

Equações Diferenciais Ordinárias

Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias



São Cristóvão/SE
2009

Equações Diferenciais Ordinárias

Elaboração de Conteúdo
Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias

Capa
Hermeson Alves de Menezes

Reimpressão

Copyright © 2009, Universidade Federal de Sergipe / CESAD.
Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização por escrito da UFS.

**FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

D541e Dias, Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão.
Equações diferenciais ordinárias / Lúcia de Fátima de
Medeiros Brandão Dias -- São Cristóvão: Universidade
Federal de Sergipe, CESAD, 2009.

1. Matemática. 2. Equações diferenciais ordinárias. I. Título.

CDU 517.91

Presidente da República

Luiz Inácio Lula da Silva

Chefe de Gabinete

Ednalva Freire Caetano

Ministro da Educação

Fernando Haddad

Coordenador Geral da UAB/UFS**Diretor do CESAD**

Antônio Ponciano Bezerra

Secretário de Educação a Distância

Carlos Eduardo Bielschowsky

Vice-coordenador da UAB/UFS**Vice-diretor do CESAD**

Fábio Alves dos Santos

Reitor

Josué Modesto dos Passos Subrinho

Vice-Reitor

Angelo Roberto Antonioli

Diretoria Pedagógica

Clotildes Farias (Diretora)

Hérica dos Santos Mota

Iara Macedo Reis

Daniela Souza Santos

Janaina de Oliveira Freitas

Núcleo de Avaliação

Guilhermina Ramos (Coordenadora)

Carlos Alberto Vasconcelos

Elizabete Santos

Marialves Silva de Souza

Diretoria Administrativa e Financeira

Edélzio Alves Costa Júnior (Diretor)

Sylvia Helena de Almeida Soares

Valter Siqueira Alves

Núcleo de Serviços Gráficos e Audiovisuais

Giselda Barros

Núcleo de Tecnologia da Informação

João Eduardo Batista de Deus Anselmo

Marcel da Conceição Souza

Coordenação de Cursos

Djalma Andrade (Coordenadora)

Assessoria de Comunicação

Guilherme Borba Gouy

Núcleo de Formação Continuada

Rosemeire Marcedo Costa (Coordenadora)

Coordenadores de Curso

Denis Menezes (Letras Portugêses)

Eduardo Farias (Administração)

Haroldo Dorea (Química)

Hassan Sherafat (Matemática)

Hélio Mario Araújo (Geografia)

Lourival Santana (História)

Marcelo Macedo (Física)

Silmara Pantaleão (Ciências Biológicas)

Coordenadores de Tutoria

Edvan dos Santos Sousa (Física)

Geraldo Ferreira Souza Júnior (Matemática)

Janaina Couvo T. M. de Aguiar (Administração)

Priscilla da Silva Góes (História)

Rafael de Jesus Santana (Química)

Ronilse Pereira de Aquino Torres (Geografia)

Trícia C. P. de Sant'ana (Ciências Biológicas)

Vanessa Santos Góes (Letras Portugêses)

NÚCLEO DE MATERIAL DIDÁTICO

Hermeson Menezes (Coordenador)

Edvar Freire Caetano

Isabela Pinheiro Ewerton

Lucas Barros Oliveira

Neverton Correia da Silva

Nycolas Menezes Melo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"

Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze

CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE

Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

Aula 1: Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.O.)	13
1.1 Introdução	14
1.2 O que é uma E.D.O.?	14
1.3 Classificação das Equações Diferenciais	15
1.4 Motivação	16
1.5 Definições e terminologia	21
1.6 Equações Diferenciais Ordinárias e o Teorema Fundamental do Cálculo	23
1.7 Exemplo de um estudo qualitativo de uma E.D.O.	25
1.8 Conclusão	27
RESUMO	28
PRÓXIMA AULA	28
ATIVIDADES	28
LEITURA COMPLEMENTAR	30
1.9 Referências Bibliográficas	30
Aula 2: Teorema de Existência e Unicidade	31
2.1 Introdução	32
2.2 Problema de valor inicial ou problema de Cauchy	32
2.3 Teorema de existência e unicidade	34

2.4	Conclusão	38
	RESUMO	40
	PRÓXIMA AULA	40
	ATIVIDADES	41
	LEITURA COMPLEMENTAR	42
2.5	Referências Bibliográficas	42

Aula 3: Equações de primeira ordem: Equações separáveis e

	Equações exatas	43
3.1	Introdução	44
3.2	Equações separáveis	44
3.3	Equações exatas	50
3.4	Obtendo solução de uma equação de primeira ordem não exata	54
3.5	Conclusão	58
	RESUMO	59
	PRÓXIMA AULA	59
	ATIVIDADES	59
	LEITURA COMPLEMENTAR	61
3.6	Referências Bibliográficas	62

Aula 4: Equações de primeira ordem: Equações lineares

	Equações homogêneas, Equações de Bernoulli, Riccati e Clairaut	63
4.1	Introdução	64
4.2	Equações lineares	64
4.3	Equação de Bernoulli, Equação de Riccati e Equação de Clairaut	66
4.4	Equações Homogêneas	71

4.5	Conclusão	75
	RESUMO	76
	PRÓXIMA AULA	76
	ATIVIDADES	76
	LEITURA COMPLEMENTAR	77
4.6	Referências Bibliográficas	78

Aula 5: Modelos matemáticos de E.D.O. de primeira ordem

79

5.1	Introdução	80
5.2	Dinâmica populacional	80
5.3	Datação da idade de um fóssil	82
5.4	Esfriamento e aquecimento de um corpo	84
5.5	Circuitos elétricos	85
5.6	Diluição de soluções	86
5.7	Trajетórias ortogonais	87
5.8	Conclusão	89
	RESUMO	90
	PRÓXIMA AULA	90
	ATIVIDADES	90
	LEITURA COMPLEMENTAR	92
5.9	Referências Bibliográficas	92

Aula 6: E.D.O. lineares de ordem superior **93**

6.1	Introdução	94
6.2	Equações diferenciais ordinárias lineares de ordem superior - Fundamentos teóricos.	94
6.2.1	Dependência e independência linear de funções	95

6.2.2	Soluções de equações diferenciais ordinárias lineares.	97
6.3	Redução de ordem	103
6.4	Conclusão	107
	RESUMO	108
	PRÓXIMA AULA	109
	ATIVIDADES	109
	LEITURA COMPLEMENTAR	110
6.5	Referências Bibliográficas	110
Aula 7:	E.D.O. lineares com coeficientes constantes	111
7.1	Introdução	112
7.2	Resolvendo equações lineares homogêneas com coeficientes constantes.	112
7.2.1	Equações de ordem superior	117
7.3	Resolvendo uma E.D.O. linear não homogênea com coeficientes constantes.	119
7.4	Conclusão	126
	RESUMO	127
	PRÓXIMA AULA	127
	ATIVIDADES	127
	LEITURA COMPLEMENTAR	128
7.5	Referências Bibliográficas	129
Aula 8:	Variação de parâmetros	131
8.1	Introdução	132
8.2	Resolvendo equações lineares não homogêneas. . .	132
8.2.1	Equações de ordem superior	137

8.3	Modelagem matemática em E.D.O. lineares de ordem superior com coeficientes constantes	140
8.3.1	O oscilador harmônico	140
8.4	Conclusão	148
	RESUMO	149
	PRÓXIMA AULA	149
	ATIVIDADES	149
	LEITURA COMPLEMENTAR	150
8.5	Referências Bibliográficas	151

Aula 9: E.D.O. lineares com coeficientes variáveis:

	Equação de Cauchy-Euler	153
9.1	Introdução	154
9.2	Equação de Cauchy-Euler	154
9.2.1	Equação de Cauchy-Euler de segunda ordem	154
9.2.2	Equação de Cauchy-Euler de ordem superior	159
9.3	Conclusão	160
	RESUMO	161
	PRÓXIMA AULA	161
	ATIVIDADES	161
	LEITURA COMPLEMENTAR	161
9.4	Referências Bibliográficas	162

Aula 10: Equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis:

	Soluções por séries de potências	163
10.1	Introdução	164
10.2	Séries de potências	164
10.3	Soluções em série em torno de um ponto ordinário .	168

10.4 Soluções em série em torno de pontos singulares-	
Método de Frobenius	175
10.5 Conclusão	181
RESUMO	182
PRÓXIMA AULA	182
ATIVIDADES	182
LEITURA COMPLEMENTAR	183
10.6 Referências Bibliográficas	184

Aula 11: A Transformada de Laplace: Fundamentos teóricos

185	
11.1 Introdução	186
11.2 A transformada de Laplace	186
11.3 A transformada inversa de Laplace	193
11.4 Conclusão	196
RESUMO	197
PRÓXIMA AULA	197
ATIVIDADES	197
LEITURA COMPLEMENTAR	198
11.5 Referências Bibliográficas	198

Aula 12: Equações diferenciais e a

Transformada de Laplace	199
12.1 Introdução	200
12.2 A transformada de uma derivada	200
12.3 Resolvendo equações diferenciais utilizando a trans- formada de Laplace	201
12.4 O teorema da convolução e a transformada de fun- ções periódicas	204

12.5 Conclusão	206
RESUMO	207
PRÓXIMA AULA	207
ATIVIDADES	207
LEITURA COMPLEMENTAR	208
12.6 Referências Bibliográficas	208

Aula 13: Sistema de E.D.O. lineares de primeira ordem

211

13.1 Introdução	212
13.2 Sistema de equações lineares de primeira ordem: Fun- damentos teóricos	212
13.3 Sistemas de equações lineares de primeira ordem homogêneo com coeficientes constantes.	218
13.4 Conclusão	228
RESUMO	229
PRÓXIMA AULA	229
ATIVIDADES	229
LEITURA COMPLEMENTAR	230
13.5 Referências Bibliográficas	230

Aula 14: Resolução de sistema de

E.D.O. lineares de primeira

ordem não homogêneo **231**

14.1 Introdução	232
14.2 Resolvendo um sistema de equações lineares de pri- meira ordem não homogêneo	232
14.2.1 Variação de parâmetros	232
14.3 Conclusão	237

RESUMO	238
PRÓXIMA AULA	238
ATIVIDADES	238
LEITURA COMPLEMENTAR	239
14.4 Referências Bibliográficas	239
Aula 15: Aplicações	241
15.1 Introdução	242
15.2 Problemas envolvendo sistemas de equações lineares	242
15.2.1 Molas acopladas	242
15.2.2 Sistemas elétricos: Malhas paralelas	244
15.3 Problemas envolvendo sistemas de equações não li- neares	245
15.3.1 Movimentos de corpos celestes	245
15.4 Conclusão	246
RESUMO	247
PRÓXIMA AULA	247
ATIVIDADES	247
LEITURA COMPLEMENTAR	248
15.5 Referências Bibliográficas	248

Equações Diferenciais Ordinárias (E.D.O.)

META:

Introduzir as definições preliminares referentes ao conteúdo Equações Diferenciais Ordinárias e dar motivações para o estudo dessas equações.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Reconhecer e classificar uma Equação Diferencial Ordinária;

Compreender a importância prática de tais equações;

Identificar uma solução de uma Equação Diferencial Ordinária;

Entender o que é um estudo qualitativo de uma Equação Diferencial Ordinária.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de derivada e integrais de funções de valores reais com domínio em \mathbb{R} , da disciplina Cálculo I. Derivação implícita. Conhecimentos básicos sobre vetores e de gráficos de funções de uma variável.

1.1 Introdução

Caro aluno, seja bem-vindo a nossa primeira aula de Equações Diferenciais Ordinárias! Espero que juntos aprendamos um pouco sobre o universo dessas tão importantes equações. Na aula de hoje conheceremos o que é uma Equação Diferencial Ordinária (abreviaremos esse nome por E.D.O. de agora por diante), como estão divididas tais equações, algumas motivações práticas para seu estudo, o que é uma solução de uma E.D.O. e, por fim, conheceremos um pouco sobre a teoria qualitativa para E.D.O., atingindo assim o objetivo final para essa aula.

A história das Equações Diferenciais é tão antiga quanto a do cálculo diferencial, a qual data do século XVII. Desde o momento que os inventores do cálculo, Newton e Leibniz, tiveram o entendimento necessário sobre a derivada de uma função, esta começou a aparecer em equações e logo descobriu-se que as soluções para tais equações não eram tão simples assim. Algumas dessas soluções podiam ser obtidas por meio da antiderivada, mas a maioria das equações não podiam ser resolvidas por esse processo.

1.2 O que é uma E.D.O.?

Bem resumidamente, uma Equação Diferencial é uma equação que envolve derivadas. Melhor dizendo

Definição 1.1. Chamamos por Equação Diferencial (E.D.) uma equação que contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.

Exemplo 1.1. 1. $\frac{dx}{dt} + 3x = \text{sen}x$; (x é a variável dependente pois x é vista como função de t e t a variável independente)

2. $3 \frac{dy}{dt} + x \frac{dx}{dt} = y + x$

3. $x \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{ds} = 5$

Definição 1.2. Chamamos por Equação Diferencial Ordinária (E.D.O.) uma equação que contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a apenas uma variável independente.

Nos exemplos acima, os de número 1 e 2 apenas são E.D.O's. O exemplo 3 é conhecido como Equação Diferencial Parcial (E.D.P.), pois possui derivadas em relação a mais de uma variável independente.

Matematicamente falando podemos representar uma E.D.O em uma variável dependente na forma geral

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

onde F é uma função de valores reais de $n + 2$ variáveis, x é a variável independente, y é a variável dependente e $y', y'', \dots, y^{(n)}$ são as derivadas de y com respeito a x até ordem n .

Em uma E.D.O. $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, quando for possível expressar a derivada de ordem maior $y^{(n)}$ em função dos outros termos da equação, ou seja

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

dizemos que a E.D.O. está na sua forma normal.

Observação 1.1. 1. Admitiremos que, pelo menos localmente, toda E.D.O. pode ser escrita na sua forma normal. (isso é possível devido ao Teorema da função implícita)

2. Poderemos usar também a notação $\frac{d^n y}{dx^n}$ além de $y^{(n)}$ para representar a derivada de ordem n de y com respeito à x .

1.3 Classificação das Equações Diferenciais

As Equações diferenciais se classificam quanto ao tipo, a ordem e a linearidade. Quanto ao tipo elas podem ser Equações Diferenciais

O que é uma E.D.P.?
Uma E.D.P. é uma equação que contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a DUAS OU MAIS variáveis independentes. Elas possuem a mesma classificação das E.D.O.'s.

Ordinárias ou Equações Diferenciais Parciais. Estudaremos adiante a classificação com respeito as E.D.O.'s.

Quanto à ordem

A ordem de uma E.D.O. é dada pelo índice da maior derivada existente na equação. Por exemplo as equações

$$3xy''' + y'' + 3x^5y' = 5, (y')^5 + y'' = 0, y^{(5)} + 5xy^{(7)} + y' = 2$$

são equações de ordem 3, 2 e 7, respectivamente.

Quanto à linearidade

Uma E.D.O. de ordem n , $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, é dita linear se ela puder ser escrita na forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Exemplo 1.2. 1) $x^2y''' + y' = 7$ (E.D.O. linear)

2) $(\operatorname{sen} x)y'' + y^{(4)} = \ln x$ (E.D.O. linear)

3) $yy'' + y^{(4)} = \ln x$ (E.D.O. não linear por causa do termo yy'')

4) $y^{(5)} + 3x^2y + \ln y = 0$ (E.D.O. não linear devido ao termo $\ln y$).

1.4 Motivação

Por que estudar E.D.O.? As E.D.O.'s modelam problemas reais, tais como:

- Crescimento populacional
- Movimento de um pêndulo
- Propagação de doenças
- Lançamento e movimento de foguetes
- Movimento de corpos celestes

- Movimento de corpos em planos inclinados
- Corpos em movimento harmônico simples
- Decaimento radioativo
- Reações e misturas químicas
- Circuitos elétricos
- Corpos em queda

A seguir vamos conhecer mais de perto como as E.D.O.'s aparecem em alguns desses problemas.

Movimento de um corpo em um plano inclinado

Considere um corpo de massa m movendo-se, sem atrito, num plano inclinado, como mostra a figura abaixo. Sabemos que a

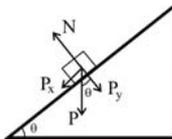


Figura 1.1: Corpo de massa m num plano inclinado.

resultante das forças na direção y , dada por $F_{ry} = N - P_y = N - P \cos \theta$, é nula, uma vez que não há movimento na direção y . Contudo, a resultante das forças na direção x , dada por $F_{rx} = P_x = P \sin \theta$, não é nula. Pela segunda Lei de Newton, sabemos que a força resultante que age em um corpo de massa constante é igual ao produto de sua massa por sua aceleração, ou seja, $F_r = m a$. Dessa maneira, como a força resultante que age no corpo de massa

A modelagem matemática é uma área do conhecimento que busca trazer para a linguagem matemática problemas muitas vezes reais a fim de estudá-los. É o que acontece, por exemplo, no estudo dos movimentos dos corpos celestes e na datação da idade de um fóssil.

m no plano inclinado acima é $F_{rx} + F_{ry} = P \operatorname{sen} \theta + 0 = mg \operatorname{sen} \theta$
temos que o movimento desse corpo é descrito pela equação

$$P \operatorname{sen} \theta = m a_x = m x'',$$

onde x representa a posição do corpo, a_x representa a aceleração desse corpo na direção x , e $(')$ representa derivação com respeito ao tempo t . Assim, o movimento do corpo, sobre o plano inclinado, ao longo do tempo é dado pela solução da E.D.O.

$$x'' = g \operatorname{sen} \theta.$$

Observação 1.2. 1- A aceleração de um corpo num instante de tempo t é conhecida como a taxa de variação da velocidade desse corpo ao longo do tempo, ou seja, $a = \frac{dv}{dt}$ e como a velocidade num instante de tempo t é a taxa de variação da posição desse corpo ao longo do tempo, temos que $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, onde v e x representam, respectivamente, a velocidade e a posição do corpo.

2- No problema acima, se $\theta = 0$, o corpo estará em repouso na horizontal (considerando a velocidade inicial nula). Se $\theta = 90^\circ$, o corpo estará em queda livre.

Movimento de um pêndulo simples

Considere o pêndulo abaixo

Consideremos s a medida do arco formado pelo pêndulo (deslocamento do pêndulo) quando este forma com a linha vertical um ângulo θ , como mostra a figura acima. Sabemos que $s = l\theta$, onde l é o comprimento do fio do pêndulo. Assim, como l é uma constante, a aceleração do pêndulo ao longo do tempo t é dada por

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

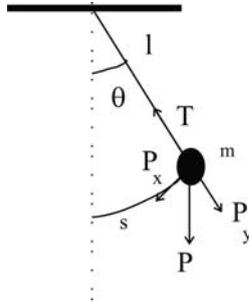


Figura 1.2: Pêndulo simples.

A força resultante na direção y é nula, uma vez que a tração, T , no fio é igual a componente da força peso P na direção y . Contudo, a força resultante na direção x não é nula e é dada por $-mg \operatorname{sen} \theta$, (o sinal negativo é porque essa força resultante é uma força restauradora). Assim, da segunda Lei de Newton, obtemos que $-mg \operatorname{sen} \theta = ml \frac{d^2\theta}{dt^2}$ ou melhor

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta.$$

Portanto, para descrevermos o movimento desse pêndulo ao longo do tempo, basta-nos achar a solução dessa E.D.O..

Sistema massa-mola (Movimento Harmônico simples).

Considere a figura abaixo onde descrevemos o movimento de um corpo de massa m preso a uma mola com constante de elasticidade k .

A mola, a princípio se encontra sem nenhum corpo preso a ela. Quando prendemos o corpo de massa m , a mola se distende s unidades de comprimento e o corpo fica parado, ou seja, o sistema massa-mola está na sua posição de equilíbrio. Nesse estado temos a igualdade entre a força peso e a força restauradora da mola (**Lei**

O Movimento Harmônico simples- M.H.S.- é um movimento oscilatório que se caracteriza pela ação de forças restauradoras do tipo elásticas.

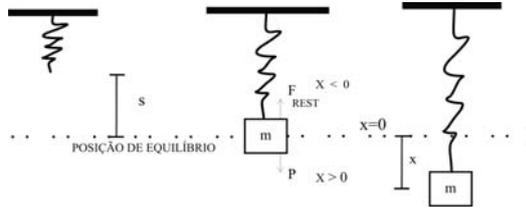


Figura 1.3: Sistema massa-mola.

de Hooke) que, matematicamente, é descrita pela equação

$$ks = mg.$$

Se soltarmos a massa m de uma posição x abaixo da sua posição de equilíbrio temos, pela segunda lei de Newton que

$$F_r = m a,$$

onde F_r é a força resultante agindo na massa m , a qual nesse caso será a soma das forças peso e restauradora da mola, ou seja, $F_r = mg - k(s + x)$. Dessa maneira, a equação $F_r = m a$ assume a forma

$$mg - k(x + s) = m\ddot{x}.$$

Como g e s são constantes, obtemos uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem dada por

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x,$$

Lei de Hooke (1635-1703) A força restauradora exercida pela mola é proporcional à distensão da mola. Esta força é oposta à direção do alongamento.

uma vez que $ks = mg$.

O campo de aplicações para as Equações diferenciais ordinárias é imenso, poderíamos ficar aqui listando inúmeros modelos matemáticos onde tais equações aparecem, mas optamos por falar mais deles adiante, quando tivermos exposto algumas técnicas de resolução de E.D.O.'s.

1.5 Definições e terminologia

Definição 1.3. Uma solução de uma E.D.O. de ordem n é uma função ϕ definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ a qual tem pelo menos n derivadas em I e que satisfaz a E.D.O. dada.

Por exemplo, considere a E.D.O., $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, uma solução dessa E.D.O. é uma função ϕ definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que tem pelo menos n derivadas em I tal que

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0, \text{ para todo } x \in I.$$

Exemplo 1.3. A função y dada por $y(x) = \frac{x^4}{16}$, $x \in \mathbb{R}$ é solução da E.D.O. $4y' - x^3 = 0$ uma vez que é diferenciável em \mathbb{R} e satisfaz a E.D.O. dada, vamos verificar?

Derivando y com respeito a x , obtemos $y' = x^3/4$. Substituindo em $4y' - x^3$ segue que $4y' - x^3 = 0$.

Mas será que essa é a única solução? Observe que toda expressão da forma $y(x) = \frac{x^4}{16} + c$, $c \in \mathbb{R}$ é uma solução para essa E.D.O.. Quando isso acontece dizemos que a E.D.O. possui uma **família de soluções** a um parâmetro, que nesse caso é c .

Observação 1.3. O intervalo de definição de uma solução é algo que merece cuidado, pois em geral confunde-se domínio de uma função com intervalo de definição de uma solução. Por exemplo, a função $y = \frac{1}{x}$ é solução da E.D.O. $xy' + y = 0$ para x pertencente a qualquer intervalo dos números reais que não contém o zero, como por exemplo, $(0, \infty)$. Contudo, $y = \frac{1}{x}$ como função está definida em \mathbb{R}^* .

Observação 1.4. 1. Uma solução de uma E.D.O. identicamente nula no seu intervalo de definição I é chamada **solução trivial**.

2. Em geral, uma E.D.O. possui um número infinito de soluções.
3. Podemos ter soluções de uma E.D.O. que não veem de uma família de soluções dessa E.D.O.. Como por exemplo, a E.D.O. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$ possui a seguinte família de soluções $y(x) = 2 \frac{(1 + ce^{4x})}{(1 - ce^{4x})}$, $c \in \mathbb{R}^*$, contudo $\tilde{y}(x) = -2$ e $\hat{y}(x) = 2$ são soluções dessa E.D.O. e não provém dessa família, uma vez que não existe valores para o parâmetro c tal que $y(x) = \tilde{y}(x) = -2$ e $y(x) = \hat{y}(x) = 2$.
4. Quando uma solução de uma E.D.O. vem de uma família de soluções encontrada, a denominamos **solução particular** da E.D.O. dada.
5. (**Solução implícita**)- Nem sempre encontraremos a solução de uma E.D.O. em sua forma explícita, $y = \phi(x)$. As soluções de algumas E.D.O.'s, quando for possível acharmos tais soluções, em geral serão dadas na forma $G(x, y) = 0$, a qual define implicitamente a solução. Por exemplo, $G(t, E, c) = 0$, onde $G(t, E, c) = c - t + E - \text{sen } E$ é uma família de soluções implícitas (a um parâmetro) da E.D.O. $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{1 - \cos E}$. (para verificar derive implicitamente com respeito a t a expressão $G(t, E) = 0$)

Um outro exemplo, considere $G(x, y) = 0$, onde $G(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ e $-2 < x < 2$ é uma solução implícita da E.D.O. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

6. Dada uma E.D.O.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

uma solução da forma $\phi(x) = c, c \in \mathbb{R}$ é dita **solução de equilíbrio** da E.D.O. dada se $f(x, \phi) = 0$.

Por exemplo, $\phi(x) = 2$ é solução de equilíbrio da E.D.O.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4.$$

Definição 1.4. O gráfico de uma solução ϕ de uma E.D.O. é chamado de **curva integral**. Uma vez que ϕ é diferenciável em seu intervalo de definição I , sua curva integral é contínua em I .

Abaixo descrevemos algumas curvas integrais da família de soluções do Exemplo 1.3.

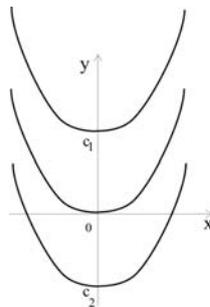


Figura 1.4: Parte de algumas curvas integrais de $y' = x^3/4$.

1.6 Equações Diferenciais Ordinárias e o Teorema Fundamental do Cálculo

Um problema básico do Cálculo Integral é a determinação do valor da integral definida

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$$

de uma função $f : [\alpha, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}$.

Quando f é contínua e não negativa podemos relacionar o conceito de integral definida com a idéia de área

Teorema Fundamental do Cálculo- Parte I: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. A função $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx \quad (1.1)$$

é derivável e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

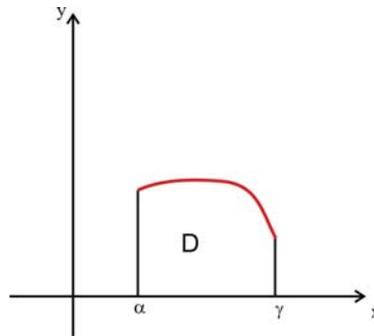


Figura 1.5: R é a área abaixo do gráfico da função f .

O Teorema Fundamental do Cálculo interliga os conceitos de integral e derivada e nos mostra uma maneira de resolver algumas integrais definidas.

Observe que a função F definida em (1.1) é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \quad (1.2)$$

As soluções dessa E. D. O. são chamadas as primitivas de f . Nesse caso dizemos que a E.D.O. foi resolvida por quadratura, ou seja, foi possível achar uma primitiva para a função f .

Toda a parte do Cálculo chamada de cálculo de primitivas nada mais é do que a determinação de soluções da equação diferencial (1.2) para diferentes funções f . Assim, o problema de resolvermos uma integral, ou seja, acharmos uma primitiva, é equivalente ao problema de resolvermos uma E.D.O.. Como sabemos do Cálculo, uma vez que nem toda função possui primitiva, nem toda E.D.O. possuirá solução dada explicitamente.

O número de equações que podem ser resolvidas em termos de funções elementares (ou por quadratura) é muito pequeno, mesmo

depois da introdução de funções representadas por integrais, como é o caso das funções elípticas. Segundo, Figueiredo (2007) essa constatação gerou a busca de novos métodos e surgiu assim o uso de séries de funções na resolução de uma E. D. O., o Teorema de Existência e Unicidade de soluções, a teoria qualitativa, a qual se preocupa em extrair o máximo de informações possíveis sobre a solução de uma E.D.O. sem conhecer explicitamente a solução da mesma e métodos numéricos. Na seção seguinte daremos um exemplo de um estudo qualitativo de uma E.D.O..

1.7 Exemplo de um estudo qualitativo de uma E.D.O.

Consideremos uma E.D.O. de 1ª ordem na sua forma normal

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1.3)$$

Suponhamos que não seja possível encontrar a solução dessa E.D.O., por métodos analíticos. Quando nos deparamos com problemas assim e tentamos obter informações sobre as soluções diretamente da própria E.D.O. dada, estamos realizando um estudo qualitativo das equações do problema.

Sabemos do cálculo que a derivada $\frac{dy}{dx}$ de uma função diferenciável $y = y(x)$ nos dá a inclinação da reta tangente em um ponto (x, y) sobre o gráfico da tal função. Assim, tomemos um ponto (x_0, y_0) sobre a curva integral de uma solução de (1.3), o valor $f(x_0, y_0)$ nos dá a inclinação da reta tangente à curva integral no ponto (x_0, y_0) . Melhor dizendo $f(x_0, y_0)$ nos dá a inclinação de um segmento de reta, denominado elemento linear, tangente à curva integral no

O matemático Henri Poincaré foi uma das grandes mentes pensantes da matemática de sua época e porque não dizer da história dessa ciência até então. Suas pesquisas foram e são de grande importância em várias áreas da matemática, tais como: análise, álgebra, geometria e teoria dos números. Ele foi o grande precursor da teoria qualitativa para E.D.O.'s não linear e suas idéias nessa área contribuíram para uma nova maneira de abordar muitos dos problemas em mecânica celeste.

ponto (x_0, y_0) . Por exemplo, consideremos a equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

onde $f(x, y) = -\frac{y}{x}$. No ponto $(4, 7)$, por exemplo, a inclinação do elemento linear é $f(4, 7) = -7/4$. A figura abaixo nos mostra a representação desse elemento linear na curva integral da solução.

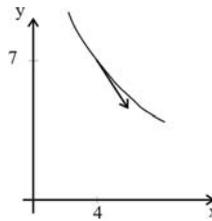


Figura 1.6: Elemento linear na curva integral.

Definição 1.5. Considere a E.D.O.(1.3) e calcule todos os valores de $f(x, y)$ sobre uma malha retangular de pontos (x, y) no plano xy . Para cada ponto (x_0, y_0) dessa malha, associe um vetor (ou um elemento linear) com inclinação $f(x_0, y_0)$. A coleção de todos esses vetores será chamada de **campo de direções** de (1.3). É por esta razão que dada uma E.D.O. como (1.3) chamamos muitas vezes a função $f(x, y)$ de campo associado a E.D.O. dada.

No caso da E.D.O., $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, temos o seguinte campo de vetores. Visualmente, o campo de direções de uma E.D.O. sugere a aparência ou a forma de uma família de curvas integrais dessa E.D.O.. Assim, podemos responder perguntas como, existe soluções periódicas ou existe soluções que crescem ou diminuem indefinidamente (soluções de escape) sem que conheçamos de fato a expressão da família de soluções.

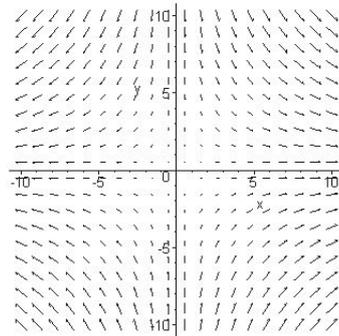


Figura 1.7: Campo de vetores.

1.8 Conclusão

As Equações Diferenciais estão muito presentes no nosso dia a dia e, em particular, as Equações Diferenciais Ordinárias. Com o auxílio das leis da Física descobriu-se uma infinidade de aplicações para essas equações. Infelizmente, nem toda E.D.O. possui uma solução dada explicitamente. Isso fez com que surgissem técnicas que nos dessem informações sobre as soluções sem que necessariamente tivéssemos suas expressões algébricas, essas técnicas estão inseridas no que chamamos de Estudo Qualitativo das E.D.O.'s. O matemático Henri Poincaré foi o precursor desse estudo.



RESUMO

..

Na aula de hoje vimos o que são Equações Diferenciais Ordinárias, como se classificam e como estão relacionadas com outras ciências. Vimos também o que é uma solução de uma E.D.O., que as soluções de uma E.D.O. podem ser dadas de maneira explícita (quando conhecemos sua expressão algébrica) ou de maneira implícita. Vimos o que são soluções de equilíbrio, solução particular e curva integral. Aprendemos que uma E.D.O., em geral, não possui apenas uma solução e como o conceito de solução de uma E.D.O. está ligado ao cálculo de primitivas de uma função, termo que vem lá do Cálculo Integral. Vimos que para se resolver o problema de não se poder obter uma solução explícita para toda E.D.O. pode-se usar as ferramentas da teoria qualitativa, onde é possível obter informações sobre a solução de uma E.D.O. sem que conheçamos sua expressão algébrica.



PRÓXIMA AULA

..

Em nossa próxima aula veremos o que é um problema de valor inicial ou problema de Cauchy e quais as condições para que uma E.D.O. tenha solução única passando por um ponto.



ATIVIDADES

..

Atividade. 1.1. Classifique as equações diferenciais abaixo quanto ao tipo, ordem e linearidade.

a) $3x^2y^{(4)} + (y')^6 = 1.$

b) $3x \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = x^5.$

c) $(\ln x) \frac{d^3x}{dt^3} + 5 \frac{dx}{dt} - x = 0.$

d) $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x.$

e) $x \frac{d^3y}{dx^3} - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + y = 0.$

f) $yy' + 2y = 1 + x^2.$

g) $x^2dy + (y - xy - xe^x)dx = 0.$

h) $\frac{dx}{dt} + 3x \frac{dy}{ds} + 1 = 90.$

Atividade. 1.2. Verifique que a função $g(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ é uma família de soluções da E.D.O.

$$y'' + 16y = 0.$$

Atividade. 1.3. Verifique que uma família a um parâmetro de soluções para

$$y = xy' + (y')^2 \text{ é } y = cx + c^2.$$

Determine um valor de k para que $y = kx^2$ seja uma solução particular para a equação diferencial.

Atividade. 1.4. Encontre uma solução de equilíbrio para as E.D.O.'s (encontre essa solução sem resolver a E.D.O.)

a) $y' = 8xy$

b) $\frac{dx}{dt} = (1 - t^2)(1 - x^2)$

Atividade. 1.5. Mostre que $y_1 = 2x + 2$ e $y_2 = -x^2/2$ são ambas soluções de

$$y = xy' + (y')^2/2.$$

As funções, c_1y_1 e c_2y_2 onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são também soluções? Desenhe as curvas integrais.

Atividade. 1.6. Em certas circunstâncias, um corpo B de massa m em queda encontra resistência do ar proporcional à sua velocidade v . Use a segunda lei de Newton para encontrar a equação diferencial para a velocidade v do corpo em qualquer instante. Lembre-se de que a aceleração é $a = dv/dt$. Suponha neste caso que a direção positiva é para baixo. Depois classifique a equação encontrada.



LEITURA COMPLEMENTAR

..

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

SOTOMAYOR, Jorge, Lições de equações diferenciais ordinárias. IMPA.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

1.9 Referências Bibliográficas

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.