2
LIVRO

20
AULA

Aplicações de Transformações Lineares

META

Apresentar alguns exemplos de transformações lineares e suas propriedades.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá reconhecer alguns exemplos de transformações lineares.

PRÉ-REQUISITOS

Ter compreendido o conceito de transfomação linear estudado na aula anterior.

20.1 Introdução

Olá, caro aluno! Nesta aula, conheceremos três aplicações das transformações lineares. A primeira refere-se a uma aplicação na Física, especificamente na reflexão de raios de luz em espelhos planos. No segundo exemplo, estudaremos uma técnica, muitas vezes usada intuitivamente, para projetar para o plano objetos que estão no espaço. Já no último exemplo, verificaremos que através do auxílio de uma transformação linear é possível construirmos um método de codificar mensagens para serem compreendidas apenas pelo emissor e pelo receptor.

20.2 Aplicações à Óptica

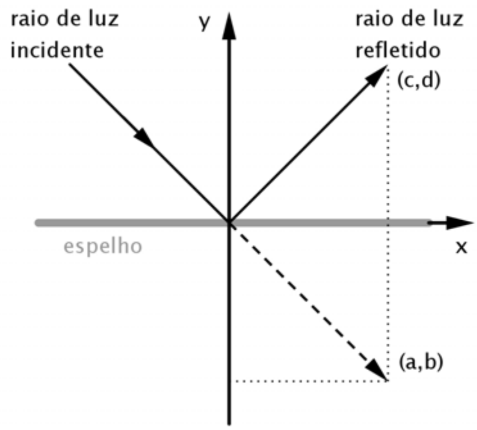
Consideremos um feixe de raios paralelos (cuja direção pode, portanto, ser dada por um vetor) que se reflete em espelhos planos.

Vamos observar a situação mais simples possível: a propagação se dá no $\mathbb{R}^2$ (isto é, estamos observando o fenômeno de perfil) e o espelho está colocado no eixo horizontal, como ilustrado na figura a seguir.

Dado um raio de luz incidente na direção do vetor $\vec{v} = (a, b)$, em que direção (c, d) estará o raio refletido? Antes de respondermos à pergunta anterior, vamos relembrar um pouco sobre as leis que regem a reflexão da luz em um espelho.

(I) O raio de luz incidente, a reta normal ao espelho, o ponto de incidência e o raio refletido estão no mesmo plano.

(II) O ângulo entre o raio incidente e a reta normal ao espelho é o mesmo que o ângulo entre a reta normal e o raio refletido.



(III) Supondo que o espelho seja perfeito, isto é, não há absorção da luz, a luz se reflete com a mesma intensidade que tinha na incidência.

Observação 30. Munidos dessas leis, para o nosso caso, não precisaremos nos preocupar com (I), pois a propagação acontece sobre um plano. Se o comprimento do vetor indicar a intensidade da luz, (III) então o vetor refletido terá o mesmo tamanho que o incidente. Juntando estas informações com (II), implica que $c = a$ e $d = -b$, ou, em forma matricial

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

E assim, concluímos que um espelho plano atua sobre os raios luminosos como uma transformação linear R (na verdade, uma reflexão em torno do eixo$-x$).

Vamos estudar a matriz associada a um espelho numa posição um pouco mais geral (veja a figura (20.149)), ou seja, formando um ângulo θ com o eixo$-x$.

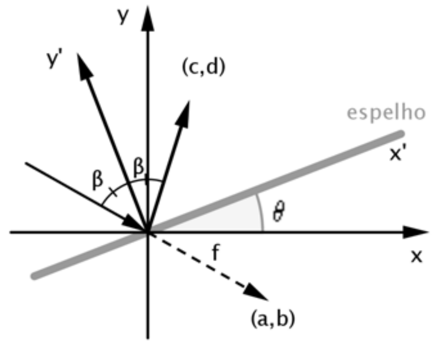


Figura 20.149: θ é o ângulo entre o eixo$-x$ e o espelho.

Note que as retas (raios luminosos) que seguem a direção dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^2$, $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$ são refletidas sobre o espelho, como ilustradas nas figuras (20.150) e (20.151). Colocando os vetores refletidos em coluna, obteremos a matriz da transformação.

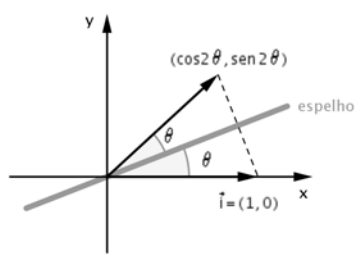


Figura 20.150: Reflexão do raio de luz na direção $\vec{i}$.

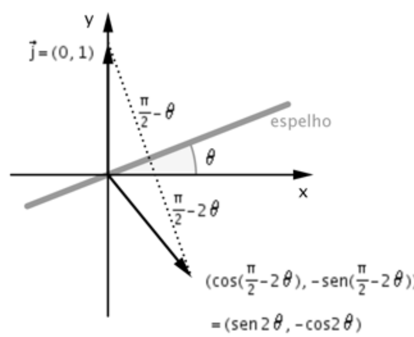


Figura 20.151: Reflexão do raio de luz na direção $\vec{j}$.

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Havendo mais de um espelho, como proceder neste caso? Simplesmente aplicando sucessivas transformações associadas a cada ângulo que cada espelho faz com o eixo$-x$.

Exemplo 20.2.1. Um feixe de luz se propaga na direção do vetor $(1,-1)$ refletindo nos espelhos da figura (20.152):

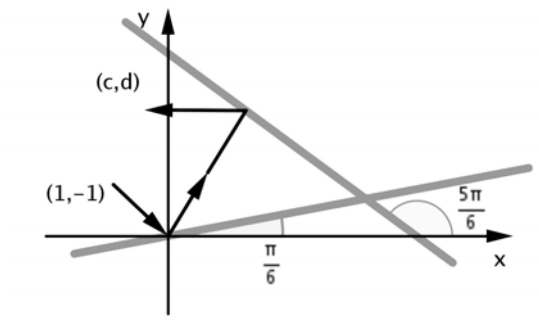


Figura 20.152:

Em que direção estará o feixe após as reflexões? Para responder, faremos $\theta_1 = \dfrac{\pi}{6}$ e $\theta_2 = \dfrac{5\pi}{6}$ e ainda

$$\begin{array}{rccl} R_{\theta_1}: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{v} & \mapsto & R_{\theta_1}(\vec{v}) = M_1\vec{v} \end{array} \quad \text{com} \quad M_1 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta_1 & \operatorname{sen} 2\theta_1 \\ \operatorname{sen} 2\theta_1 & -\cos 2\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rccl} R_{\theta_2}: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{u} & \mapsto & R_{\theta_2}(\vec{u}) = M_2\vec{u} \end{array} \quad \text{com} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta_2 & \operatorname{sen} 2\theta_2 \\ \operatorname{sen} 2\theta_2 & -\cos 2\theta_2 \end{pmatrix}$$

Desta forma, se $\vec{v} = (a,b)$ e $\vec{u} = (c,d)$,

$$R_{\frac{\pi}{6}}(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$R_{\frac{5\pi}{6}}(c,d) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

E assim, o vetor é refletido primeiramente com a transformação $R_{\frac{\pi}{6}}$ e, logo em seguida, por $R_{\frac{5\pi}{6}}$.

$$R_{\frac{\pi}{6}}(1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad R_{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

Concluímos que o feixe estará na direção do vetor $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

20.3 Projeção do espaço tridimensional no plano

Você já se perguntou como funcionam os jogos em 3D e como são feitos os filmes de animação computadorizada também em 3D? É bem provável que sim, já que eles fazem parte da realidade de muitos jovens e são capazes de dispertar a curiosidade sobre o seu funcionamento e produção.

Agora, vamos conhecer um pouco sobre uma das técnicas que enganam nossa intuição e nos fazem imaginar que figuras que estão no plano aparentam ser tridimensionais.

Quando vemos um objeto tridimensional representado(desenhado) numa folha de papel ou mesmo no computador, trata-se de uma mera ilusão para ajudar em nossa intuição, mas, na verdade, tanto o plano(papel) quanto a tela do computador(ou da televisão) são todos bidimensionais, ou seja, têm apenas 2 dimensões e podem ser representadas por um plano cartesiano (como na **Aula 2**). Porém, para possibilitar essa representação de um objeto em 3D, é necessária uma projeção no plano. Esta técnica (ou similar) é bastante usada em boa parte dos programas de computador a fim de criar imagens tridimensionais e também intuitivamente ao desenharmos a mão no papel.

Comecemos ilustrando a técnica em um único ponto P. Sejam $P=(x_0,y_0,z_0)$ e $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ um vetor fixado. Chamaremos

$\vec{v}$ de o **vetor de visão**, ou seja, é como se o observador estivesse olhando na direção de $\vec{v}$.(Veja na figura (20.153).)

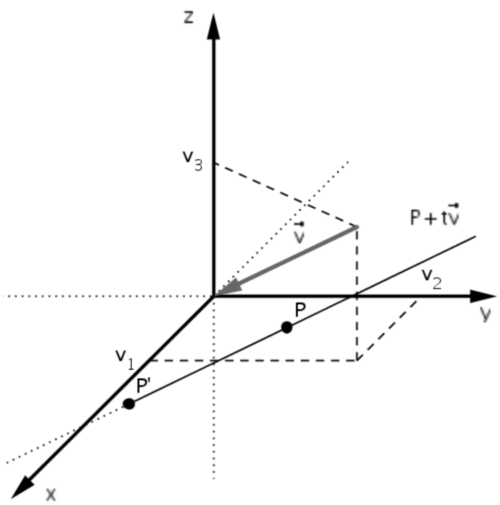


Figura 20.153: Vetor de visão $\vec{v}$.

Considere agora l uma reta com a direção de $\vec{v}$ passando por P, ou seja,

$$l : P + tv.$$

Na forma parametrizada, seria

$$l : \begin{cases} x_0 + v_1 t \\ y_0 + v_2 t \\ z_0 + v_3 t \end{cases}.$$

Agora, vamos escolher um plano para projetar o ponto P. Para simplificar nossa vida (nossos cálculos), escolhemos o plano $z = 0$. Deste modo, façamos

$$z_0 + v_3 t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{z_0}{v_3},\ \forall v_3 \neq 0.$$

Perceba que para o observador ver a figura no plano, ele deverá estar acima ou abaixo desse plano, o que sugere $v_3 \neq 0$. No caso em que $v_3 = 0$, devemos escolher outro plano para a projeção e não o plano $z = 0$.

Com isso, a projeção do ponto P será o ponto P', como

$$P' = \left(x_0 + v_1\left(\frac{-z_0}{v_3}\right), y_0 + v_2\left(\frac{-z_0}{v_3}\right)\right). \tag{20.1}$$

Vamos à prática tomando um cubo de arestas com comprimento 1 no $\mathbb{R}^3$ e cujos vértices são dados por

$$\begin{array}{ll} V_1 = (0,0,0) & V_5 = (0,0,1) \\ V_2 = (1,0,0) & V_6 = (1,0,1) \\ V_3 = (1,1,0) & V_7 = (1,1,1) \\ V_4 = (0,1,0) & V_8 = (0,1,1) \end{array}$$

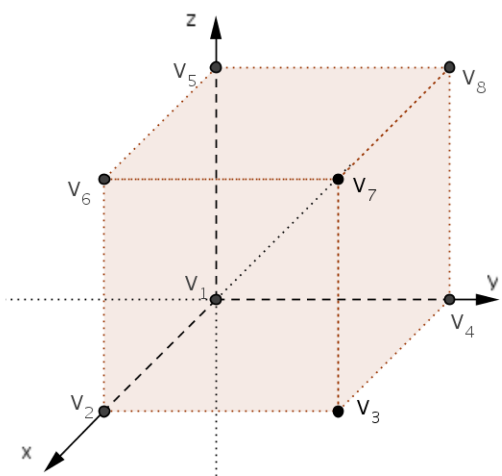


Figura 20.154: Cubo com vértices contidos no espaço.

Definimos uma transformação $T_{\vec{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ por

$$T_{\vec{v}}(x,y,z) = \left(x + v_1\left(\frac{-z}{v_3}\right), y + v_2\left(\frac{-z}{v_3}\right)\right), \tag{20.2}$$

com $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ fixado e $v_3 \neq 0$.

Para cada vértice, tomando $\vec{v} = (1, 2, 1)$, temos a transformação

$$T_{\vec{v}}(x, y, z) = (x - z, y - 2z)\,.$$

E as imagens dos vértices projetadas no plano $z = 0$ são dadas por

$$\begin{array}{ll} T_{\vec{v}}(V_1) = (0, 0) & T_{\vec{v}}(V_5) = (-1, -2) \\ T_{\vec{v}}(V_2) = (1, 0) & T_{\vec{v}}(V_6) = (0, -2) \\ T_{\vec{v}}(V_3) = (1, 1) & T_{\vec{v}}(V_7) = (0, -1) \\ T_{\vec{v}}(V_4) = (0, 1) & T_{\vec{v}}(V_8) = (-1, -1) \end{array}$$

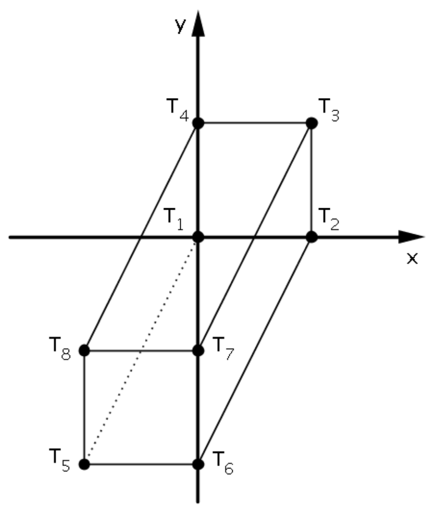


Figura 20.155: Cubo projetado no plano $z = 0$, com vértices $T_i = T_{\vec{v}}(V_i)$, sendo $i = 1, .., 8$.

As imagens dos pontos V_1, V_2, V_3 e V_4 já eram esperadas, pois todos esses pontos já pertencem ao plano $z = 0$.

20.4 Codificando mensagens

Constantemente, enviamos e recebemos mensagens. Mas o que deveríamos fazer para que a mesma mensagem fosse lida (ou entendida) apenas pelo destinatário?

Durante o período de apogeu do Império Romano, os romanos já usavam uma técnica similar para enviar mensagens aos campos de batalha. Existem diversas técnicas para codificar mensagens, as mais atuais são usadas no envio de mensagens eletrônicas (e-mail) ou mesmo para acessarmos uma conta no caixa eletrônico do banco.

Vamos conhecer uma técnica similar, mas que envolverá um pouco do seu conhecimento de produto entre matrizes. Primeiramente, vamos associar as letras do alfabeto aos números, segundo a correspondência abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	0	P
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Vamos supor que nossa mensagem seja “EU TE AMO” (Original, não?) e, a partir dela, vamos formar a matriz 3×3 assim:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{U} & - \\ \mathrm{T} & \mathrm{E} & - \\ \mathrm{A} & \mathrm{M} & \mathrm{O} \end{pmatrix},$$

que usando a correspondência numérica anterior, e fazendo o espaço vazio corresponder ao número zero, fica

$$\begin{pmatrix} 5 & 20 & 0 \\ 19 & 5 & 0 \\ 1 & 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Agora, seja C uma matriz qualquer 3×3 invertível, por exemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Efetuando o produto

$$M \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 0 \\ 19 & 5 & 0 \\ 1 & 12 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -15 & 35 \\ -19 & 14 & 62 \\ 27 & -25 & 15 \end{pmatrix}$$

Transmitindo a mensagem que será a seguinte sequência de números

$$-5 \quad -15 \quad 35 \quad -19 \quad 14 \quad 62 \quad 27 \quad -25 \quad 15$$

Quem receber essa mensagem poderá decodificá-la através da multiplicação pela matriz inversa de C, isto é,

$$(M \cdot C) \cdot C^{-1} = M$$

e depois, basta passar da matriz numérica para as letras usando a associação inicial.

Na linguagem de Transformações, podemos codificar uma dada mensagem de m letras, com $m = n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Seja $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n com entradas reais, e

$$\begin{array}{rlll} T_n: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & T_n(M) = M \cdot C \end{array} \qquad \text{[Codificando uma mensagem]}$$

e aproveitando a oportunidade, definimos

$$\begin{array}{rlll} T'_n: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & N & \mapsto & T'_n(N) = N \cdot D \end{array} \qquad \text{[Decodificando uma mensagem]}$$

com $D = C^{-1}$.

Note que se você quisesse enviar a mensagem "ESTOU APRENDENDO", com 16 caracteres (incluindo o espaço vazio), não seria possível usar uma matriz 3×3 ilustrada anteriormente. Você deveria usar uma matriz 4×4, no mínimo. Já no caso da mensagem "UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL", que tem 29 caracteres, devemos usar uma matriz 6×6.

$$\begin{pmatrix} E & S & T & O \\ U & - & A & P \\ R & E & N & D \\ E & N & D & O \end{pmatrix}_{4\times4} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} U & N & I & V & E & R \\ S & I & D & A & D & E \\ - & A & B & E & R & T \\ A & - & D & O & - & B \\ R & A & S & I & L & - \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}_{6\times6}$$

20.5 Resumo

Nesta aula, você conheceu mais três aplicações das transformações lineares. A primeira foi uma aplicação à Óptica, uma técnica para projetar objetos de 3D em 2D, e a segunda um método de codificar mensagens.

20.6 Atividades

1. Um espelho plano está apoiado em uma parede vertical formando um ângulo de 30^0 com ela. Se um feixe de luz de raios paralelos for emitido verticalmente (do teto para o chão), determine a direção dos raios refletidos.

2. Use $\vec{v} = (1, 2, 1)$ como vetor de visão e, usando o mesmo

método para projeção de um ponto no $\mathbb{R}^3$ para o $\mathbb{R}^2$, faça o que se pede a seguir.

(a) Calcule e esboce as projeções:

i. do ponto $P = (1, 0, 1)$;

ii. da reta $r : (1 + t, 2t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$;

iii. do triângulo constituído pelos pontos $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ e $P_1 = (0, 1, 0)$;

(b) O que aconteceria com cada uma destas imagens se nestas projeções usarmos o vetor de visão, $\vec{v} = (1, 0, 1)$?

3. Os itens a seguir dizem respeito à seção (20.4).

(a) Você recebeu a mensagem

$$\begin{pmatrix} 22 & -19 & 29 \\ -15 & 16 & 51 \\ -3 & -6 & 95 \end{pmatrix}$$

Utilizando a mesma chave C, traduza a mensagem.

(b) O inimigo descobriu sua chave. O seu comandante manda você substituir a matriz por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Você transmite a mensagem "ATACAR" a ele (já codificada). Porque não lhe será possível (o comandante) decodificar a mensagem?

(c) Escolha uma matriz-chave que permita codificar palavras até 25 letras. Codifique e decodifique a vontade!

20.7 Comentário das atividades

Se você resolveu a atividade 1, então entendeu a aplicação de transformações lineares proposta na seção (20.2). Na atividade 2, você deve ter usado a transformação definida na seção (20.3) e na 3, você entendeu como codificar e decodificar mensagens usando uma transformação linear cujos elementos do domínio são matrizes.

Caso tenha maiores dificuldades para resolver as atividades, retome os assuntos discutidos durante esta aula. Lembre-se de que você poderá tirar suas dúvidas com os tutores, eles sempre estarão a sua disposição. E não se esqueça de discutir as questões com seus colegas, pois essa prática também contribui para a interação entre vocês.

20.8 Referências

BOLDRINI, José Luiz, *Álgebra Linear* . São Paulo: Harbra, 1980.
LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books,1987.