aa + Bb)$$

(obtida apenas reescrevendo a equação (12.2), percebemos que $B' = 0$ se, e somente se, o vetor $\vec{w} = (Aa + Bb, Ba + Cb)$ for múltiplo de $\vec{u} = (a, b)$, isto é, se existir um $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$Aa + Bb = \lambda a \quad \text{e} \quad Ba + Cb = \lambda b,$$

ou ainda $(A - \lambda)a + Bb = 0$ e $Ba + (C - \lambda)b = 0$. Em outras palavras, constatamos que o vetor unitário (neste caso, $\vec{u} = (a, b)$ é o mesmo que $\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, assim $|\vec{u}| = 1$) $\vec{u} = (a, b)$ é uma solução (não-trivial, ou seja, não sendo ambos (a e b) nulos) dos sistemas:

$$\begin{cases} (A - \lambda)x + By &= 0 \\ Bx + (C - \lambda)y &= 0, \end{cases} \tag{12.1}$$

para algum λ convenientemente escolhido.

Observe que no sistema (12.1), colocando

$$x = -\frac{(C - \lambda)}{B}\, y \Rightarrow (A - \lambda)\left(-\frac{(C - \lambda)}{B}\, y\right) + By = 0$$
$$\Rightarrow y\left(B^2 - (A - \lambda)(C - \lambda)\right) = 0$$

Como estamos considerando soluções para o sistema que não sejam triviais, temos, então, que

$$B^2 - (A - \lambda)(C - \lambda) = 0,$$

o que resulta em:

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2 = 0 \tag{12.2}$$

e é conhecida como a **equação característica** da forma quadrática ϕ, ou da matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, chamada matriz de ϕ.

Note ainda que o discriminante da equação característica (12.2) é dado por

$$\Delta = (A + C)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (AC - B^2) = (A - C)^2 + 4B^2 \geq 0$$

Portanto, a equação característica sempre tem raízes reais.

Exemplo 12.3.1. Dada a forma quadrática $\varphi(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2$, sabendo que a equação característica é da forma

$$\lambda^2 - (A + B)\ \lambda + (AC - B^2) = 0,$$

verificamos que para $A = 5$, $B = 3$ e $C = 5$ há a seguinte equação:

$$\lambda - (5 + 5)\lambda + (5 \cdot 5 - 3^2) = 0 \Rightarrow \lambda - 10\lambda + 16 = 0$$

, cujas raízes são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$.

Definição 12.37. As raízes λ_1, λ_2 da equação característica são chamadas de **autovalores** da forma quadrática ϕ ou de sua matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

Observação 20.

- λ_1 e λ_2 são os únicos valores para λ, tal que o sistema (12.1) admite soluções não-triviais.
- Se (x, y) é uma solução do sistema (12.1), então para todo $k \in \mathbb{R}$, (kx, ky) é também solução do mesmo sistema homogêneo.

Exercício 12.3.1. Mostre que se (x, y) é uma solução do sistema (12.1), então para todo $k \in \mathbb{R}$, (kx, ky) é também solução.

Voltando ao sistema de eixos, vejamos como proceder para encontrar a rotação (ou seja, o vetor unitário $\vec{u} = (a, b)$ que torna $B' = 0$).

Primeiro - Resolver a equação característica. Seja λ_1 uma de suas raízes.

Segundo - Tomamos uma solução não-trivial da equação $Ax + By = \lambda_1 x$ (por exemplo, $x = 1$ e $y = (\lambda - A)/B$).

Terceiro - Encontrada a solução (x, y), colocamos $a = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $b = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Veja que $\vec{u} = (a, b)$ é o vetor unitário cujas coordenadas obedecem a $Aa + Bb = \lambda_1 b$ e $Ba + Cb = \lambda_1 b$.

Definição 12.38. O vetor $\vec{u} = (a, b)$, que é uma solução não-trivial do sistema (12.1) com $\lambda = \lambda_1$, chamamos de um **autovetor** de ϕ (ou da matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$), associado ao autovalor λ_1.

Observação 21. Note que o vetor $\vec{u}' = (-b, a)$, obtido rotacionando o vetor unitário $\vec{u} = (a, b)$ em mais 90^o, é também um autovetor de ϕ, porém associado a λ_2. (Veja a atividade (2).)

12.4 Mais algumas propriedades

Encontrados os autovalores λ_1 e λ_2, não é preciso calcular A' e C'. Na verdade, $A' = \lambda_1$ e $C' = \lambda_2$, automaticamente.

Para confirmar isso, tome $A' = Aa^2 + 2Bab + Cb^2$ e $C' = Ab^2 - 2Bab + Ca^2$, que serão desenvolvidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A' &= Aa^2 + 2Bab + Cb^2 \\ &= Aa^2 + Bab + Bab + Cb^2 \\ &= (Aa + Bb)a + (Ba + Cb)b \\ &= \lambda_1 a^2 + \lambda_1 b^2 \\ &= \lambda_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C' &= Ab^2 - 2Bab + Ca^2 \\
&= Ab^2 - Bab - Bab + Ca^2 \\
&= (A(-b) + Ba)(-b) + (B(-b) + Ca)a \\
&= \lambda_2(-b)^2 + \lambda_2 a^2 \\
&= \lambda_2
\end{aligned}
$$

Portanto, $A' = \lambda_1$ e $C' = \lambda_2$.

Desta forma, podemos efetuar uma conveniente mudança de coordenadas, introduzida após a rotação dos eixos coordenados pelo vetor $\vec{u} = (a, b)$, possibilitando a ϕ assumir

$$\overline{\phi}(s,t) = \phi(as - bt, bs + at) = \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2$$

Isso facilita a identificação dos conjuntos de nível definidos por equações do tipo $\phi(x, y) = c$, com c constante.

12.4.1 Observando o produto das raízes da equação do segundo grau.

Você já deve ter percebido que o produto das raízes da equação de segundo grau (12.2) é dado por $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = AC - B^2$. A partir desse produto, podemos levantar três possibilidades:

(I) $(AC - B^2 > 0)$ Então λ_1 e λ_2 têm mesmo sinal, e temos que se $c \neq 0$, o conjunto de nível é dado pela equação $\phi(x, y) = c$, ou seja,

$$\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = c.$$

1. Caso c tenha o mesmo sinal que λ_1 e λ_2,

$$\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = c \Rightarrow \frac{s^2}{m^2} + \frac{t^2}{n^2} = 1 \quad \text{com}$$

$$m = \sqrt{\frac{c}{\lambda_1}} \quad \text{e} \quad n = \sqrt{\frac{c}{\lambda_2}}.$$

2. Caso c tenha sinal oposto a λ_1 e λ_2, então o conjunto de nível $\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = c$ é vazio.

3. E se $c = 0$, então o conjunto de nível é apenas o elemento $(0,0)$, pois é o único ponto que satisfaz $\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = 0$.

(II) $(AC - B^2 < 0)$ Neste caso, λ_1 e λ_2 têm sinais opostos, e temos que se $c \neq 0$, o conjunto de nível é dado pela equação $\phi(x, y) = c$, ou seja,

$$\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = c.$$

1. Caso c tenha o mesmo sinal que λ_1 e contrário ao de λ_2,

$$\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = c \Rightarrow \frac{s^2}{m^2} - \frac{t^2}{n^2} = 1$$

$$\text{com } m = \sqrt{\frac{c}{\lambda_1}} \quad \text{e} \quad n = \sqrt{-\frac{c}{\lambda_2}}.$$

2. Se c tem sinal oposto a λ_1 (e claramente, c e λ_2 têm mesmo sinal), então o conjunto de nível $\phi(x, y) = c$ é dado por

$$\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = c \Rightarrow \frac{t^2}{m^2} - \frac{s^2}{n^2} = 1$$

$$\text{com } m = \sqrt{-\frac{c}{\lambda_1}} \quad \text{e} \quad n = \sqrt{\frac{c}{\lambda_2}}.$$

. Em ambos os itens, com $c \neq 0$, o conjunto de nível são hipérboles.

3. E se $c = 0$, então de λ_2,

$$\lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} s^2$$

Logo o conjunto de nível é definido por um par de retas $t = \pm ks$, com $k = \lambda_1/\lambda_2$.

(III) $(AC - B^2 = 0)$ Então $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, ou seja, têm mesmo sinal, além disso, consideramos que um dos autovalores, isto é, λ_2 é igual a zero. Não pode ocorrer que λ_1 também seja igual a zero, pois caso isso aconteça, teríamos que

$$A + C = \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

. Mas como $AC - B^2 \geq 0 \Rightarrow AC = B^2 \geq 0$, e assim, A e C têm sinais opostos, o que resultaria em $A = C = 0$ e $B = \sqrt{AC}$. Diante disso, a forma φ desapareceria. Logo, como λ_1 e λ_2 não são ambos nulos, o conjunto de nível (também chamado de linha de nível) é representado nas coordenadas s, t pela equação $\lambda_1 s^2 = c$, ou ainda, $s^2 = c/\lambda_1$ que será:

1. vazia se c e λ_1 tiverem sinais opostos;
2. formada pelas retas paralelas $s = \pm\sqrt{c/\lambda_1}$ se c e λ_1 têm mesmo sinal e será a reta $s = 0$ se $c = 0$.

Exemplo 12.4.1. Retomando o exemplo (12.3.1) e fazendo uma rotação dos eixos, introduz coordenadas (s, t), tal que

$$\varphi(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 2s^2 + 8t^2 = \overline{\varphi}(s, t)$$

Perceba que a equação $2s^2 + 8t^2 = c$ não tem solução se $c < 0$, tem a única solução $s = t = 0$ se $c = 0$ e, para $c > 0$, é equivalente a

$$\frac{s^2}{\alpha^2} + \frac{t^2}{\beta^2} = 1,$$

com $\alpha = \sqrt{c/2}$ e $\beta = \sqrt{c/8}$. Notamos ainda que $\dfrac{s^2}{\alpha^2} + \dfrac{t^2}{\beta^2} = 1$ representa uma elipse. Portanto, as linhas de nível definidas por $5x^2 + 6xy + 5y^2 = c$, para cada número real c fixado,

- são vazias se $c < 0$;

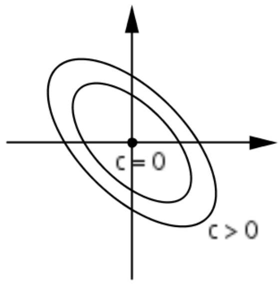

Figura 12.89: $5x^2 + 6xy + 5y^2 = c$.

- serão apenas um ponto $O = (0, 0)$ se $c = 0$;
- e serão elipses se $c > 0$.

O eixo maior dessa elipse é o eixo s, ou seja, é a reta que passa pela origem e contém todos os pontos $P = (x, y)$, soluções não-triviais da equação $Ax + By = \lambda_1 x$ que, neste caso, seria

$$5x + 3y = 2x \Rightarrow x + y = 0$$

Veja que $\vec{u} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é um vetor unitário da reta $x + y = 0$ e determina a orientação do eixo $O'X'$, que é o eixo s. O ângulo de rotação do eixo OX para o eixo $O'X'$ é dado por

$$\cos\theta = \frac{|\langle \vec{u}, \vec{i}\rangle|}{|\vec{u}|\,|\vec{i}|} = \frac{\left|\langle \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (1, 0)\rangle\right|}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

o que resulta em $\theta = 135^o$, pois em $\vec{u}$ a coordenada x é negativa $(-\sqrt{2}/2)$, enquanto a coordenada y é positiva $(\sqrt{2}/2)$. Como o ângulo de OX para $O'X'$ é de 135^o, esta é a rotação que se deve fazer para passar das coordenadas x, y para s, t. Sendo $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{3c}{8}}$, os focos da elipse têm coordenadas $s = \pm\sqrt{\frac{3c}{8}}$ no sistema $O'X'Y'$.

Observação 22. Se tivéssemos tomado $\vec{u}' = -\vec{u} = \left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$ para orientar o eixo $O'X'$, a rotação de OX para $O'X'$ seria de -45^o.

Exemplo 12.4.2. Seja $\varphi(x, y) = x^2 + 4xy - 2y^2$. Iremos proceder de forma análoga aos exemplos (12.3.1) e (12.4.1). Assim, a equação característica desta forma quadrática é $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2$. Uma rotação dos eixos introduz no plano coordenadas s, t tal que

$$x^2 + 4xy - 2y^2 = 3s^2 - 2t^2.$$

Observando as linhas de nível $\varphi(x, y) = c$, constatamos que elas podem ser reescritas como

$$3s^2 - 2t^2 = c \Rightarrow \frac{s^2}{c/3} - \frac{t^2}{c/2} = 1.$$

Logo, $\dfrac{s^2}{c/3} - \dfrac{t^2}{c/2} = 1$ representa a hipérbole, tomando $\alpha = \sqrt{c/3}$ e $beta = \sqrt{c/2}$ se $c > 0$ ou a hipérbole

$$\frac{t^2}{c/3} - \frac{s^2}{c/2} = 1,$$

tomando, desta vez, $\alpha = \sqrt{-c/3}$ e $\beta = \sqrt{-c/2}$ se $c < 0$. Então, para todo $c \neq 0$, a equação $x^2 + 4xy - 2y^2 = c$ representa uma hipérbole. Mas no caso em que $3s^2 - 2t^2 = 0$, temos

$$(\sqrt{3}s + \sqrt{2}t) \cdot (\sqrt{3}s - \sqrt{2}t) = 0.$$

E assim, as soluções dessa equação são os pontos (s, t) que se encontram sobre as retas $\sqrt{3}s + \sqrt{2}t = 0$ e $\sqrt{3}s - \sqrt{2}t = 0$. O que nos diz que a equação $x^2 + 4xy - 2y^2 = 0$ define um par de retas que se interseptam na origem. Perceba, ainda, que da equação

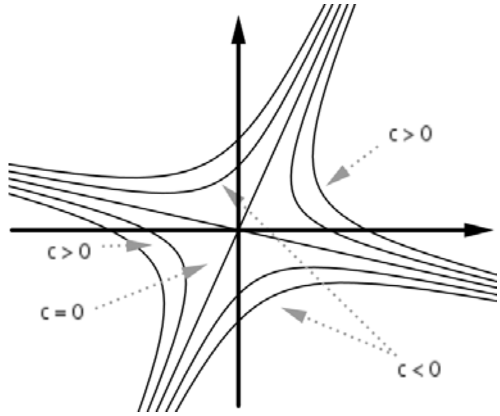

Figura 12.90: $x^2 + 4xy - 2y^2 = c$.

$x^2 + 4xy - 2y^2 = 0$, temos que (usando a técnica de completar quadrados)

$$x^2 + 4xy - 2y^2 = 0 \Rightarrow (x + 2y)^2 - 6y^2 = 0$$

e então, $x + (2 - \sqrt{6})y = 0$ e $x + (2 + \sqrt{6})y = 0$ são as equações da reta nas coordenadas x, y. Podemos concluir, desta forma, que a equação $x^2 + 4xy - 2y^2 = c$ define uma hipérbole quando $c \neq 0$, ou um par de retas que passam pela origem quando $c = 0$.

12.5 Resumo

Nesta aula, conhecemos a definição de conjunto de nível, além das equações características, autovetores e autovalores, e algumas de suas propriedades que formam uma técnica para facilitar a percepção de cônicas cuja classificação não seja imediata.

12.6 Atividade

1. Para cada uma das formas quadráticas a seguir, execute as seguintes tarefas:

   (a) escreva sua matriz e sua equação característica;

   (b) obtenha seus autovalores;

   (c) descreva seus conjuntos de nível;

   (d) determine os novos eixos em cujas coordenadas a forma quadrática se exprime como $A's^2 + C't^2$.

   As formas quadráticas são:

   (a) $\varphi(x, y) = x^2 + 6xy + y^2$;

   (b) $\varphi(x, y) = x^2 + xy + y^2$;

   (c) $\varphi(x, y) = xy$.

2. Verifique a observação (21), ou seja, dado o vetor $\vec{u}' = (-b, a)$, obtido da rotação do vetor $\vec{u} = (a, b)$ em mais 90^o, é também um autovetor de ϕ definido em (12.3), associado ao autovalor λ_2. Para esta verificação, faça o que se pede a seguir.

   (a) Da equação característica (12.2), mostre que λ_2 pode ser reescrito como $\lambda_2 = A + C - \lambda_1$.

   (b) Sabendo que $Ba + Cb = \lambda_1 b$ quando $\lambda = \lambda_1$, mostre que

   $$A(-b) + Ba = \lambda_2(-b) \quad \text{e que} \quad B(-b) + Ca = \lambda_2 a,$$

   para confirmar que $\vec{u}' = (-b, a)$ é um autovetor associado ao autovalor λ_2.

3. No caso em que $AC - B^2 = 0$, conforme o item (III) em (12.4.1), mostre o que se pede nos quesitos seguintes.

   (a) Supondo $A \geq 0$, $B \geq 0$ e $C \geq 0$, tomando $m = \sqrt{A}$ e $n = \sqrt{C}$, a forma quadrática pode ser reescrita como $\varphi(x, y) = (mx + ny)^2$.

   (b) Interprete geometricamente as linhas de nível (conjunto de nível), $\varphi(x, y) = c$, nos casos em que $c \geq 0$ e $c < 0$.

   (c) Como pode ser reescrita a forma φ em que:

      i. se $A \geq 0$, $C \geq 0$ e $B < 0$;

      ii. se $A < 0$, $C < 0$ e $B \geq 0$;

      iii. se $A < 0$, $C < 0$ e $B < 0$.

12.7 Comentário das atividades

Se você conseguiu resolver a atividade 1 (em particular, os itens (c) e (d)), então entendeu a definição de forma quadrática. Se fez as atividades 1(a), 1(b) e 2, deve ter usado bem o conceito de equação característica de uma forma quadrática, além de autovalores e autovetores. E quanto à atividade 3? Caso tenha obtido êxito na sua resolução, então entendeu a relação entre o produto de raízes da equação de segundo grau na seção (1.3.1).

Lembre-se de que há tutores a sua desposição para esclarecimento das dúvidas. Não exite em procurá-los, pois a ajuda deles é muito importante no processo de sua aprendizagem. Além disso, é sempre bom retomar os pontos da aula para uma releitura, já que isso contribui na resolução das atividades. Sempre que possível, procure seus colegas de curso para discutir as questões. Essa prática não só contribui para fomentar o debate dos conteúdos estudados, mas também promove o entrosamento entre vocês.

12.8 Referências

BOLDRINI, José Luiz, *Álgebra Linear* . São Paulo: Harbra, 1980.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica.* São Paulo: Makron Books, 1987.