2
LIVRO

16
AULA

Quádricas Centrais

META

Introduzir o conceito de quádricas centrais e exemplificá-las.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá identificar uma dada quádrica central representando-a com uma superfície de nível.

PRÉ-REQUISITOS

Ter compreendido os conceitos abordados na Aula 15 (mudança de sistema de coordenadas no espaço e matrizes ortogonais).

16.1 Introdução

Olá, caro aluno! Nesta aula, iremos conhecer uma interessante forma de representar equações com três variáveis como objetos dentro do $\mathbb{R}^3$. Essas equações que estudaremos têm características peculiares e são oriundas das formas quadráticas definidas também com três variáveis.

Vamos começar!

Definição 16.45. Uma **forma quadrática** em $\mathbb{R}^3$ é um polinômio homogêneo de grau 2 com três variáveis, ou seja, é uma função $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz. \quad (16.1)$$

Em um **polinômio homogêneo** todos os termos têm mesmo grau, ou seja, a soma dos expoentes de cada variável é sempre a mesma. Por exemplo, $P(x, y) = x^2y^3 + x^4y + x^5$ é um polinòmio homogêneo, pois no

1^o termo: $2+3 = 5$
2^o termo: $4+1 = 5$
3^o termo: $5+0 = 5$

Mantendo a origem fixa, se tomarmos novos eixos em $\mathbb{R}^3$, teremos um mudança de coordenadas de (x, y, z) para (r, s, t), com

$$\begin{aligned} x &= a_1r + a_2s + a_3t \\ y &= b_1r + b_2s + b_3t \\ z &= c_1r + c_2s + c_3t \end{aligned} \quad (16.2)$$

Conforme estudamos **Aula 15**, substituindo na equação (16.1), obteremos

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \varphi(a_1r + a_2s + a_3t, b_1r + b_2s + b_3t, c_1r + c_2s + c_3t) \\ &= A'r^2 + B's^2 + C't^2 + 2D'rs + 2E'rt + 2F'st = \overline{\varphi}(r, s, t) \end{aligned}$$

De forma similar ao que você estudou na **Aula 12** (Formas Quadráticas no Plano), mediante uma escolha conveniente de eixos, é possível permitir que as novas coordenadas r, s e t forneçam $D' = E' = F' = 0$, e assim

$$\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}(r, s, t) = A'r^2 + B's^2 + C't^2$$

simplificando φ e também facilitando a visualização de conjuntos especiais definidos por

$$\varphi(x, y, z) = c, \quad \text{com } c \text{ constante real.}$$

Definição 16.46. [(Superfície de Nível)]
Para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto de pontos $P = (x, y, z)$, tal que $\varphi(x, y, z) = c$, chama-se a **superfície de nível** c da forma φ.

16.2 Quádricas centrais

Definição 16.47. Na expressão geral de uma função quadrática $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) = \quad & Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \\ & +2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J, \end{aligned} \tag{16.1}$$

as superfícies de nível $\psi(x, y, z) = d$ (com A, B, C, D, E, F, G, H, z, J e d constantes reais não todos nulos) são chamadas de **quádricas**.

Definição 16.48. Se $G = H = I = J = 0$, temos a forma quadrática dada pela equação (16.1), cujas superfícies de nível $\psi(x, y, z) = d$ são conhecidas como **quádricas centrais**.

Essas quádricas são chamadas de *centrais* porque sendo $\varphi(-x, -y, -z) = \varphi(x, y, z)$, se o ponto $P = (x, y, z)$ pertence à superfície S de equação $\varphi(x, y, z) = d$, então $P' = (-x, -y, -z) \in S$. Desta forma, $\vec{0} = (0, 0, 0)$ é um centro de simetria de S.

Admitindo que fizemos uma escolha de eixos ortogonais, tal que $D = E = F = 0$, ou seja,

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 \tag{16.2}$$

Quádricas Centrais

De acordo com as condições a seguir, podemos obter os seguintes resultados.

1. Quando $d \neq 0$, temos que
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = d \;\Leftrightarrow\; \frac{A}{d}x^2 + \frac{B}{d}y^2 + \frac{C}{d}z^2 = 1.$$

2. Se $A/d > 0$, tomando $a = \sqrt{d/A}$, obtemos
$$\left(\frac{A}{d}\right)x^2 = \frac{x^2}{a^2}.$$

3. Analogamente para:
$$\begin{array}{l} (B/d)y^2 = \pm y^2/d^2 \\ (C/d)z^2 = \pm z^2/d^2 \end{array}, \quad \text{com} \quad \begin{array}{l} b = \sqrt{\pm d/B} \\ c = \sqrt{\pm d/C} \end{array}.$$

   Note que em todos os casos, $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

4. $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$

Das quatro observações anteriores obtemos todas as superfícies de nível possíveis de uma forma quadrática, exceto por uma eventual troca dos nomes dos eixos.

(i)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	(ii)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$
(iii)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	(iv)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
(v)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	(vi)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
(vii)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	(viii)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
(ix)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	(x)	$\frac{x^2}{a^2} = 1$
(xi)	$\frac{x^2}{a^2} = -1$	(xii)	$\frac{x^2}{a^2} = 0$
(xiii)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$		

Vamos analisar estas equações e verificar o que cada uma delas representa.

(i) É chamada de **Elipsóide** a superfície E definida pela equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

As interseções com os planos XOY (Π_{xy}), XOZ (Π_{xz}) e YOZ (Π_{yz}) são as elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ e } \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

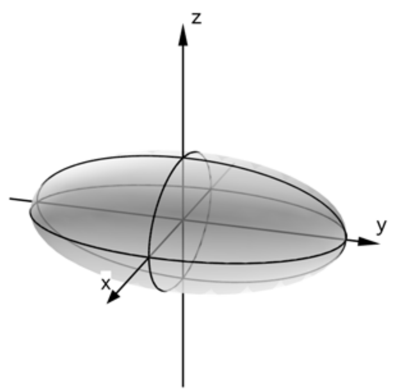

Figura 16.108: Elipsóide

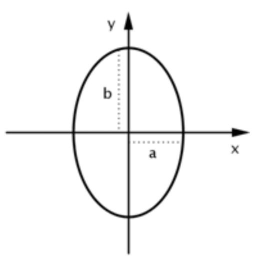

Figura 16.109: $\Pi_{xy}\cap E$ tem equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

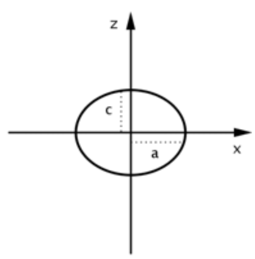

Figura 16.110: $\Pi_{xz}\cap E$ tem equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

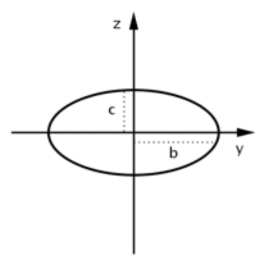

Figura 16.111: $\Pi_{yz}\cap E$ tem equação $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Note que $2a$, $2b$ e $2c$ são os comprimentos dos eixos (de simetria).

Definição 16.49. Se dois desses eixos são iguais, chamamos o elipsóide de **elipsóide de revolução**.

Exemplo 16.2.1. Tome $b = c$ em $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, o que resulta na equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

, que é obtida pela rotação da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, contida no plano $z = 0$ em torno do eixo$-x$. (Ou da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$, contida no plano $y = 0$ em torno do eixo$-x$ou em torno do eixo$-z$.)

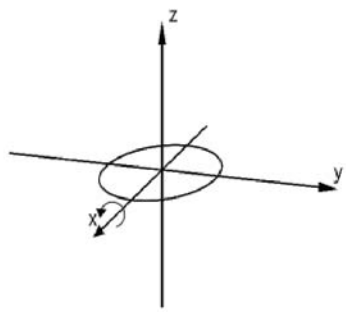

Figura 16.112: No plano $z = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

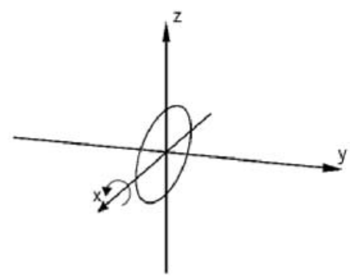

Figura 16.113: No plano $y = 0$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Em particular, se $a = b = c$, a equação $x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/a^2 = 1$ pode ser reescrita como

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \tag{16.3}$$

O que define uma **Esfera** centrada na origem e de raio a.

Exemplo 16.2.2. Determinar uma equação para um esfera de centro C e raio r, sendo:

(a) $C = (0, 0, 0)$ e $r = 2$;

(b) $C = (2, 1, -1)$ e $r = 3$.

Solução (a) - Da equação (16.3) verificamos automaticamente que a equação será

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Solução (b) - Neste caso, o centro da esfera é $C = (2, 1, -1)$. Conforme estudamos na **Aula 15**, vamos fazer uma translação da origem. Ou seja, se $C = (h, k, n)$ for o centro da esfera com equação

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = r^2,$$

faremos a mudança de coordenadas, sendo $x' = x - h$, $y' = y - k$ e $z' = z - n$ e, assim, a equação da circunferência com origem transladada é dada porque

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - n)^2 = r^2.$$

E para $C = (2, 1, -1)$ nos dá $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 3^2$, ou ainda, expandindo os quadrados

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 3 = 0.$$

(ii) Define um conjunto vazio.

(iii) A superfície H_1, definida por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

é chamada de **hiperbolóide de uma folha**. A interseção com o plano

YOZ	é a hipérbole	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$
XOZ	é a hipérbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
XOY e qualquer outro plano paralelo $z = d$ (d constante)	é a elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{d^2}{c^2}$

pois $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{d^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{d^2}{c^2}$ que são elipses. Em

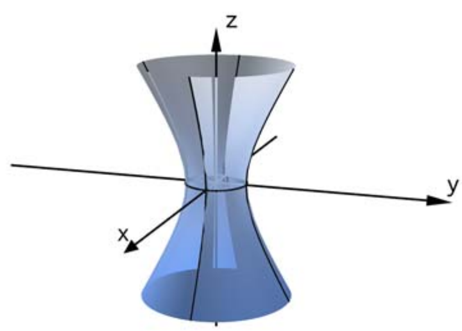

Figura 16.114: Hiperbolóide de uma folha

particular, se $a = b$, as interseções com os planos paralelos a $z = 0$ são circunferências horizontais e H_1 é chamado de **Hiperbolóide de Revolução**, gerado pela rotação de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (contida no plano XOZ) em torno do eixo$-z$. (Ou da hipérbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ contida no plano YOZ em torno do eixo$-z$.)

(iv) Note que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

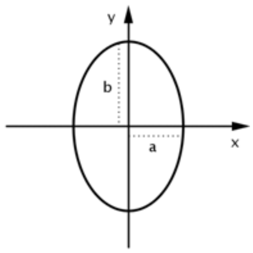

Figura 16.115: $\Pi_{xy} \cap H_1$ tem equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

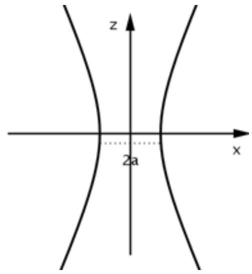

Figura 16.116: $\Pi_{xz} \cap E$ tem equação $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

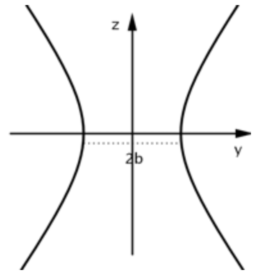

Figura 16.117: $\Pi_{yz} \cap E$ tem equação $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Podemos ainda ter que

$$z^2 = c^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 + \frac{c^2}{b^2}y^2, \tag{16.4}$$

e extraindo a raiz de ambos os membros, significa que todo ponto $P = (x, y, z)$ da superfície H_2 definida pela equação (16.4) também satisfaz $|z| \geq c$. Ou seja, não existem pontos entre os planos $z = c$ e $z = -c$. Perceba que a interseção entre o plano horizontal $z = d$ com $|d| > c$ é a elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{d^2}{c^2}$$

Já a interseção entre a superfície H_2 e o plano (Π_{xz}) é a hipérbole $z^2/c^2 - x^2/a^2 = 1$, e entre H_2 e o plano Π_{yz} é a hipérbole $z^2/c^2 - y^2/b^2 = 1$. A superfície H_2 é chamada de **hiperbolóide de duas folhas**.

Em particular, se $a = b$, a superfície H_2 é chamada de **hiperbolóide de revolução com duas folhas**, e assim, as interseções (ou os cortes horizontais) com o plano horizontal $z = d$, sendo $|d| > c$, serão a circunferência $x^2 + y^2 = a^2\left(\dfrac{d^2}{c^2} - 1\right)$. Além disso,

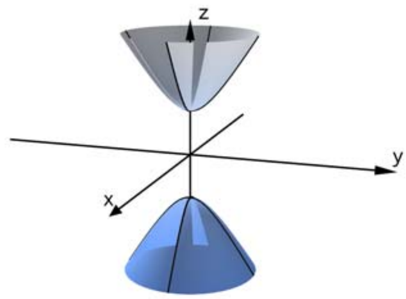

Figura 16.118: Hiperbolóide de duas folhas

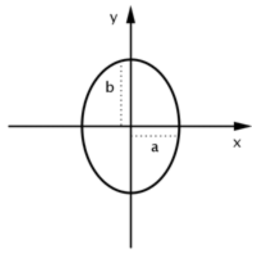

Figura 16.119: o plano $z = d \cap H_2$ tem equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 + \dfrac{d^2}{c^2}$ com $|d| > c$.

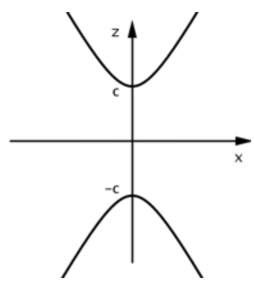

Figura 16.120: $\Pi_{xz} \cap E$ tem equação $\dfrac{z^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{c^2} = 1$.

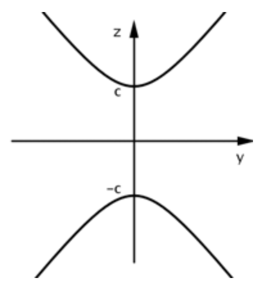

Figura 16.121: $\Pi_{yz} \cap E$ tem equação $\dfrac{z^2}{b^2} - \dfrac{y^2}{c^2} = 1$.

podemos obter H_2 girando a hipérbole $z^2/c^2 - x^2/a^2 = 1$ no plano Π_{xz} em torno do eixo$-z$ ($z^2/c^2 - y^2/b^2 = 1$ no plano Π_{yz} em torno do eixo$-z$).

(v) Esta equação é satisfeita apenas para $(0, 0, 0)$.

(vi) A equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ representa a superfície

S. Fixando $z = c$ (plano horizontal), temos que a interseção entre S e este plano é a elipse E, definida por $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (contida no plano $z = c$).

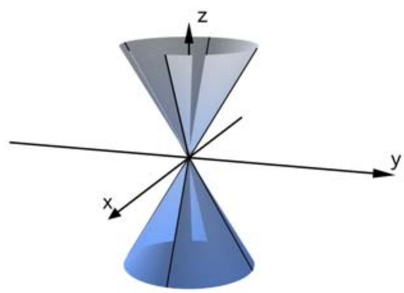

Figura 16.122: Cone duplo com vértice na origem.

S é o **cone duplo com vértice na origem** $O = (0, 0, 0)$ **e base na elipse** E, ou seja, S é a reunião das retas que ligam $O = (0, 0, 0)$ aos pontos de E.

(vii) As soluções dessa equação são todos os pontos $P = (x, y, z)$, tal que $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. O que define um **cilindro reto com base na elipse** $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ no plano Π_{xy}.

(viii) Já as soluções dessa equação são todos os pontos $P = (x, y, z)$, tal que $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. O que define um **cilindro reto com base na hipérbole** $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ no plano Π_{xy}.

(ix) Para esta equação,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

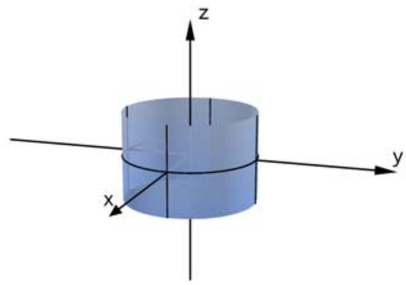

Figura 16.123: Cilindro reto de base elíptica.

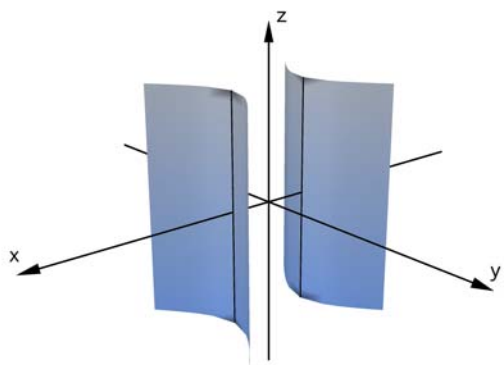

Figura 16.124: Cilindro reto com base hiperbólica.

O que representa dois planos verticais cortando o plano Π_{xy} sobre as retas $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$ e $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$. Veja a figura (16.2).

(x) $x^2/a^2 = 1$ representa o par de planos $x = a$ e $x = -a$, paralelos ao plano YOZ. Veja a figura (16.2).

(xi) $x^2/a^2 = -1$ representa o conjunto vazio, pois não existe (x, y, z) que satisfaça.

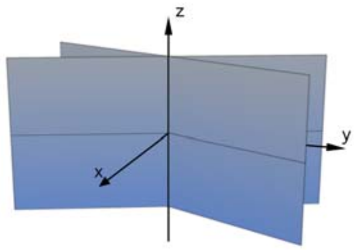

Figura 16.125: Planos $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ e $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$.

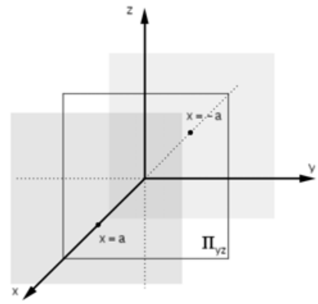

Figura 16.126: Os planos $x = a$ e $c = -a$ são paralelos ao plano Π_{yz}.

(xii) $x^2/a^2 = 0$ representa o plano YOZ, pois equivale a $x = 0$.

(xiii) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ representa a reta OZ, ou seja, o eixo$-z$, pois equivale a $x = y = 0$.

16.3 Resumo

Nesta aula, você aprendeu que a partir da forma quadrática definida com 3 variáveis surgem as quádricas centrais. E delas surgiram algumas superfícies de nível como o elipsóide, a esfera, o hiperbolóide de uma e de duas folhas, o cone com base elíptica, o cilindro reto de base elíptica e hiperbólica, além de outros casos especiais.

16.4 Atividades

1. Determinar uma equação da esfera nas condições dadas.

(a) Centro $C = (2, -3, 1)$ e raio 4.

(b) Centro $C = (4, -1, -2)$ e passando por $P = (2, 3, -1)$.

(c) Centro $C = (0, -4, 3)$ e tangente ao plano $\Pi : x + 2y - 2z - 2 = 0$.

2. Obter uma equação da superfície gerada pela rotação de cada uma das curvas dadas em torno do eixo indicado.

   (a) $x^2 + y^2 = 9$, contida no plano $z = 0$, em torno do eixo$-x$.

   (b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, contida no plano $z = 0$, em torno do eixo maior.

   (c) $y = x$, contida no plano $z = 0$, em torno do eixo$-y$.

3. Um elipsóide de rotação (centrado na origem) tem interseção com o plano $z = 0$ dada pela elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Determine a equação do elipsóide, sabendo que contém o ponto $(0, 1, \sqrt{6})$.

4. Considere um *cone duplo* $\mathcal{C}$ *com vértice na origem* $O = (0, 0, 0)$ *e base na elipse* E, definida por $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (contida no plano $z = c$).

   (a) Mostre que se todo ponto $P = (x, y, z) \in \mathcal{C}$, então para todo $t \in \mathbb{R}$ o ponto $P' = (tx, ty, tz)$ também está contido em $\mathcal{C}$.

   (b) A recíproca da afirmação anterior é válida?

5. Identifique as superfícies definidas pelas equações, dizendo ao longo de que eixo elas ocorrem, conforme o caso.

   (a) $25x^2 + 100y^2 + 36z^2 - 900 = 0$

(b) $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $12x^2 + 4y^2 - 3z^2 + 12$

16.5 Comentário das atividades

Conseguiu resolver as atividades 1,2,3 e 5? Então você já tem uma noção da definição de superfície de nível e a sua relação com as quádricas centrais. Se respondeu à atividade 4, você entendeu a propriedade do cone em que ele é também a reunião de todas as retas que contêm a origem e o ponto $P = (x, y, z)$, tal que $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (contida no plano $z = c$).

Se ainda tiver dificuldades, volte e reveja com cuidado os conceitos apresentados na aula. Não esqueça que há tutores que poderão ajudar a eliminar as suas dúvidas. Desde já, lembre-se de discutir os conteúdos com seus colegas.

16.6 Referências

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica*. São Paulo, Makron Books, 1987.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro, IMPA, 2005.

BOLDRINI, José Luiz, *Álgebra Linear* . São Paulo, Harbra, 1980.