AULA 5

Modelos matemáticos de E.D.O. de primeira ordem

META:

Descrever, resolver e interpretar alguns modelos matemáticos de fenômenos reais que utilizam as Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Modelar matematicamente alguns fenômenos que utilizam Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem.

Interpretar as soluções dessas equações.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos das quatro aulas anteriores.

5.1 Introdução

Caros alunos nessa quinta aula aplicaremos os métodos de resolução de E.D.O.'s aprendidos nas aulas anteriores e assim veremos como essas equações de fato estão presentes na nossa realidade.

5.2 Dinâmica populacional

Em se tratando de dinâmica populacional existem dois modelos matemáticos, muito bem sucedidos, usados para descrever o crescimento ou decaimento de uma população.

O primeiro modelo, proposto em 1798, é devido ao economista inglês Thomas Malthus, conhecido como modelo Malthusiano. Nesse modelo, Malthus se baseia na hipótese de que a taxa de variação de uma população em um determinado instante é proporcional à população total naquele instante, ou seja, se tomarmos as variáveis t como tempo e $P(t)$ como a quantidade de indivíduos da população no instante t, matematicamente, Malthus quer dizer que

$$\frac{dP}{dt} = kP(t),$$

onde dP/dt é a taxa de variação da população e k é a constante de proporcionalidade. Esse modelo se mostra eficaz apenas para estudar pequenas populações em curto espaço de tempo, como por exemplo, crescimento de micro-organismos que se reproduzem por mitose.

O segundo modelo, proposto em 1838, é devido Verhulst, matemático belgo. Esse modelo não considera k como uma constante uma vez que o crescimento de uma população aciona automaticamente certos mecanismos de controle visando reduzir a taxa de crescimento. O modelo proposto por Verhulst consiste em supor que k decresce linearmente com o aumento da população, ou seja, $k = a - bP, a, b \in \mathbb{R}, b > 0$. Assim, segundo Verhulst, a dinâmica de uma população pode ser estudada pela equação

$$\frac{dP}{dt} = (a - bP)P.$$

Esse ainda não é o modelo que considere todas as situações reais possíveis, contudo seus resultados são melhores do que os do modelo de Malthus.

Observe que tanto o modelo de Malthus quanto o modelo de Verhulst são do tipo que se resolvem pelo método de equações separáveis. Vamos aos cálculos !!!

Analisemos primeiramente o modelo de Malthus

$$\frac{dP}{dt} = kP(t) \text{ sujeito à condição } P(t_0) = P_0. \tag{5.32}$$

Separando as variáveis em (5.32), obtemos

$$\frac{dP}{P} = kdt, P(t_0) = P_0.$$

E integrando, segue que $P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}$. Observe que nesse mo delo o crescimento ($k > 0$) ou decrescimento (k<0) de uma população é exponencial!

Consideremos agora o modelo de Verhulst

$$\frac{dP}{dt} = (a - bP)P, \text{ sujeito à condição } P(t_0) = P_0. \tag{5.33}$$

Usando frações parciais, temos que

$$\frac{1}{(a - bP)P} = \frac{1}{aP} + \frac{b}{a(a - bP)},$$

assim o P.V.I. (5.33) se reduz a

$$\frac{dP}{aP} + \frac{b\,dP}{a(a-bP)} = dt, P(t_0) = P_0.$$

Integrando a E.D.O. acima, temos

$$\frac{1}{a}ln|P| - \frac{1}{a}ln|a-bP| = t + c, \mathbb{R}.$$

Daí, se $P(t_0) = P_0$, fazendo algumas simplificações, chegamos a

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a-bP_0)e^{-a(t-t_0)}}.$$

Abaixo descrevemos a curva integral da solução

Exemplo 5.1. A população de uma cidade cresce a uma taxa proporcional à população presente num instante de tempo t. A população inicial de 500 cresce 15% em 10 anos. Qual será a po pulação em 30 anos?

Pelo enunciado vemos que esse problema de crescimento populacional leva em conta o modelo de Malthus, assim a expressão da solução é dada por

$$P(t) = ce^{kt}, c \in \mathbb{R}.$$

Sabemos, pelo enunciado, que $P(0) = 500$ e $P(10) = 500 + 0,15 \cdot 500 = 500 \cdot 1,15$. Assim, $500 = ce^0$ que resulta $c = 500$ e $500 \cdot 1,15 = 500e^{10k}$ que nos dá $k = \frac{\ln 1,15}{10}$. Assim, a população em 30 anos será $P(30) = 500e^{30\frac{\ln 1,15}{10}} \simeq 760$.

5.3 Datação da idade de um fóssil

A datação de um fóssil usando carbono, desenvolvida pelo químico Willard Libby, por volta de 1950, baseia-se no fato de que o isótopo carbono 14 é produzido na atmosfera pela ação da radiação cósmica sobre o nitrogênio. A razão da quantidade de $C-14$ em relação ao carbono comum na atmosfera parece ser uma constante e, consequentemente, a quantidade proporcional de isótopo presente em todos os organismos vivos é a mesma na atmosfera. Quando um organismo morre ele deixa de absorver $C - 14$, dessa maneira comparando a quantidade proporcional de $C - 14$ presente em um fóssil com a razão constante encontrada na atmosfera e sabendo que o tempo de meia vida (tempo necessário para que a metade dos átomos de uma quantidade inicial de uma substância se desintegrem ou transformem-se em átomos de um outro elemento) do radiativo $C - 14$ é aproximadamente 5600 anos, é possível estimar o ano que aquele organismo vivo morreu, (ZILL, 2003).

Observe, pelo exposto acima, que o problema da datação de um fóssil é basicamente estruturado pelo decaimento radioativo do isótopo $C-14$ presente nos organismos vivos. Acredita-se que o fenômeno do decaimento radioativo acontece de maneira que a taxa de decaimento segundo a qual o núcleo de uma substância decai é proporcional à quantidade da substância remanescente no instante t, ou seja, matematicamente falando

$$\frac{dA}{dt} = kA(t),$$

onde $A(t)$ é a quantidade de substância remanescente no instante de tempo t. Dessa maneira obtemos uma equação diferencial seme lhante ao do modelo populacional de Malthus. Na próxima seção veremos um outro fenômeno que é modelado matematicamente pelo mesmo tipo de E.D.O..

Exemplo 5.2. No sertão paraibano foram encontradas várias pinturas gravadas em pedra. Arqueologistas usaram pedaços de madeira queimados nesse local para datar a idade dessas pinturas pré-históricas. Com a ajuda de um aparelho de medição, detectou-se que 90% do $C-14$ havia decaído daqueles pedaços de madeira encontrados. Estime a idade das pinturas encontradas.

Observe que nesse problema teremos $A(5600) = A_0$, onde $A_0 = A(0)$ é a quantidade remanescente de carbono no instante zero e $A(t) = 0,1\,A_0$.

5.4 Esfriamento e aquecimento de um corpo

De acordo com a lei do aquecimento e resfriamento de um corpo, descrita por Newton, a taxa segundo a qual a temperatura de um corpo varia é porporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio que o rodeia (temperatura ambiente). Assim, considerando $T(t)$ a temperatura do corpo no instante de tempo t e T_a a temperatura do ambiente em que se encontra o corpo, temos a seguinte equação que modela matematicamente o fenômeno do aquecimento ou resfriamento de um corpo

$$\frac{dT}{dt} = k(T(t) - T_a), k \in \mathbb{R}.$$

Convidamos o aluno interessado a pensar no seguinte problema.

Mãos a obra: Um indivíduo é encontrado morto em seu escritório pela sua secretária que liga imediatamente para a polícia. Quando a polícia chegou imediatamente mediu a temperatura do defunto, achando 35^oC; uma hora depois mediu novamente obtendo $34,2^oC$. Sabendo que a temperatura do escritório é de 20^oC e supondo que a temperatura normal de uma pessoa viva seja constante e igual a

$36,5^oC$,

a- Determine quanto tempo depois da morte do indivíduo a polícia chegou no escritório. Resposta: Aproximadamente 1,7 horas.

b- Sabendo que a polícia chegou 2 horas depois que a secretária telefonou, decida se o indivíduo morreu antes da secretária telefonar para a polícia ou depois da secretária ter telefonado para a polícia?

5.5 Circuitos elétricos

Considere um circuito em série de malha simples, descrito abaixo, contendo um resistor com resistência R, um indutor com indutância L e um capacitor com capacitância C.

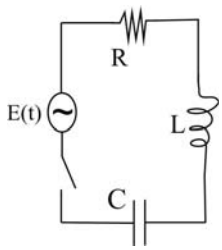

Figura 5.1: Circuito em malha simples.

Denotemos por $i(t)$ a corrente que passa pelo circuito quando a chave é fechada e $q(t)$ a carga no capacitor em um instante t. De acordo com a **Lei de Kirchhoff**, a voltagem aplicada $E(t)$ em uma malha fechada deve ser igual à soma das quedas de voltagem na malha. Sabe-se que quando uma corrente $i(t)$ passa por um resistor ou um indutor ou um capacitor, a tensão retida por esses componentes é dada, respectivamente, por $R \cdot i$, $L \cdot \frac{di}{dt}$ e $\frac{1}{C} \cdot q$. Dessa maneira, usando a Lei de Kirchhoff, obtemos

$$E(t) = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q$$

e como $i = \frac{dq}{dt}$ esta equação pode ser reescrita da seguinte maneira

$$E(t) = R \cdot \frac{dq}{dt} + L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot q. \tag{5.34}$$

Portanto, a quantidade de carga ao longo do tempo num circuito de malha simples, como o descrito acima, é dada pela solução da E.D.O. (5.34).

Mãos a obra Uma força eletromotriz

$$E(t) = \begin{cases} 120, & 0 \leq t \leq 20 \\ 0, & t > 20 \end{cases}$$

é aplicada em um circuito em série RL no qual a indutância é 20 henrys e a resistência é de 2 ohms. Ache a corrente $i(t)$ se $i(0) = 0$.

5.6 Diluição de soluções

Suponha que, em um tanque se tenha 50 litros de água pura, a qual começa a receber uma salmoura (solução de água com sal) de concentração 3 kg de sal por litro de solução a uma razão constante de 2 litros por segundo. Um mecanismo de agitação no tanque mantém homogênea a solução que vai sendo formada. Começa a se retirar do tanque a solução formada, na razão de 2 litros por segundo. Como podemos saber a quantidade de sal presente no tanque no instante de tempo t?

Observação 5.1. A mistura de duas soluções salinas com concentrações diferentes também é feita usando a mesma idéia desse tipo de questão.

Seja $x(t)$ a quantidade de sal em kg presente no tanque num tempo t. Portanto a concentração de sal na solução é $\frac{x}{50}kg/l$. Daí tem-se que a taxa de variação de sal no tanque obedece a seguinte E.D.O.

$$\frac{dx}{dt} = TE - TS = 3 \cdot 2 - \frac{x}{50} \cdot 2, \tag{5.35}$$

onde TE e TS quer dizer, respectivamente, taxa de entrada de sal e taxa de saída de sal.

É fácil ver que a equação (5.35) é do tipo linear ou se preferir podemos resolvê-la separando as variáveis.

5.7 Trajetórias ortogonais

Antes de falarmos como obter trajetórias ortogonais é necessário que definamos alguns termos que usaremos aqui.

Definição 5.1. (**Curvas Ortogonais**)- Duas curvas $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são ortogonais em um ponto P se, e somente se, suas retas tangentes T_1 e T_2 forem perpendiculares no ponto de interseção, ou seja, se

$$m_1 \cdot m_2 = -1, \tag{5.36}$$

onde m_1 e m_2 são respectivamente os coeficientes angulares das retas tangentes. (aqui estamos supondo retas tangentes não paralelas aos eixos coordenados.)

Definição 5.2. (**Trajetórias ortogonais**)- Quando todas as curvas de uma família $G(x, y, c_1) = 0$ interceptam ortogonalmente todas as curvas de uma outra família $H(x, y, c_2) = 0$, dizemos que as famílias são trajetórias ortogonais uma da outra.

Exemplo 5.3. A família de retas $y = c_1 x$ e a família de círculos concêntricos $x^2 + y^2 = c_2$ são trajetórias ortogonais. Veja figura abaixo

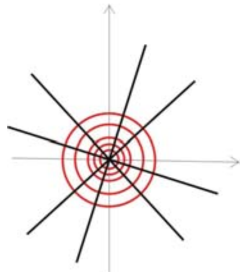

Figura 5.2: Trajetórias ortogonais.

Dada uma família de curvas $G(x, y, c_1) = 0$ para encontrarmos uma família de curvas $H(x, y, c_2) = 0$ tal que G e H sejam trajetórias ortogonais devemos proceder da seguinte maneira: suponha que $G(x, y, c_1) = 0$ seja a família de soluções da E.D.O.

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y),$$

então as inclinações das retas tangentes às soluções dessa família no ponto (x, y) são dados por $g(x, y)$. Portanto, segundo a condição (5.36), para acharmos a família de curvas ortogonais as curvas $G(x, y, c_1) = 0$, devemos achar a família de soluções da E.D.O. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{g(x,y)}$.

Exemplo 5.4. A família de hipérboles $y = \frac{c_1}{x}$ é uma família de soluções da E.D.O.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Assim, a E.D.O. da família ortogonal a essa é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

A família de soluções dessa E.D.O. é dada por $y^2 - x^2 = c_2$ que também é uma família de hipérboles com eixo real sobre o eixo y. Abaixo descrevemos as duas famílias

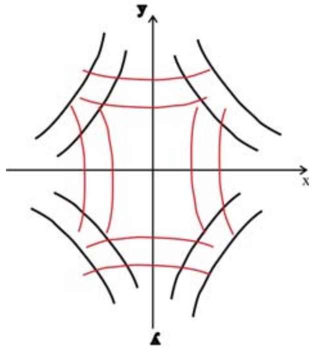

Figura 5.3: Trajetórias ortogonais.

Famílias de curvas mutuamente ortogonais aparecem de modo natural em muitos problemas físicos. Por exemplo, as curvas de fluxo de calor numa lâmina fina de metal são ortogonais às curvas de temperatura constante, as chamadas curvas isotérmicas.

Ainda existem mais aplicações a serem estudadas e exploradas. Para quem deseja conhecer mais aplicações e se aprofundar nesse assunto, sugerimos o livro *Equações Diferenciais com aplicações* de Bassanezi e Ferreira Jr., Editora Habra.

5.8 Conclusão

Na aula de hoje, vimos diversas aplicações para as E.D.O.'s de primeira ordem. É muito amplo o campo de aplicabilidade dessas equações, as quais são usadas em problemas de Biologia, Física, Química e Matemática. Alguns problemas vistos nessa aula são modelados, basicamente, pela mesmo tipo de equação. É o caso do modelo de crescimento populacional Malthusiano, esfriamento ou aquecimento de um corpo e datação da idade de um fóssil.

RESUMO

Hoje vimos diversos problemas práticos, tais como:

1. Estudo da dinâmica populacional
2. Datação da idade deum fóssil
3. Esfriamento ou aquecimento de um corpo
4. Circuitos elétricos
5. Diluição de soluções
6. Como obter trajetórias ortogonais.

Todos esses problemas são modelados por equações diferenciais ordinárias de primeira ordem cuja resolução aprendemos nas aulas 03 e 04 desse livro.

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula começaremos expondo alguns resultados teóricos que nos serão imprescendíveis na hora de resolvermos algmas E.D.O. lineares de ordem maior do que um.

ATIVIDADES

Atividade. 5.1. Uma substância radioativa decompõe-se a uma razão proporcional à quantidade presente, e no fim de 1500 anos reduz-se à metade da quantidade original. Em quantos anos, a quantidade original se reduz a três quartos? Qual a quantidade da substância encontrada no fim de 2000 anos?

Atividade. 5.2. Encontre as trajetórias ortogonais a $x+y = c_1\, e^y$ que passam por $(0,5)$.

Atividade. 5.3. Sabe-se que a população de uma certa comunidade cresce a uma taxa proporcional ao número de pessoas em qualquer instante. Se a população duplicou em 5 anos, quando ela triplicará? Quando ela quadruplicará?

Atividade. 5.4. O isótopo radioativo de chumbo, Pb-209, decai a uma taxa proporcional à quantidade presente no instante t e tem uma meia-vida de 3,3 horas. Se houver 1 grama de chumbo inicialmente, quanto tempo levará para que 90% do chumbo decaia?

Atividade. 5.5. Uma força eletromotriz é aplicada a um circuito em série LR no qual a indutância é de 0,1 henry e a resistência é de 50 ohms. Ache a curva $i(t)$ se a corrente inicial é zero. Determine a corrente quando $t \to \infty$.

Atividade. 5.6. Deduza que a equação diferencial governando a velocidade v de uma massa em queda sujeita à resistência do ar proporcional à velocidade instantânea é

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

onde $k > 0$ é uma constante de proporcionalidade, considere o sentido positivo para baixo. Use essa equação para responder

a)Resolva a equação sujeita à condição inicial $v(0) = v_0$.

b) Use a solução do item a) para determinar a velocidade-limite ou terminal da massa.

Atividade. 5.7. Um termômetro é levado para fora de um quarto, onde a temperatura ambiente é de 5^oF . Após 1 minuto, o termômetro marca 55^oF, e após 5 minutos, 30^oF. Qual era a temperatura inicial no quarto?

LEITURA COMPLEMENTAR

BASSANEZI, R.C., FERREIRA, JR. W., Equações Diferenciais com aplicações. Editora Habra, São Paulo, 1988.

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

5.9 Referências Bibliográficas

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

KREIDER, KULLER, OSTBERG, Equações Diferenciais, USP, 1972.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.