2

LIVRO

18

AULA

Equação Geral do Segundo Grau no Espaço

META

Apresentar as propriedades da equação de segundo grau com três variáveis e suas respectivas representações no espaço.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá efetuar translações nos eixos coordenados para identificar superfícies representadas por equações com três variáveis.

PRÉ-REQUISITOS

Ter compreendido o conteúdo da aula anterior (Completando quadrados).

18.1 Introdução

Olá, caro aluno! Nesta aula, daremos continuidade aos estudos das quádricas centrais. Estudaremos um pouco mais a respeito das equações que representam as superfícies quádricas (quádricas centrais) e os parabolóides (elíptico e hiperbólico).

Vamos analisar a função quadrática com três variáveis, $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J \tag{18.1}$$

com A, B, C, D, E, F, G, H, z, J e d constantes reais não todos nulos.

Iremos admitir que os eixos ortogonais já foram escolhidos de tal sorte a eliminar os termos xy, xz e yz ($D = E = F = 0$), como estudamos para duas variáveis. E assim, para simplificar, basta considerarmos o caso da função

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J$$

Vamos buscar uma translação de eixos tal que as coordenadas x, y, z passem para r, s, t, obedecendo

$$x = r + h, \quad y = s + k, \quad z = t + m$$

para que os termos do primeiro grau desapareçam. Façamos

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, z) &= \varphi(r + h, s + k, t + m) \\
&= \overline{\varphi}(r, s, t) \\
&= A(r + h)^2 + B(s + k)^2 + C(t + m)^2+ \\
&\quad +G(r + h) + H(s + k) + I(t + m) + J \\
&= Ar^2 + Bs^2 + Ct^2 + G'r + H's + I't + J',
\end{aligned}$$

sendo

$$G' = 2Ah + G$$
$$H' = 2Bk + H$$
$$I' = 2Cm + I$$

Agora, vamos analisar quatro casos.

18.2 A, B e C são diferentes de zero

Tomando $h = -\dfrac{G}{2A}$, $k = -\dfrac{H}{2B}$ e $m = -\dfrac{I}{2C}$, obtemos $G' = H' = I' = 0$, além de a equação $\varphi(x, y, z) = d$ se reduzir a $Ar^2 + Bs^2 + Ct^2 = d - J'$. Portanto, a superfície de nível de φ é uma das quádráticas centrais já estudadas nas aulas **16** e **17**.

18.3 Apenas um dos coeficientes A, B, C é zero e os outros dois têm o mesmo sinal

Vamos admitir que se $C = 0$ (sem perda de generalidade) e $AB > 0$ (ou seja, têm mesmo sinal), temos

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + Iz + J.$$

Com a mudança de coordenadas $x = r - \dfrac{G}{2A}$, $y = s - \dfrac{H}{2B}$ (mantendo z), obtemos

$$\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}(r, s, z) = Ar^2 + Bs^2 + Iz + J'.$$

Observe as condições a seguir:

$I = 0 \;\rightarrow\;$ a função é escrita como $A'r^2 + B's^2 + J'$, e assim, $\varphi(x, y, z) = d$ (ou seja, $A'r^2 + B's^2 = d - J'$) representa:

1. um cilindro vertical de base elíptica quando $d - J'$, A e B têm mesmo sinal;

2. um conjunto vazio se $d-J'$,A e B não têm mesmo sinal;
3. e a reta vertical $r = s = 0$ (ou seja, $x = -\dfrac{G}{2A}$, $y = -\dfrac{H}{2B}$ se $d = J'$).

$I \neq 0 \ \rightarrow$ Neste caso, $\varphi(x, y, z) = d$ se expressa, dependendo de r, s e t, por

$$Ar^2 + Bs^2 + Iz + J' = d \quad \Rightarrow$$

$$Iz = -Ar^2 - Bs^2 - J' + d \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{A}{I}r^2 - \frac{B}{I}s^2 + \frac{d - J'}{I}$$

ponto, $A' = -\dfrac{A}{I}$, $B' = -\dfrac{B}{I}$ e $p = \dfrac{d - J'}{I}$ obtemos

$$z = A'r^2 + B's^2 + p.$$

Definição 18.53. A superfície represtentada por $z = A'r^2 + B's^2 + p$ é denominada de um **parabolóide elíptico**.

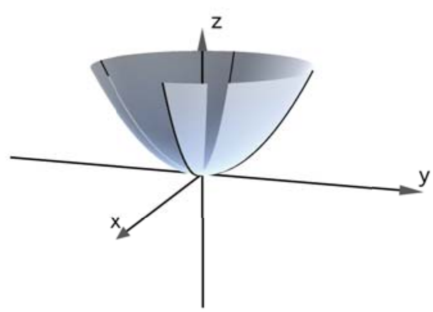

Figura 18.134: Parabolóide $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \ z = x^2 + y^2\}$.

Observação 29. Um parabolóide tem concavidade voltada para cima se A' e B' são positivos e para baixo se A' e B' forem negativos.

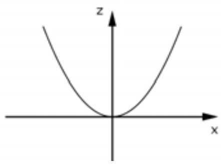

Figura 18.135: $\mathcal{P} \cap$ plano $- xz$.

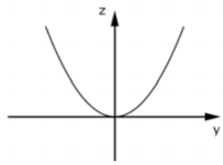

Figura 18.136: $\mathcal{P} \cap$ plano $- yz$.

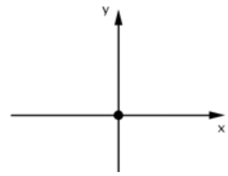

Figura 18.137: $\mathcal{P} \cap$ plano $- xy$.

Exemplo 18.3.1. Qual será a superfície representada pela equação $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 2z + 1 = 0$? Vamos efetuar a mudança de coordenadas, $x = r - \dfrac{G}{2A}$, $y = s - \dfrac{H}{2B}$. Ou seja, $x = r - 2$ e $y = s + 1$, substituindo na equação

$$(r-2)^2 + 2(s+1)^2 + 4(r-2) - 4(s+1) + 2z + 1 = 0,$$

e expandindo os quadrados anteriores, obtemos

$$r^2 + 2s^2 + 2z - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{1}{2}r^2 - s^2 + \frac{5}{2}.$$

E assim, percebemos que a superfície representada pela equação anterior é um cilindro parabólico.

18.4 Apenas um dos coeficientes A, B, C é nulo e os outros dois têm sinais opostos

Suponhamos (sem perda de generalidade) que $C = 0$ e temos

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Gx + Hy + Iz + J,$$

sendo $AB < 0$. Como em (18.3), uma translação dos eixos nos dá

$$\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}(x, y, z) = Ar^2 + Bs^2 + Iz + J'.$$

Podemos ainda verificar as seguintes possibilidades:

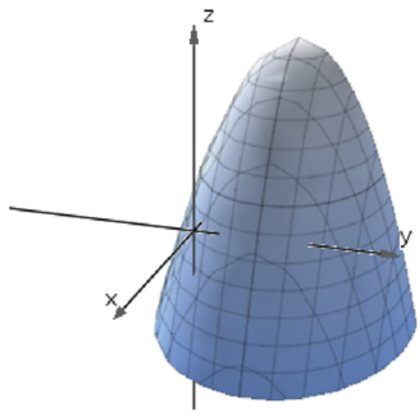

Figura 18.138: $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 2z + 1 = 0$.

$I = 0 \;\rightarrow$ da equação $\varphi(x, y, z) = d \Rightarrow Ar^2 + Bs^2 = d - J'$, o que representa um cilindro vertical com base hiperbólica ou um par de planos que se intersectam na reta vertical $r = s = 0$ se $d = J'$.

$I \neq 0 \;\rightarrow$ de $\varphi(x, y, z) = d \Rightarrow A'r^2 + B's^2 + p = z$, com $A' = -\dfrac{A}{I}$, $B' = -\dfrac{B}{I}$ e $p = -\dfrac{d - J'}{I}$ (lembrando que A e B têm sinais opostos, implica que A' e B' também o têm).

Definição 18.54. A superfície representada pela equação $z = A'r^2 + B's^2 + p$ (A' e B' com sinais opostos) é um **parabolóide hiperbólico** (também conhecida como **sela**, devido ao formato de uma sela de cavalo). É gerada por uma parábola que se desloca paralelamente com seu vértice deslizando sobre outra parábola com concavidade invertida.

Exemplo 18.4.1. Qual será a superfície representada pela equação $3x^2 - 2y^2 + 6xy + x + 2z = 1$? Para descobrirmos, primeiramente vamos efetuar o processo de eliminação do termo xy, que

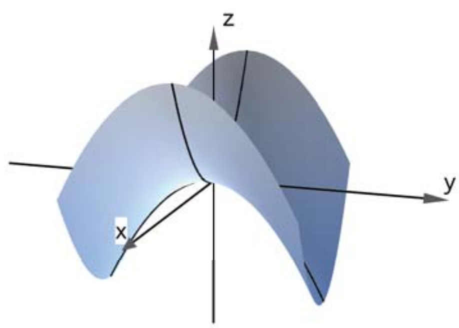

Figura 18.139: $z = x^2 - y^2$

aprendemos na **Aula 17** (Completando Quadrados). Deste modo, façamos

$$0 = 3x^2 - 2y^2 + 6xy + x + 2z - 1 \quad 3(x^2 + 2xy) - 2y^2 + x + 2z - 1$$
$$3(x + y)^2 - 3y^2 - 2y^2 + x + 2z - 1$$

Tomando $r_0 = x + y$ (implicando que $x = r_0 - y$), obtemos

$$3r_0^2 - 5y^2 + r_0 - y + 2z - 1 = 0.$$

Note que nesta equação $A = 3$, $B = -5$, $C = E = E = F = 0$, $G = 1$, $H = -1$, $I = 2$ e $J = -1$. Agora, queremos eliminar os termos lineares (os que têm x e y, ou seja G e H). Para isso, como sugerido na seção (18.3), introduzimos as mudanças de coordenadas

$$\begin{array}{l} r_0 = r - \frac{G}{2A} \\ y = s - \frac{H}{2B} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} r_0 = r - \frac{1}{6} \\ y = s - \frac{1}{10} \end{array}$$

Substituindo

$$3\left(r - \frac{1}{6}\right)^2 - 5\left(s - \frac{1}{10}\right)^2 + \left(r - \frac{1}{6}\right) - \left(s - \frac{1}{10}\right) + 2z - 1 = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$3r^2 - 5s^2 + 2z - \frac{31}{30} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$z = -\frac{3}{2}r^2 + \frac{5}{2}s^2 + \frac{31}{60}$$

Portanto, a superfície é um parabolóide hiperbólico.

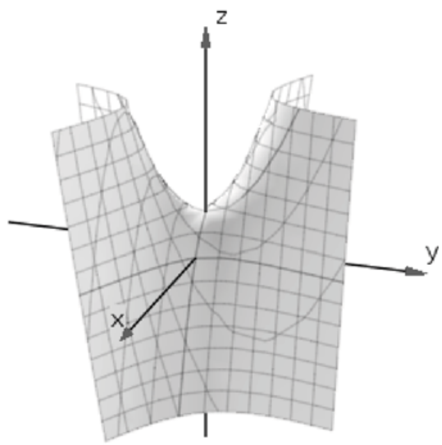

Figura 18.140: $3x^2 - 2y^2 + 6xy + x + 2z = 1$.

18.5 Um dos coeficientes A, B, C é diferente de zero e os outros dois são nulos

Considerando $A \neq 0$ e $B = C = 0$, a função quadrática é dada por

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + Gx + Hy + Iz + J.$$

Efetuando a mudança de coordenadas $x = r - \dfrac{G}{2A}$ e mantendo y e z, fica

$$\varphi(x, y, z) = \overline{\varphi}(r, y, z) = Ar^2 + Hy + Iz + J.$$

1. Se $H = I = 0$, $\varphi(x, y, z) = d \Rightarrow r^2 = \dfrac{d - J'}{A}$, o que define:

   (a) se $\dfrac{d - J'}{A} > 0$, um par de planos perpendiculares ao eixo$-x$;

   (b) se $d = J'$, um único plano ou

   (c) se $\dfrac{d - J'}{A} < 0$, o conjunto vazio.

2. Suponhamos que um dos coeficientes H, I seja não nulo, isto é, $I \neq 0$. Assim,

   $$\varphi(x, y, z) = d \quad \Rightarrow \quad Ar^2 + Hy + Iz + J' = d \quad \Rightarrow \quad z = A'r^2 + H'y + p$$

   com $A' = -\dfrac{A}{I}$, $A' = -\dfrac{H}{I}$ e $p = -\dfrac{d - J'}{I}$, então percebemos que a superfície representada pela equação

   $$Ax^2 + Gx + Hy + Iz + J = d$$

   é o cilindro obtido pelo deslocamento da parábola $z = A'r^2 + p$ (ou seja, $z = A'\left(x + \dfrac{G}{2A}\right) + p$) contida no plano $y = 0$, paralelamente a si mesma, com seu vértice deslizando sobre a reta $z = H'y + p$, situada no plano $r = 0$ (ou seja, $x = -\dfrac{G}{2A}$).

Exemplo 18.5.1. Como verificamos no exemplo 5 da **Aula 17**, a forma quadrática $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz$ pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\varphi = r_0^2 \quad \text{com} \quad r_0 = x + y - 2z.$$

Vamos usar isso para a equação $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz - x + y + z = 1$, sendo $x = r_0 - y + 2z$, notamos que

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz - x + y + z = 1 \quad \Rightarrow \quad r_0^2 - (r_0 - y + 2z) + y + z = 1$$

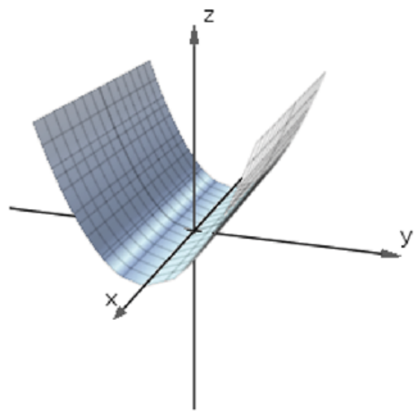

Figura 18.141: Nesta ilustração, $z = x^2$.

e assim, a equação fica $r_0^2 - r_0 + 2y - z = 1$. Façamos, agora, a seguinte translação:

$$r_0 = r - \frac{(-1)}{2 \cdot 1} = r + \frac{1}{2}$$

e obteremos

$$\left(r + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(r + \frac{1}{2}\right) - y + z = 1 \;\Rightarrow\; r^2 - y + z = \frac{5}{4} \;\Rightarrow\; z = r^2 - y - \frac{5}{4}$$

E assim, a superfície representada pela equação $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz - x + y + z = 1$ é um cilindro parabólico.

18.6 Resumo

Nesta aula, aprendemos que é possível associar uma equação geral do segundo grau com três variáveis a algumas superfícies (quádricas centrais e parabolóides). Além disso, verificamos que essas superfícies podem ser mais claramente identificadas se efetuarmos mudanças de variáveis.

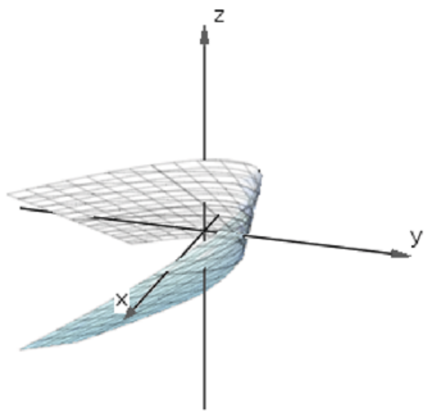

Figura 18.142: $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz - x + y + z = 1$.

18.7 Atividades

1. Usando a técnica de completamento de quadrados, identifique as superfícies de nível definidas por cada uma das equações a seguir:

   (a) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$;

   (b) $x^2 + xy - 2xz + yz = 0$;

   (c) $y^2 - 2z^2 + 2\sqrt{3}yz - 2 = 0$;

   (d) $3x^2 + 3z^2 + 2xz = 2$;

18.8 Comentário das atividades

Nesta única atividade com 4 itens, você poderá exercitar seus conhecimentos a respeito dos 4 tipos de classificações para as equações do segundo grau com três variáveis.

Caso haja dificuldades na resolução da atividade, retome os conteúdos estudados durante esta aula e não se esqueça de que há tutores para ajudá-lo com as dúvidas.

18.9 Referências

BOLDRINI, José Luiz, *Álgebra Linear* . São Paulo: Harbra, 1980.
LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books,1987.