2
LIVRO

13
AULA

A Equação Geral do Segundo Grau

META

Introduzir o conceito de equação geral do segundo grau (com 2 variáveis) e suas propriedades.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de aplicar os conhecimentos de formas quadráticas e mudanças de coordenadas no plano para encontrar as soluções de equações gerais do segundo grau com duas variáveis e representá-las no plano.

PRÉ-REQUISITOS

Ter compreendido o conceito de formas quadráticas (Aula 12).

13.1 Introdução

Olá, caro aluno! Nesta aula, iremos conhecer um pouco mais a respeito da **equação geral do segundo grau** que, de certo modo, começamos a observar na Aula 12.

A forma geral de uma função quadrática de duas variáveis é

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \tag{13.1}$$

Mostraremos a você que a linha de nível (ou conjunto de nível) $\varphi(x, y) = 0$ é uma elipse, hipérbole e parábola, ou ainda, nos casos excepcionais, a elipse pode reduzir-se a um ponto ou ao conjunto vazio; a hipérbole pode degenerar-se num par de retas concorrentes e, em vez de uma parábola, pode haver um conjunto vazio, uma reta ou um par de retas paralelas.

13.2 Relembrando mudança de coordenadas

Como você deve estar lembrado, na Aula 11, trabalhamos as mudanças de coordenadas no plano. E, mais uma vez, iremos usá-las para fazer uma translação dos eixos. Fazendo $x = s + h$, $y = t + k$, temos que, com as devidas substituições

$$\overline{\varphi}(s, t) = \varphi(s + h, t + k)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(s+h, t+k) = A(s+h)^2+2B(s+h)(t+K)+C(t+k)^2+D(s+h)+E(t+k)+F$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\varphi}(s, t) = As^2 + 2Bst + Ct^2 + D's + E't + F' \tag{13.1}$$

em que:

$$\begin{aligned} D' &= 2Ah + 2Bk + D \\ E' &= 2Bh + 2Ck + E \\ F' &= Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F \end{aligned}$$

Note que os coeficientes A, B e C são invariantes por translação e o coeficiente F' afeta apenas o nível a que as linhas ($\varphi(x, y) = c$ ou $\overline{\varphi}(s, t) = c'$) estão relacionadas, não afetando suas características.

Visando facilitar o estudo da equação geral do segundo grau, vamos procurar h e k para que $D' = E' = 0$. Isto é, queremos solucionar o sistema:

$$\begin{cases} Ah + Bk & = -\frac{D}{2} \\ Bh + Ck & = -\frac{E}{2} \end{cases}$$

Caso $AC - B^2 \neq 0$, o sistema anterior tem solução única (h, k) e a translação, tomando $x = s + h$ e $y = t + k$, permite que nas novas coordenadas (s, t) a forma quadrática fique na forma

$$\overline{\varphi}(s, t) = As^2 + 2Bst + Ct^2 + F' \qquad (13.2)$$

Veja que para $\varphi(x.y) = 0$ temos $\overline{\varphi}(s, t) = -F'$, em que $\overline{\varphi}$ é a forma quadrática cujos primeiros três coeficientes são os mesmos de φ, e assim, retornando aos casos estudados na Aula 12.

Exemplo 13.2.1. Que curva plana a equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ define? Vamos efetuar a translação dos eixos tomando $x = s + h$ e $y = t + k$. Deste modo, a equação $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ fica:

$$5(s + h)^2 + 6(s + h)(t + k) + 5(t + k)^2 + 2(s + h) - 4(t + k) + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$5s^2 + 6st + 5t^2 + (10h + 6k + 2)s + (6h + 10k - 4)t + F' = 0,$$

em que $F' = 5h^2 + 6hk + 5k^2 + 2h - 4k + 1$. Sendo assim, temos o sistema

$$\begin{cases} 5h + 3k & = -1 \\ 3h + 5k & = 2 \end{cases}$$

cuja solução é $h = -11/16$ e $k = 13/16$ e que resulta em $F' = -21/16$. Neste caso, a equação (13.2) fica

$$5s^2 + 6st + 5t^2 = 21/16.$$

Como foi possível verificar (veja o exemplo **3** e **4** na **Aula 12**), a mesma equação introduz uma rotação de 135^o, além de novas coordenadas p e q, tal que

$$2p^2 + 8q^2 = 21/16. \tag{13.3}$$

E da equação (13.3) percebemos que $5x^2+6xy+5y^2+2x-4y+1 = 0$ define uma elipse.

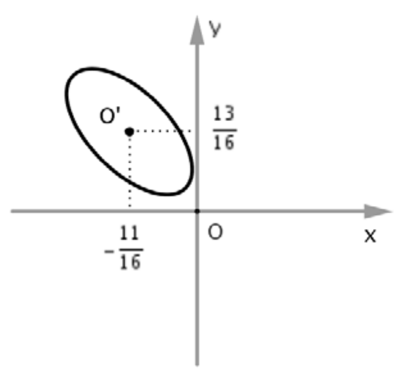

Figura 13.91: $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

13.3 Vamos analisar quando $AC - B^2 = 0$.

Para o caso em que $AC - B^2 = 0$, o sistema

$$\begin{cases} Ah + Bk & = -\frac{D}{2} \\ Bh + Ck & = -\frac{E}{2} \end{cases} \tag{13.1}$$

pode ser indeterminado ou impossível, dependendo da segunda equação ser ou não múltipla da primeira. No caso em que o sistema (13.1) seja indeterminado, usando uma solução qualquer (h, k), a translação de eixos $x = s + h$ e $y = t + k$ torna $D' = E' = 0$, de tal sorte que nas coordenadas (s, t) a função quadrática transforma-se em

$$\overline{\varphi}(s, t) = As^2 + 2Bst + Ct^2 + F' \tag{13.2}$$

Como $AC - B^2 = 0$, a equação característica da forma quadrática $As^2 + 2Bst + Ct^2$ é

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda = 0 \Rightarrow \lambda[\lambda - (A + B)] = 0,$$

de que obtemos as raízes $\lambda_1 = A+C \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$. Efetuando uma rotação conveniente sobre os eixos, introduz coordenadas (p, q), e assim,

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi}(s, t) = \overline{\overline{\varphi}}(p, q) = (A+C)p^2+0\cdot q^2+F' = (A+C)p^2+F'',$$

ou seja, $\overline{\overline{\varphi}}(p, q) = (A + C)p^2 + F''$, de modo que a curva de nível zero de $\overline{\overline{\varphi}}$(e consequentemente, φ) é o conjunto vazio ou um par de retas paralelas se $F'' \neq 0$, e uma só reta se $F'' = 0$.

Vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 13.3.1. 1. Que curva plana é representada pela equação

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 1 = 0?$$

Mais uma vez, vamos achar h e k, tal que a translação de eixos $x = s + h$ e $y = t + k$ elimine os termos $2x$ e $-4y$ na equação. Com esta intenção, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} h + 2k &= -1 \\ 2h + 4k &= -2 \end{cases}$$

que é indeterminado. Neste caso, você pode perceber que se colocarmos $h = 1$ e $k = -1$, temos da primeira equação do sistema

$$h + 2k = -1 \Rightarrow 1 + 2(-1) = -1$$

que é uma de suas soluções e, de brinde, efetuando as devidas translações, $x = s + 1$ e $y = t - 1$, transforma a equação $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ em $s^2 + 4st + 4t^2 = 0$, ou ainda, em $(s + 2t)^2 = 0$, e assim,

$$s + 2t = 0 \Rightarrow t = -\frac{s}{2},$$

implicando que a equação define uma única reta.

2. Se a equação fosse $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$, nas coordenadas s, t se tornaria

$$(s + 2t)^2 = 2 \Rightarrow s + 2t = \pm\sqrt{2},$$

então teríamos duas retas definidas pela equação.

3. Imagine, agora, que a equação fosse $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$ e, mais uma vez, colocando nas coordenadas s, t, obtemos

$$(s + 2t)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (s + 2t)^2 = -1$$

que define o conjunto vazio, pois não é possível encontrar pares (s, t) tais que sejam a solução de $(s - 2t)^2 = -1$.

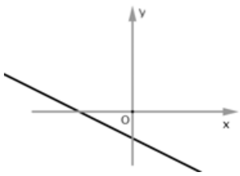

Figura 13.92: $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$

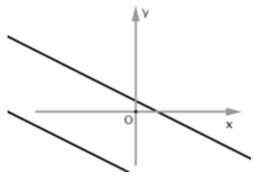

Figura 13.93: $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$

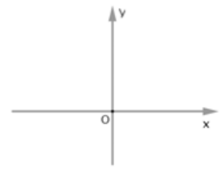

Figura 13.94: $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$

Se o sistema for impossível e $AC - B^2 = 0$, neste caso não encontramos h, k tal que $D' = E' = 0$. Porém, podemos encontrar h e k de forma que $E' = 0$ e, após efetuada a translação dos eixos coordenados, obtendo

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi}(s, t) = As^2 + 2Bst + Ct^2 + D's + F' \quad \text{com} \quad D' \neq 0,$$

e a equação característica da forma quadrática $As^2 + 2Bst + Ct^2$ é $\lambda^2 - (A + C)\lambda = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = A + C \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$. Efetuando uma rotação conveniente, inserindo novas coordenadas p, q, tal que

$$\begin{cases} s = & ap - bq \\ t = & bp + aq \end{cases}, \quad \text{com} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Substituindo, temos

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi}(s, t) = \overline{\overline{\varphi}}(p, q) = (A + C)p^2 + D'(ap - bq) + F'.$$

E assim, para a equação

$$\varphi(x, y) = 0 \Rightarrow (A + C)p^2 + D'(ap - bq) + F' = 0$$

$$\Rightarrow (A + C)p^2 + D'ap - D'bq + F' = 0$$

Vamos considerar que $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pois, caso contrário, teríamos apenas rotações de 90^o ou de 180^0, ou seja, teríamos apenas uma permuta entre os eixos s e t ou mudaríamos os sentidos da orientação dos eixos. Como $D'b \neq 0$, da equação

$$
\begin{aligned}
&(A+C)p^2 + D'ap - D'bq + F' = 0 \\
\Rightarrow\ & q = \frac{(A+C)}{D'b}p^2 + \frac{D'a}{D'b}p + \frac{F'}{D'b}. \\
\Rightarrow\ & q = \frac{(A+C)}{D'b}p^2 + \frac{a}{b}p + \frac{F'}{D'b}.
\end{aligned}
$$

o que, portanto, define uma parábola.

Basta que você reescreva a equação $q = \frac{(A+C)}{D'b}p^2 + \frac{a}{b}p + \frac{F'}{D'b}$ na forma $q = \alpha p^2 + \beta p + \gamma$ com $\alpha = \frac{(A+C)}{D'b}$, $\beta = \frac{a}{b}$ e $\gamma = \frac{F'}{D'b}$.

Observemos mais alguns exemplos.

Exemplo 13.3.2. Qual será a curva representada pela equação $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 8x + 6y + 1 = 0$? Fazendo as substituições $x = s - 2$, $y = t + 1$, convertemos essa equação em

$$4(s-2)^2 + 12(s-2)(t+1) + 9(t+1)^2 + 8(s-2) + 6(t+1) + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$4s^2 + 12st + 9t^2 + 4s - 8 = 0$$

eliminando, assim, o coeficiente de t, como sugerido anteriormente. Usando o método apresentado na seção **1.2**da **Aula 12**, vamos efetuar uma rotação dos eixos $s = ap - bq$, $t = bp + aq$, com $a = \frac{2}{\sqrt{13}}$ e $b = \frac{3}{\sqrt{13}}$ para eliminar o coeficiente de st, convertendo a equação ao seguinte formato

$$13p^2 + \frac{8}{\sqrt{13}}p - \frac{12}{\sqrt{13}}q - 8 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$q = \frac{\sqrt{13}}{12}\left(13p^2 + \frac{8}{\sqrt{13}}p - 8\right)$$

o que define uma parábola.

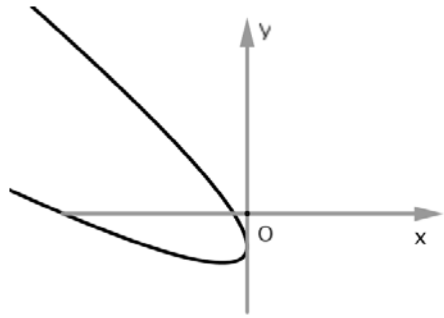

Figura 13.95: $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 8x + 6y + 1 = 0$.

Exemplo 13.3.3. Seja $\varphi(x, y) = x^2+2y^2+3x+4y+4$. Queremos eliminar os termos $3x$ e $4y$ e, para tanto, vamos encontrar h k na translação $x = s + h$ e $y = t + k$. Note que $AC - B^2 = 2 > 0$, e assim recaímos no caso **(I)** da seção **1.3.1** da **Aula 12**, ou seja, $\varphi(x, y) = 0$ define uma elipse, um ponto ou um conjunto vazio. Vamos ao trabalho!

Fazendo

$$\begin{aligned}
\varphi(s+h, t+k) &= (s+h)^2 + 2(t+k)^2 + 3(s+h) + 4(t+k) + 4 \\
&= s^2 + 2hs + h^2 + 2t^2 + 4ht + 2k^2 \\
&\quad + 3s + 3h + 4t + 4k + 4 \\
&= s^2 + 2t^2 + (2h+3)s + (4k+4)t \\
&\quad + h^2 + 2k^2 + 3h + 4k + 4
\end{aligned}$$

E com isso, para termos $2h + 3 = 0$ e $4k + 4 = 0$, iremos tomar $h = -\dfrac{3}{2}$ e $k = -1$, o que converte φ da seguinte forma:

$$\varphi(x, y) = \varphi(s - \frac{3}{2}, t - 1) = s^2 + 2t^2 + \frac{9}{4} + 2 - \frac{9}{2} - 4 + 4$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\varphi}(s, t) = s^2 + 2t^2 - \frac{1}{4}$$

Portanto, a equação $x^2 + 2y^2 + 3x + 4y + 4 = 0$ pode ser reescrita na forma

$$\frac{s^2}{(1/2)^2} + \frac{t^2}{(1/\sqrt{8})^2} = 1$$

o que define uma elipse com eixos $1/2$ e $1/\sqrt{8}$ paralelos aos eixos x e y.

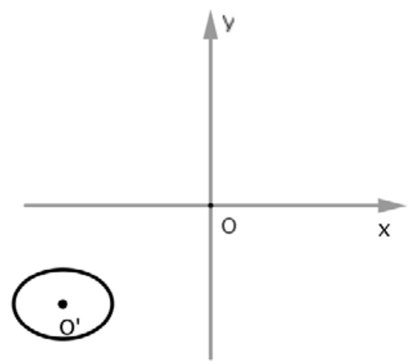

Figura 13.96: $x^2 + 2y^2 + 3x + 4y + 4 = 0$.

13.4 Resumo

Nesta aula, você conheceu formas de identificar cônicas a partir da equação geral do segundo grau, usando ferramentas já conhecidas como autovalores, autovetores, translações e rotações.

13.5 Atividades

1. Considere a equação $2x^2 + 12xy + 18y^2 + x + y + 1 = 0$.

   (a) Mostre que $AC - B^2 = 0$.

   (b) Mostre que os autovalores da forma quadrática $2x^2 + 12xy + 18y^2$ são $\lambda_1 = 20$ e $\lambda_2 = 0$.

(c) Seja $\vec{u} = (3/\sqrt{10}, -1/\sqrt{10})$, mostre que ele é um autovetor unitário associado à forma quadrática do item anterior.

(d) Efetuando a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{\sqrt{10}}s + \frac{1}{\sqrt{10}}t \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{10}}s + \frac{3}{\sqrt{10}}t, \end{aligned}$$

mostre que esta rotação em torno da origem leva o vetor $\vec{i} = (1, 0)$ sobre $\vec{u}$ e que, além disso, nas novas coordenadas, a equação $2x^2 + 12xy + 18y^2 + x + y + 1 = 0$ fica na forma

$$(20\sqrt{10})t^2 + 2s + 4t + \sqrt{10} = 0 \qquad (13.1)$$

(e) Conclua informando qual a cônica que a equação (13.1) define.

2. Para cada uma das equações a seguir, identifique detalhadamente a curva que ela define e as mudanças de coordenadas que permitiram esta conclusão.

(a) $x^2 + 3y^2 - x + y - 1 = 0$;

(b) $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$;

(c) $x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 1 = 0$;

(d) $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$.

13.6 Comentário das atividades

. Se você conseguiu resolver a atividade 1, então começou a entender o funcionamento da mudança de coordendas para identificar o conjunto de nível que obedece à equação dada. Ao solucionar a atividade 2, pôde perceber que é possível usar esta técnica em mais exemplos.

Lembre-se sempre de que há tutores a distância e presenciais para ajudá-lo em suas dúvidas. Além disso, é importante que você as compartilhe com seus colegas de curso.

13.7 Referências

BOLDRINI, José Luiz, *Álgebra Linear* . São Paulo: Harbra, 1980.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books, 1987.