Algebra Linear II

Danilo Felizardo Barboza
Wilberclay Gonçalves Melo

CESAD
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2011

Algebra Linear II

Elaboração de Conteúdo
Danilo Felizardo Barboza
Wilberclay Gonçalves Melo

Projeto Gráfico
Neverton Correia da Silva
Nycolas Menezes Melo

Capa
Hermeson Alves de Menezes

FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

B238a Barboza, Danilo Felizardo
Álgebra linear II / Danilo Felizardo Barboza, Wilberclay Gonçalves Melo. -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.

1. Álgebra linear. 2. Cálculo vetorial. 3. Projeção ortogonal. 4. Operadores lineares. I. Melo, Wilberclay Gonçalves. II. Título.

CDU 512

Presidente da República
Dilma Vana Rousseff

Ministro da Educação
Fernando Haddad

Diretor de Educação a Distância
João Carlos Teatini Souza Clímaco

Reitor
Josué Modesto dos Passos Subrinho

Vice-Reitor
Angelo Roberto Antoniolli

Chefe de Gabinete
Ednalva Freire Caetano

Coordenador Geral da UAB/UFS
Diretor do CESAD
Antônio Ponciano Bezerra

coordenador-adjunto da UAB/UFS
Vice-diretor do CESAD
Fábio Alves dos Santos

Diretoria Pedagógica
Clotildes Farias de Sousa (Diretora)

Diretoria Administrativa e Financeira
Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)
Sylvia Helena de Almeida Soares
Valter Siqueira Alves

Coordenação de Cursos
Djalma Andrade (Coordenadora)

Núcleo de Formação Continuada
Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

Núcleo de Avaliação
Hérica dos Santos Matos (Coordenadora)

Núcleo de Tecnologia da Informação
João Eduardo Batista de Deus Anselmo
Marcel da Conceição Souza
Raimundo Araujo de Almeida Júnior

Assessoria de Comunicação
Guilherme Borba Gouy

Coordenadores de Curso
Denis Menezes (Letras Português)
Eduardo Farias (Administração)
Paulo Souza Rabelo (Matemática)
Hélio Mario Araújo (Geografia)
Lourival Santana (História)
Marcelo Macedo (Física)
Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

Coordenadores de Tutoria
Edvan dos Santos Sousa (Física)
Raquel Rosário Matos (Matemática)
Ayslan Jorge Santos da Araujo (Administração)
Carolina Nunes Goes (História)
Viviane Costa Felicíssimo (Química)
Gleise Campos Pinto Santana (Geografia)
Trícia C. P. de Sant'ana (Ciências Biológicas)
Vanessa Santos Góes (Letras Português)
Lívia Carvalho Santos (Presencial)
Adriana Andrade da Silva (Presencial)

NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO

Hermeson Alves de Menezes (Coordenador)
Marcio Roberto de Oliveira Mendonça
Neverton Correia da Silva
Nycolas Menezes Melo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. “José Aloísio de Campos”
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

Capítulo 1

Produto Interno e Norma de um Vetor

Curso: Licenciatura em Matemática

Professor-autor: Danilo Felizardo Barboza
Wilberclay Gonçalves Melo

Disciplina: Álgebra Linear II

Unidade II

Aula 1: Produto Interno e Norma de um Vetor

Meta

Estender os conceitos de produto escalar e comprimento de vetores para espaços vetoriais arbitrários.

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de calcular o produto interno entre elementos de um espaço vetorial bem como determinar sua norma.

Pré-requisitos

Álgebra Linear I.

1.1 Introdução

Caro aluno, no curso de Vetores e Geometria Analítica, você estudou um produto especial entre dois vetores de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$), denominado produto escalar, que permitia introduzir a ideia de distância, comprimento de um vetor e ângulo entre dois vetores. Nesta disciplina estenderemos esta noções para um espaço vetorial arbitrário, obtendo assim uma estrutura mais rica, denominada espaço vetorial com produto interno. Em todo o curso trabalharemos apenas sobre o corpo dos números reais, fazendo algumas observações no caso complexo.

1.2 Definição de Produto Interno e Exemplos

Definição 1.1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa dois vetores $u, v \in V$ a um único número $\langle u, v \rangle$ real, é um produto interno sobre V, se esta satisfaz as seguintes condições:

i) (Distributividade) $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$, para todos $u, v, w \in V$;

ii) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, para todos $u, v \in V$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$;

iii) (Comutatividade) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, para todos $u, v \in V$;

iv) (Positividade) $\langle v, v \rangle \geq 0$, para todo $v \in V$;

v) $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = \mathbf{0}$.

Quando munimos o espaço vetorial V de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dizemos que V é um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou que V é um espaço Euclidiano.

Obs 1.1 (Produto Interno sobre $\mathbb{C}$)**.** Poderíamos ter definido produto interno num espaço vetorial V sobre $\mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos), chamado produto interno Hermitiano, como sendo uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ que verifica os itens **i**), **ii**), **iv**) e **v**), mas ao invés do item **iii)**, obtemos a veracidade de

iii') $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, para todos $u, v \in V$, onde $\overline{\langle v, u \rangle}$ significa o conjugado do número complexo $\langle v, u \rangle$.

Exemplo 1.1. Seja $V = \mathbb{R}^2$ o espaço vetorial com a adição de vetores e multiplicação por escalar usuais, ou seja, $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ e $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Defina $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2$. Afirmamos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$ (dito produto interno canônico de $\mathbb{R}^2$). Com efeito, sejam $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$, $w = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$
\begin{aligned}
\textbf{i)}\ \langle u + w, v \rangle &= \langle (x_1, x_2) + (z_1, z_2), (y_1, y_2) \rangle \\
&= \langle (x_1 + z_1, x_2 + z_2), (y_1, y_2) \rangle && \text{(definição de adição)} \\
&= (x_1 + z_1) y_1 + (x_2 + z_2) y_2 && \text{(definição de produto interno)} \\
&= x_1 y_1 + z_1 y_1 + x_2 y_2 + z_2 y_2 && \text{(distributividade em } \mathbb{R}\text{)} \\
&= (x_1 y_1 + x_2 y_2) + (z_1 y_1 + + z_2 y_2) && \text{(associatividade da adição em} \mathbb{R}\text{)} \\
&= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle + \langle (z_1, z_2), (y_1, y_2) \rangle && \text{(definição de produto interno)} \\
&= \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle.
\end{aligned}
$$

Na verificação das demais propriedades que compõem a definição de produto interno justifique cada passagem, conforme item anterior.

$$
\begin{aligned}
\textbf{ii)}\ \langle \lambda u, v \rangle &= \langle \lambda (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle \\
&= \langle (\lambda x_1, \lambda x_2), (y_1, y_2) \rangle \\
&= (\lambda x_1) y_1 + (\lambda x_2) y_2 \\
&= \lambda (x_1 y_1 + x_2 y_2) \\
&= \lambda \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle \\
&= \lambda \langle u, v \rangle,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\textbf{iii)}\ \langle u, v\rangle &= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle \\
&= x_1y_1 + x_2y_2 = y_1x_1 + y_2x_2 \\
&= \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2)\rangle \\
&= \langle v, u\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{iv)}\ \langle v, v\rangle &= \langle (y_1, y_2), (y_1, y_2)\rangle \\
&= y_1y_1 + y_2y_2 \\
&= y_1^2 + y_2^2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{v)}\ \langle v, v\rangle &= 0 \\
&\Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow y_1, y_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow v = (y_1, y_2) = (0, 0) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Em particular, $\langle (1, 0), (1, -1)\rangle = 1 \cdot 1 + 0(-1) = 1$ e $\langle (1, 0), (0, 1)\rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

Exemplo 1.2. Podemos generalizar o resultado anterior para o espaço vetorial

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, n\}$$

com adição de vetores e multiplicação por escalar usuais, isto é,

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

e

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Defina $\langle \cdot, \cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Seguindo os mesmos passos do Exemplo 1.1 é possível provar que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é um produto interno sobre $\mathbb{R}^n$ (chamado produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$). Em particular,

$$\langle (1, 0, ..., 0, 2), (1, 0, ..., 0, -1)\rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + ...0 + +2(-1) = -1.$$

Exemplo 1.3. Seja $V = C([a,b])$ o espaço vetorial das funções reais contínuas em $[a,b]$ com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar usuais, ou seja,

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \text{ e } (\lambda f)(t) = \lambda f(t),$$

para todo $t \in [a,b]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Defina a seguinte aplicação

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt,$$

onde $f, g \in V$ (este é o produto interno canônico de $C([a,b])$). Vamos provar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno. De fato, se $f, g, h \in C([a,b])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}
\textbf{i)} \langle f+g, h \rangle &= \int_a^b [f+g](t)h(t)dt \\
&= \int_a^b [f(t)+g(t)]h(t)dt \\
&= \int_a^b [f(t)h(t)+g(t)h(t)]dt \\
&= \int_a^b f(t)h(t)dt + \int_a^b g(t)h(t)dt \\
&= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle.
\end{aligned}$$

ii) $\langle \lambda f, h \rangle := \int_a^b (\lambda f)(t)h(t)dt = \int_a^b \lambda f(t)h(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)h(t)dt =: \lambda \langle f, h \rangle.$

iii) $\langle f, h \rangle := \int_a^b f(t)h(t)dt = \int_a^b h(t)f(t)dt =: \langle h, f \rangle.$

iv) $\langle f, f \rangle := \int_a^b f(t)f(t)dt = \int_a^b f(t)^2 dt \geq 0.$

v) $\langle f, f \rangle = 0$ se, e somente se, $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$. Mas isto implica que $f(t) = 0$, para todo $t \in [a,b]$. Logo, $f \equiv 0$. (ver item **iv)**) Aqui utilizamos o seguinte resultado para integrais: Se φ é uma função contínua com $\varphi(t) \geq 0$, para todo $t \in [a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)dt = 0$, então $\varphi \equiv 0$.

Em particular, se $f(t) = t$ e $g(t) = 1$, para todo $t \in [0,1]$, então

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 t \cdot 1 dt = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Obs 1.2. Quando nada for dito sobre o produto interno, estaremos usando o produto interno canônico dos espaços vetoriais exemplificados acima.

Exemplo 1.4. Seja $V = M(2 \times 2, \mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes 2×2 com entradas reais. Então definimos sobre V um produto interno por

$$\langle A, B \rangle = tr(B^t A),$$

onde $A, B \in V$. Recorde que o traço de uma matriz quadrada M, denotado por $tr(M)$, é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz M. Convidamos o aluno a verificar que, de fato, esta função satisfaz a definição de produto interno.

Exemplo 1.5. Seja $V = \mathbb{R}^2$ o espaço vetorial com adição de vetores e multiplicação por escalar usuais. Defina $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = -2x_1y_1 + x_2y_2$. Afirmamos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **não é um produto interno** sobre $\mathbb{R}^2$. Com efeito, para $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, temos que $\langle v, v \rangle = \langle (1, 0), (1, 0) \rangle := (-2)1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -2 < 0$, e isto contradiz o item **iv**) da Definição 1.1.

Obs 1.3. Podemos definir vários produtos internos sobre um espaço vetorial. Por exemplo, sobre $\mathbb{R}^2$ poderíamos definir $\langle (a, b), (b, c) \rangle = ac + bc + ad + 3bd$. Verifique!

1.2.1 Propriedades do Produto Interno

Vejamos algumas propriedades do produto interno que decorrem imediatamente de sua definição.

Proposição 1.1. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

i) $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, *para todos $u, v \in V$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$;*

ii) $\langle \mathbf{0}, v \rangle = \langle v, \mathbf{0} \rangle = 0$, *para todo $v \in V$;*

iii) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle v, w \rangle$, *para todos $u, v, w \in V$;*

iv) *Se $\langle u, v \rangle = 0$, para todo $v \in V$, então $u = \mathbf{0}$.*

Demonstração. Sejam $u, v \in V$. Então $\langle u, \lambda v\rangle = \langle \lambda v, u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$, onde nestas igualdades utilizamos os itens **iii)**, **ii)**, **iii)**, da Definição 1.1, respectivamente. Isto prova o item **i)**. Agora, mostremos que o item **ii)** é verdadeiro. De fato, usando o item **i)** e a comutatividade da Definição 1.1, obtemos $\langle \mathbf{0}, v\rangle = \langle v, \mathbf{0}\rangle = \langle v, 0 \cdot \mathbf{0}\rangle = 0\langle v, \mathbf{0}\rangle = 0$, para todo $v \in V$, onde $0 \in \mathbb{R}$ é o número zero e $\mathbf{0} \in V$ é o vetor nulo de V.

Vejamos a demonstração do item **iii**). Sejam $u, v, w \in V$, então

$$\langle u, v + w\rangle = \langle v + w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle,$$

aqui usamos os itens **iii)**, **i)**, **iii)**, da Definição 1.1, respectivamente. Por fim, verifiquemos o item **iv**). Se $\langle u, v\rangle = 0$, para todo $v \in V$, então $\langle u, u\rangle = 0$ (basta considerar $v = u$). Utilizando a Definição 1.1, item **v**), obtemos que $u = \mathbf{0}$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Obs 1.4 (Propriedades em $\mathbb{C}$)**.** Os itens ii), iii) e iv) da Proposição 1.1 continuam sendo válidos em espaços vetoriais com produto interno sobre $\mathbb{C}$, mas o item **i)** tem uma significante modificação:

$$\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle,$$

para todos $u, v \in V$ e todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Pense nisso!!!

Exercícios de Fixação

1. Considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, calcular $\langle u, v\rangle$ nos seguintes casos

i) $u = (\frac{1}{2}, 2, 1)$ e $v = (4, 1, -3)$;

ii) $u = (2, 1, 0)$ e $v = (4, 0, 2)$;

iii) $u = (1, 1, 1)$ e $v = (2, -1, 5)$.

2. Usando o produto interno canônico de $C([0, 1])$ no espaço vetorial formado por polinômios de grau menor que ou igual a 2. Determine o produto escalar de:

i) $f(t) = t$ e $g(t) = 1 - t^2$;

ii) $f(t) = t - \frac{1}{2}$ e $g(t) = \frac{1}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)$.

3. Seja V um espaço vetorial e defina $\langle u, v\rangle = 0$, para todos $u, v \in V$. Prove que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é um produto interno em V.

4. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Sendo $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$, determine um vetor w deste espaço tal que $\langle u, w\rangle = -1$ e $\langle v, w\rangle = 3$.

5. Sendo $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, definamos

$$\langle u, v\rangle := \frac{x_1 y_1}{a^2} + \frac{x_2 y_2}{b^2},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ fixos e não-nulos. Prove que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é um produto interno.

6. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Para quais valores de $t \in \mathbb{R}$ a função dada por $\langle u, v\rangle := x_1 y_1 + t x_2 y_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

7. Sejam $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$ e $g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_n t^n$ polinômios. Defina $\langle f, g\rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + ... + a_n b_n$. $\langle \cdot, \cdot\rangle$. Isto é um produto interno?

8. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$. Então $(u, v) := \lambda\langle u, v\rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u, v \in V$, é um produto interno sobre V?

1.3 Norma de um Vetor

Agora, estenderemos o conceito de comprimento de um vetor, como visto no curso de Vetores e Geometria Analítica para $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, para um espaço vetorial abstrato.

1.3.1 Definição de Norma

Definição 1.2 (Norma)**.** Seja V um espaço vetorial. Uma aplicação $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz

i) $\|v\| \geq 0$, para todo $v \in V$ e $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = \mathbf{0}$;

ii) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$, para todo $v \in V$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$;

iii) (Desigualdade Triangular) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, para todos $u, v \in V$,

é chamada norma sobre V. Quando munimos um espaço vetorial V de uma norma, dizemos que V é um espaço normado.

Proposição 1.2 (Norma sobre um Espaço Euclidiano)**.** *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Então a aplicação $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$, definida por $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$, é uma norma sobre V. Neste caso, dizemos que a norma $\|\cdot\|$ provém do produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Demonstração. Verificaremos as condições estabelecidas Definição 1.2.
i) Seja $v \neq \mathbf{0}$. Então, $\langle v, v\rangle > 0$, pela Definição 1.1. Logo, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} > 0$.

ii) Sejam $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, utilizamos a Definição 1.1 para concluírmos que

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle v, v\rangle} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\lambda|\|v\|.$$

iii) Vamos provar a desigualdade triangular. Note que

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\
&= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\
&= (\|u\| + \|v\|)^2,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o Teorema 1.1. Logo, pelo item **i)**, $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$, para todo $u, v \in V$. □

Em particular, temos os seguintes exemplos de espaços normados.

Exemplo 1.6 (Norma sobre $\mathbb{R}^2$)**.** Seja $V = \mathbb{R}^2$ conforme o exemplo 1.1. Assim, $\|\cdot\|: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $\|(x, y)\| = \sqrt{\langle (x, y), (x, y)\rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$ é uma norma.

Exemplo 1.7 (Norma em $\mathbb{R}^n$)**.** Seja $V = \mathbb{R}^n$ conforme exemplo 1.2. Assim, $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \sqrt{\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (x_1, x_2, ..., x_n)\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

é uma norma

Exemplo 1.8 (Norma de funções contínuas)**.** Seja $V = C([a, b])$ conforme o exemplo 1.3. Logo, $\|\cdot\|: C([a, b]) \to \mathbb{R}$, dada por $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt\right)^{1/2}$, é uma norma.

Exemplo 1.9 (Não-Norma)**.** Seja $V = \mathbb{R}^2$. Defina $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $\|(x, y)\| = x^2 + y^2$. Então $\|\cdot\|$ não é uma norma. Basta observar que $\|2(1, 0)\| = \|(2, 0)\| = 2^2 + 0^2 = 4$ e, por outro lado, $|2|\|(1, 0)\| = 2\|(1, 0)\| = 2(1^2 + 0^2) = 2$, de forma que $\|2(1, 0)\| \neq |2|\|(1, 0)\|$. Isto contradiz o item **ii)** da Definição 1.2.

Definição 1.3 (Vetor Unitário)**.** Seja V um espaço vetorial normado. Dizemos que um vetor $v \in V$ é unitário se $\|v\| = 1$.

Podemos transformar qualquer vetor não-nulo $v \in V$ em um vetor unitário. Basta escolher $u = \dfrac{v}{\|v\|}$. Para verificar a veracidade deste fato, basta utilizar o item **ii)** da Definição 1.2 e obter $\|u\| = \left\|\frac{v}{\|v\|}\right\| = \left|\frac{1}{\|v\|}\right| \|v\| = \frac{1}{\|v\|}\|v\| = 1$. Em particular, temos os seguintes exemplos.

Exemplo 1.10. Desde que $\|(1, 0)\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ e $\|(1, 1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, temos que $(1, 0)$ é um vetor unitário e $(1, 1)$ não. Para transformar $(1, 1)$ em vetor unitário, basta realizar o seguinte processo $\frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exemplo 1.11. Seja $V = C([0, 1])$ e sejam $f(t) = 1$ e $g(t) = t$. Desde que

$$\|f\| = \left(\int_0^1 [f(t)]^2 dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 1 dt\right)^{1/2} = 1$$

e

$$\|g\| = \left(\int_0^1 [g(t)]^2 dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 t^2 dt\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

segue que f é um vetor unitário e g não. Usando a observação acima, obtemos o vetor unitário $\dfrac{g}{\|g\|} = \dfrac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}t$.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$, para todos $u, v \in V$, onde $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$.*

Demonstração. Utilizaremos na demonstração deste Teorema uma ferramenta auxiliar. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \|u - xv\|^2$. Observe que $f(x) \geq 0$. Por outro lado, usando a definição da aplicação $\|\cdot\|$, obtemos

$$f(x) = \|u - xv\|^2 = \langle u - xv, u - xv\rangle = \langle u, u\rangle - 2x\langle u, v\rangle + x^2\|v\|^2 = \|u\|^2 - 2x\langle u, v\rangle + x^2\|v\|^2.$$

Logo, $\|u\|^2 - 2x\langle u, v\rangle + x^2\|v\|^2 \geq 0$. Note que o gráfico de f é uma parábola, a qual está acima do eixo das abscissas (o vértice desta parábola pode tocar tal eixo). Portanto, impomos que $\Delta = 4\langle u, v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$ (discriminante). Ou seja, $\langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$. Por fim, $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$ (aqui usamos $\sqrt{a^2} = |a|$). O Teorema está provado. $\square$

Obs 1.5. A desigualdade de Cauchy-Schwarz é válida para espaços vetoriais com produto interno Hermitiano. Você aluno está convidado a provar esta afirmação. Sugestão: Use $y = x\langle u, v\rangle$ no lugar de x.

Exemplo 1.12. Seja $V = C([0,1])$ com o produto interno canônico, definido no exemplo 1.3. Podemos mostrar que $\left(\int_0^1 f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 [f(t)]^2dt\right)\left(\int_0^1 [g(t)]^2dt\right)$. Com efeito, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|$, para todos $f, g \in V$. Com isso, $\langle f, g\rangle^2 \leq \|f\|^2\|g\|^2$. Usando as definições de $\langle \cdot, \cdot\rangle$ e $\| \cdot \|$, encontramos o resultado desejado.

Exercícios de Fixação

1. Sejam $u, v \in V$, onde V é um espaço vetorial com produto interno. Se $\|v\|, \|u\| = 1$, e $\|u - v\| = 2$, determine $\langle u, v\rangle$, onde $\|\|$ é a norma que provém do produto interno.

2. Seja V um espaço vetorial formado pelos polinômios de grau menor que ou igual a 2 com o produto interno interno canônico para $C([0,1])$. Calcular $\|f(t)\|$ ($\| \cdot \|$ é a norma que provém do produto interno) nos seguintes casos:

i) $f(t) = t$;

ii) $f(t) = -t^2 + 1$.

3. Num espaço vetorial com produto interno provar que

i) $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow \langle u + v, u - v\rangle = 0$;

ii) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ se, e somente se, $\langle u, v\rangle = 0$.

4. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

i) Mostrar que $\langle u, v\rangle := x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$;

ii) Determinar a norma de $u = (1, 2)$ em relação ao produto interno usual e também em relação ao produto definido em **i)**.

5. Considere o espaço $\mathbb{R}^3$. Determinar $a \in \mathbb{R}$ de maneira que $\|u\| = \sqrt{41}$, onde $u = (6, a, -1)$ e $\|\cdot\|$ é a norma que provém do produto interno canônico.

6. Prove que a igualdade na Desigualdade de Cauchy-Schwarz é válida se, e somente se, os vetores linearmente dependentes.

7. Sejam $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$. Determinar os vetores $w \in \mathbb{R}^3$ tais que $\|w\| = 1$ e $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$.

8. Sejam $u = (1, 2, 0, 1)$ e $v = (3, 1, 4, 2) \in \mathbb{R}^4$. Determinar $\langle u, v\rangle$, $\|u\|$ e $\|v\|$, onde $\|\cdot\|$ provém do produto interno canônico de $\mathbb{R}^4$.

9. Sabendo que $\|u\| = 3$, $\|v\| = 5$, com u e v elementos de um espaço vetorial com produto interno, determine $t \in \mathbb{R}$ de maneira que $\langle u + tv, u - tv\rangle = 0$.

1.4 Conclusão

Concluímos que num espaço vetorial com produto interno há modos eficientes de manipular seus elementos e possibilitando definir comprimentos e distancias.

1.5 Exercícios Propostos

1. Encontre um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle (1, 0), (0, 1)\rangle = 2$.

2. Defina $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$. Mostre que este é um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$.

3. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Sejam $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ dois produtos internos sobre V. Defina $\langle\cdot,\cdot\rangle_3 = \langle\cdot,\cdot\rangle_1 + \langle\cdot,\cdot\rangle_2$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_4 = \lambda\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, onde $\lambda > 0$. Prove que $\langle\cdot,\cdot\rangle_3$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_4$ são produtos internos sobre V. Agora, $\langle\cdot,\cdot\rangle_5 = \langle\cdot,\cdot\rangle_1 - \langle\cdot,\cdot\rangle_2$ define um produto interno sobre V?

4. Seja $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno canônico de $\mathbb{R}^2$.

i) Sejam $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 1)$. Se w é um vetor tal que $\langle u, w\rangle = -1$ e $\langle v, w\rangle = 3$, encontre w;

ii) Mostre que para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^2$, temos $v = \langle v, (1, 0)\rangle(1, 0) + \langle v, (0, 1)\rangle(0, 1)$.

5. Seja $\langle\cdot,\cdot\rangle$ o produto interno canônico de $\mathbb{R}^2$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$. Mostre que $\langle (x, y), T(x, y)\rangle = 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Encontre todos os produtos internos sobre $\mathbb{R}^2$ que satisfazem esta mesma propriedade.

6. Seja A uma matriz 2×2 com entradas reais. Para X, Y matrizes 2×1 defina a função $\langle X, Y \rangle_A := Y^t A X$, onde Y^t é a transposta de Y. Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ é um produto interno sobre o espaço das matrizes 2×1 se, e somente se, $A = A^t$, $A_{11}, A_{22}, det(A) > 0$, onde $A = (A_{ij})$.

7. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considere sobre V a norma que provém do produto interno. Prove a seguinte identidade de polarização:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2,$$

para todo $u, v \in V$.

8. Seja V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A distância entre os vetores u e v em V é dada por $d(u, v) := \|u - v\|$. Mostre que:

i) $d(u, v) \geq 0$;

ii) $d(u, v) = 0$ se, e somente se, $u = v$;

iii) $d(u, v) = d(v, u)$;

iv) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

9. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam $u, v \in V$. Mostre que $u = v$ se, e somente se, $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$, para todo $w \in V$.

10. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja U um espaço vetorial. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear injetora. Mostre que $\langle x, y \rangle_U := \langle T(x), T(y) \rangle_V$ é um produto interno sobre U. Conclua que qualquer espaço vetorial com dimensão finita possui um produto interno. **Sugestão:** Crie um isomorfismo entre um espaço vetorial de dimensão n e $\mathbb{R}^n$.

11. Seja V um espaço vetorial com dimensão finita. Seja $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno sobre V. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$. Mostre que existe exatamente um vetor $v \in V$ tal que $\langle v, v_i \rangle = \lambda_i$, para todo $i = 1, 2, ..., n$.

12. Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Considere sobre V a norma que provém do produto interno. Prove a seguinte lei do paralelogramo

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2),$$

para todo $u, v \in V$.

13. Use a Desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^3$ para mostrar que, dados os números reais estritamente positivos x_1, x_2, x_3, vale a desigualdade:

$$(x_1 + x_2 + x_3) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) \geq 9.$$

Próxima Aula

Na sequência ampliaremos a noção de angulo entre vetores e a importancia de se ter conjuntos nos quais seus elementos são dois a dois perpendiculares. Utilizaremos um processo para construir tais conjuntos.

Referências Bibliográficas

[1] BUENO, H. P., *Álgebra Linear - Um Segundo Curso*, Primeira Edição, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[2] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H.,COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, São Paulo, Editora Atual, 1995.

[3] COELHO, F. O., LOURENÇO, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*, Edição 2001, São Paulo, EdusP, 2004.

[4] HOFFMAN, K., KUNZE, R., *Linear Algebra*, Second Edition, New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.

[5] LANG, S., *Álgebra Linear*, Primeira Edição, New York, Ed. ciência Moderna, 2003.

[6] LIPSCHUTZ, S., *Álgebra Linear*, Terceira Edição, São Paulo, Schaum McGraw-Hill Makron Books, 1994.

[7] SILVA, A., *Introdução à Álgebra*, Primeira Edição, Editora Universitária UFPB, João Pessoa, 2007.

Professor Revisor

Professor Paulo de Souza Rabelo.