AULA 6

E.D.O. lineares de ordem superior

META:

Descrever todo o fundamento teórico necessário para apresentar as técnicas de resolução para E.D.O. lineares de ordem superior.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Reconhecer uma E.D.O. linear homogênea e não homogênea de ordem superior.

Descrever as principais propriedades das soluções desse tipo de E.D.O..

Aplicar satisfatoriamente o método conhecido por redução de ordem de uma E.D.O. linear homogênea de ordem superior.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos das aulas 1 e 2.

Consideramos que uma E.D.O. é de ordem superior quando sua ordem é igual ou maior do que 2.

6.1 Introdução

Caros alunos, nessa sexta aula gastaremos um tempo apresentando definições e alguns resultados importantes para o entendimento das técnicas de resolução de E.D.O.'s lineares de ordem superior, as quais nós começaremos a estudar na aula seguinte.

6.2 Equações diferenciais ordinárias lineares de ordem superior - Fundamentos teóricos.

Vale a pena recordar que uma equação diferencial de ordem n da forma

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

é dita linear. Para uma E.D.O. linear de ordem n, um P.V.I. é da forma

$$\begin{aligned} a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y &= g(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)} &= y_{n-1}, \end{aligned} \tag{6.37}$$

onde $x_0, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ são constantes.

Teorema 6.1. *Considere o P.V.I. (6.37) tal que $a_n(x), \cdots, a_0(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas num intervalo I com $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Se $x = x_0$ é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução $y(x)$ para o P.V.I. (6.37) definida num intervalo $J \subset I$ centrado em x_0.*

Até que se mencione o contrário, daqui para frente, toda equação linear mencionada estará sob as hipóteses do teorema de existência e unicidade enunciado acima.

Observação 6.1. Existe também um outro tipo de problema: **o problema de valor de contorno**, (P.V.C.). A equação

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

sujeita às condições

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, \cdots, y(x_{n-1}) = y_{n-1}$$

é chamado Problema de Valor de Contorno. Esses problemas se caracterizam pelo fato das condições de contorno ou condições de fronteira envolverem apenas a função, como é o caso apresentado acima, ou as suas derivadas ($y'(x_0) = y_0, y'(x_1) = y_1, \cdots, y'(x_{n-1}) = y_{n-1}$), ou uma misturas das duas, além da variável dependente y ou suas derivadas serem especificadas em pontos distintos. Um problema de valor de contorno pode ter muitas, uma ou nenhuma solução.

Na subseção abaixo abordaremos o assunto de dependência e independência linear de funções, o qual será muito útil quando falarmos de solução geral de equações mais adiante.

6.2.1 Dependência e independência linear de funções

Definição 6.1. (**Dependência linear**) Dizemos que um conjunto de funções $f_1, f_2, \cdots, f_k$ é linearmente dependente (L.D.) num intervalo I se existem constantes $c_1, \cdots, c_n$ não todas nulas tais que

$$c_1 f_1(x) + \cdots, c_n f_n(x) = 0$$

para todo $x \in I$. Caso contrário, dizemos que $f_1, f_2, \cdots, f_n$ são linearmente independentes (L.I.) em I, ou seja, se existirem cons tantes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ tais que se $c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)$, para algum $x \in I$ então $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Exemplo 6.1. As funções $f_1(x) = sec^2 x$, $f_2(x) = tan^2 x$ e $f_3(x) = 1$ são L.D. em $I = (-\pi/2, \pi/2)$. De fato, observe que $sec^2 x = 1 + tan^2 x$ para todo $x \in I$. Assim, $sec^2 x - tan^2 x - 1 = 0$, logo $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = -1$.

A seguir apresentaremos um critério para identificarmos se um dado grupo de funções não é linearmente dependente. Esse critério é muito útil pois não temos que recorrer mais a definição de funções L.D. para determinar a independência de funções.

Critério para independência linear de funções.

Teorema 6.2. *Sejam $f_1, f_2, \cdots, f_k$ k funções pelo menos $k-1$ vezes diferenciáveis em um intervalo I. Então, se*

$$det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_k'(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \cdots & f_k^{(k-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

em um ponto $x_0 \in I$ segue que o conjunto de funções $f_1, \cdots, f_k$ será **linearmente independente** *em I.*

O determinante apresentado no teorema acima é denotado por $W(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ e é conhecido como **o Wronskiano das funções** $f_1, \cdots, f_k$.

O termo Wronskiano foi dado em homenagem ao polonês e matemático Wronski que viveu entre 1778 a 1853.

Exemplo 6.2. Considere as funções f_1, f_2 dadas por $f_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $f_2(x) = e^{\alpha x} sen\,\beta x$, onde α, β são números reais tais que β é diferente de zero. As funções f_1, f_2 dadas são linearmente independentes para todo em $\mathbb{R}$. De fato, observe que

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x} sen\,\beta x \\ e^{\alpha x}[\alpha\cos\beta x - \beta sen\,\beta x] & e^{\alpha x}[\alpha sen\,\beta x + \beta\cos\beta x] \end{vmatrix} = \beta e^{\alpha x},$$

o qual é diferente de zero para todo x real. Assim, pelo teorema acima provamos que f_1, f_2 são linearmente independente em $\mathbb{R}$. Observe que se $\alpha = 0$, as funções f_1 e f_2 se reduzem, respectivamente a $\cos\beta x$ e $sen\,\beta x$, as quais ainda serão linearmente independente em $\mathbb{R}$.

A recíproca do teorema acima em geral é falsa, como mostra o exemplo a seguir, contudo para soluções de uma classe de E.D.O. lineares (as E.D.O.'s lineares homogêneas) a recíproca é válida.

Exemplo 6.3. As funções f_1 e f_2 dadas por $f_1(x) = x^3$ e $f_2(x) = |x|^3$ são L.I., no entanto seu Wronskiano é zero. É um bom exercício para o leitor interessado provar essa afirmação. (Use a definição de função modular, ou seja, $|x| = x$, se $x > 0$ e $|x| = -x$, se $x < 0$.)

6.2.2 Soluções de equações diferencias ordinárias lineares.

Nesta subseção enunciaremos resultados importantíssimos os quais serão usados adiante.

Equações lineares homogêneas

Uma E.D.O. linear de n-ésima ordem da forma

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (6.38)$$

é dita **E.D.O. linear homogênea**. Enquanto que

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \qquad (6.39)$$

onde $g(x)$ não é identicamente zero é dita **E.D.O. linear não homogênea**.

No texto a seguir, estamos considerando as funções $a_0, a_1, \cdots a_n$, dadas acima, contínuas em um intervalo I e $a_n(x) \neq 0$, para todo

$x \in I$.

Princípio da superposição

Teorema 6.3. *Sejam $y_1, y_2, \cdots, y_k$ soluções da E.D.O. linear* **homogênea** *(6.38) num intervalo I. Então, a combinação linear*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots c_k y_k(x),$$

onde $c_1, \cdots, c_k$ são constantes é também solução de (6.38) em I.

É fácil ver que do teorema acima segue os seguintes corolários

Corolário 6.1. *Seja $y_1(x)$ solução de (6.38), então $y(x) = c_1 y_1(x)$ é também uma solução de (6.38), ou seja, múltiplo de solução é solução.*

Corolário 6.2. *Uma E.D.O. linear* **homogênea** *sempre possui a solução trivial.*

Em geral o corolário 6.2 não é válido para E.D.O.'s lineares não homogênea.
Observe que, uma vez que o conjunto de todas as soluções de uma E.D.O. linear homogênea possui a solução trivial e combinação de soluções é solução, podemos afirmar que esse conjunto é um espaço vetorial e como tal é coerente procurarmos a base desse espaço vetorial. Dessa maneira, abaixo daremos um critério para identificarmos quando n soluções de uma E.D.O. linear homogênea são L.I..

Soluções linearmente independentes

Aqui estamos interessados em determinar quando k soluções da E.D.O. linear homogênea (6.38) são L.I.. Nesse caso vale a recíproca do Teorema 6.2, a saber

Teorema 6.4. *Sejam $y_1, y_2, \cdots, y_k$ soluções de (6.38) num intervalo I. Então, o conjunto de soluções $y_1, y_2, \cdots, y_k$ é linearmente independente se, e somente se,*

$$W(y_1, \cdots, y_k) \neq 0$$

para todo x em I.

Definição 6.2. Qualquer conjunto $y_1, \cdots, y_n$ de **n** soluções L.I. da E.D.O. linear homogênea de **ordem** n (6.38) em um intervalo I é chamado de **conjunto fundamental de soluções** de (6.38) num intervalo I.

Teorema 6.5. *Sejam $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ um conjunto fundamental de soluções de (6.38) definidas num intervalo I. Então, a* **solução geral** *da equação (6.38) nesse intervalo é dada por*

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

onde $c_1, \cdots, c_n$ são constantes.

É útil vermos a demonstração desse teorema uma vez que na demonstração usamos fortemente o princípio da superposição e o teorema de existência e unicidade. Então, vamos a prova!!

Demonstração: A fim de simplificar a escrita, faremos a demonstração para o caso particular $n = 2$. Assim, seja $\overline{y}(x)$ uma solução qualquer da E.D.O. linear homogênea

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

E sejam $y_1(x), y_2(x)$ um conjunto fundamental da E.D.O. acima. Assim, uma vez que y_1, y_2 são L.I. segue, pelo Teorema 6.4, que $W(y_1, y_2) \neq 0$, para todo $x \in I$. Portanto, seja $x_0 \in I$ tal que $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) \neq 0$ e seja $k_1 = \overline{y}(x_0)$ e $k_2 = \overline{y}'(x_0)$. Se examinarmos o sistema

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = k_1$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = k_2$$

veremos que podemos encontrar de maneira única as constantes c_1 e c_2, uma vez que o determinante da matriz dos coeficientes, $W(y_1(x_0), y_2(x_0))$, é diferente de zero.

Seja $G(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Observe que, pelo princípio da superposição, G é solução de (6.38) e além disso note que

$$G(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = k_1$$

$$G'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = k_2.$$

Dessa maneira, a função G é solução do P.V.I.

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, y(x_0) = k_1, y'(x_0) = k_2.$$

Por outro lado, temos que $\overline{y}(x)$ é solução desse P.V.I., então, pelo teorema de existência e unicidade, isso só pode acontecer se $\overline{y}(x) = G(x)$, para todo $x \in I$.

Portanto, mostramos que qualquer solução da E.D.O. (6.38) é escrita como uma combinação linear das funções de um conjunto fundamental de (6.38).

∎

Teorema 6.6. *(***Existência de um conjunto fundamental***)* *Dada uma E.D.O. linear homogênea de ordem n (6.38) existe (e-xiste, mas em geral não é único!) sempre um conjunto fundamental para esta E.D.O. definido em um intervalo I.*

Uma solução é dita solução geral de uma equação diferencial ordinária quando qualquer solução dessa E.D.O. puder ser escrita no formato dessa solução.

Equações lineares não homogênea

Aqui descreveremos como é a expressão da solução geral de uma E.D.O. linear não homogênea.

Teorema 6.7. *Seja y_p uma solução particular da E.D.O. linear* **não homogênea** *(6.39) num intervalo I e seja $\{y_1, \cdots, y_n\}$ um conjunto fundamental da E.D.O. linear homogênea associada a (6.39) em I. Então, para qualquer solução $y(x)$ de (6.39) existem constantes $c_1, \cdots, c_n$ tais que*

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x), \tag{6.40}$$

onde $y_c(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$.

Demonstração: Para facilitar a escrita, novamente, faremos a demonstração para o caso particular $n = 2$.
Sejam $y(x)$ e $y_p(x)$ soluções de

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x).$$

Considere a função $u(x) = y(x) - y_p(x)$, então

$$a_2(x)[y'' - y_p''] + a_1(x)[y' - y_p'] + a_0[y - y_p] = f(x) - f(x) = 0.$$

Logo, a função $u = y - y_p$ é solução da E.D.O. homogênea associada

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Assim, pelo teorema anterior $u(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, onde $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental da E.D.O. homogênea acima. Portanto, $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$.

■

Dessa maneira, pelo teorema acima, concluímos que uma solução geral de (6.39) é dada por (6.40), a qual nada mais é do que a soma da solução geral de (6.38) mais uma solução particular da E.D.O. linear não homogênea (6.39). Assim, por exemplo, dada uma E.D.O. linear não homogênea

$$y'' - 7y' + 10y = 24e^x$$

e uma solução particular dessa E.D.O., $y_p(x) = 6e^x$. Para acharmos uma solução geral da mesma, basta-nos resolver a E.D.O. linear homogênea associada

$$y'' - 7y' + 10y = 0.$$

Abaixo descrevemos um teorema que nos será muito útil na obtenção de soluções para E.D.O.'s lineares não homogêneas.

Teorema 6.8. *Seja y_{p_i}, para $i = 1, \cdots, k$ solução da E.D.O. linear*

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = f_i(x), i = 1, \cdots, k.$$

Então,

$$y_p = y_{p_1} + \cdots + y_{p_k}$$

é uma solução particular para

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = f_1(x) + \cdots + f_k(x)$$

No exemplo abaixo explicaremos melhor a importância desse teorema.

Exemplo 6.4. Queremos encontrar uma solução particular para a E.D.O.

$$\frac{y''}{4} + y' + y = x^2 - 2x.$$

Observe que, pelo teorema acima, como $y_{p_1} = x^2 - 2x + 3/2$ é solução particular de

$$\frac{y''}{4} + y' + y = x^2$$

e $y_{p_2} = -2x + 2$ é solução particular de

$$\frac{y''}{4} + y' + y = -2x,$$

então uma solução particular da E.D.O. em questão será a soma das duas soluções particulares encontradas, ou seja $y_p(x) = x^2 - 4x + 7/2$.

6.3 Redução de ordem

Uma das propriedades importantes das equações lineares é que podemos simplificar ou em algumas vezes resolver uma E.D.O. linear

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0 y = g(x)$$

mesmo não tendo um conjunto fundamental para a E.D.O. linear homogênea associada

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0 y = 0.$$

A idéia é reduzir a ordem da E.D.O. linear conhecendo uma solução não trivial da E.D.O. linear homogênea associada. A essa técnica damos o nome de **redução de ordem**. O exemplo abaixo ilustra o que falamos

Exemplo 6.5. Considere a E.D.O. linear de segunda ordem

$$x^2y'' + x^3y' - 2(1 + x^2)y = x, x \in (0, \infty). \tag{6.41}$$

Uma solução para a E.D.O. homogênea associada é dada por $y(x) = x^2$. Procuremos uma solução para a E.D.O. não homogênea acima da forma $y(x) = x^2u(x)$. Assim, derivando essa expressão e substituindo em (6.41), obtemos

$$x^2(x^2u'' + 4xu' + 2u) = x^3(x^2u' + 2xu) - 2(1 + x^2)x^2u = x,$$

que organizando fica

$$u'' + \frac{4 + x^2}{x}u' = \frac{1}{x^3}.$$

Observe que podemos considerar esta última equação como uma equação linear de primeira ordem em u' (aqui houve a redução de ordem). Nesse caso, resolvendo essa equação linear, obtemos

$$u'(x) = \frac{1}{x^4} + c_1x^{-4}e^{-x^2/2}$$

e, integrando temos

$$u(x) = -\frac{1}{3x^3} + c_1\int x^{-4}e^{-x^2/2}dx + c_2.$$

Daí, concluímos que

$$y(x) = x^2u(x) = -\frac{1}{3x} + c_1x^2\int x^{-4}e^{-x^2/2}dx + c_2x^2$$

é solução geral de (6.41) uma vez que as funções $\int x^{-4}e^{-x^2/2}$ e x^2 são soluções L.I. da E.D.O. homogênea associada.

A seguir apresentaremos a técnica de redução de ordem apenas para E.D.O. linear homogênea de segunda ordem.
Considere uma E.D.O. linear homogênea de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{6.42}$$

tentaremos construir uma segunda solução de (6.42) num intervalo I conhecendo-se uma solução não trivial, $y_1(x)$, de (6.42) definida em I. A idéia é que (6.42) pode ser reduzida a uma E.D.O. de primeira ordem por meio de uma transformação envolvendo y_1.
Seja y_1 uma solução não trivial de (6.42), procuramos uma segunda solução y_2 de (6.42) de modo que y_1 e y_2 sejam L.I. em I. Observe que se y_1 e y_2 são L.I. em I, então o quociente y_2/y_1 não será uma constante em I, ou seja, $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} = u(x), x \in I$, onde $u(x) \neq c$, e c é uma constante. Logo, a solução procurada é dada por $y_2(x) = u(x)y_1(x)$.

O método da redução de ordem

Considere a E.D.O. linear homogênea de segunda ordem na forma padrão

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{6.43}$$

onde P, Q são contínuas em algum intervalo I. Suponha que y_1 é uma solução não nula conhecida de (6.43) definida em I. Considere uma segunda solução de (6.43) da forma $y_2(x) = y_1(x)u(x)$, assim

$$y_2' = u'y_1 + uy_1'$$

e

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''.$$

Substituindo essas expressões em (6.43), obtemos

$$\begin{aligned} y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0 \quad &\Leftrightarrow u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + P[u'y_1 + uy_1'] + Q[uy_1] = 0 \\ &\Leftrightarrow u''y_1 + u'[2y_1' + Py_1] + u[y_1'' + Py_1 + Q] = 0 \\ &\Leftrightarrow u''y_1 + u'[2y_1' + Py_1] = 0 \end{aligned}$$

uma vez que $y_1'' + Py_1 + Q = 0$ (pois y_1 é solução da E.D.O. homogênea). Fazendo $u' = w$, temos

$$y_1 w' + [2y_1' + Py_1]w = 0 \Leftrightarrow w' + [2y_1'/y_1 + P]w = 0.$$

De onde obtém-se $\frac{dw}{w} + [2\frac{y_1'}{y_1} + P]dx = 0 \Rightarrow \frac{dw}{w} + 2\frac{dy_1}{y_1} + Pdx = 0.$
Integrando segue que $ln|wy_1^2| = -\int Pdx + \bar{c}$ e assim

$$w = \frac{ce^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}.$$

Então, como $w = u'$, temos

$$u(x) = c\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx + d, c, d \in \mathbb{R}.$$

Portanto, uma vez que $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ segue

$$y_2(x) = cy_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx + dy_1(x).$$

Escolhendo $d = 0$ e $c = 1$, temos

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx. \qquad (6.44)$$

Observe que no decorrer do processo o problema se reduziu a resolver uma E.D.O. uma unidade a menos do que a E.D.O. inicial, ou seja, tudo se reduziu a calcular a solução da E.D.O. $w' + [2y_1'/y_1 + P]w = 0$.

Vamos aplicar esse método ?

Mãos a obra Ache a solução geral da E.D.O. $xy'' - y' = 0$ sabendo que $y = 1$ é uma solução dessa E.D.O..

6.4 Conclusão

Na aula de hoje vimos todo o aparato teórico que nos ajudará a resolver equações diferenciais lineares mais adiante. Vimos que essas equações dispõem de propriedades importantíssimas as quais possibilitam que esse conjunto de equações possa ser melhor explorados e, em alguns casos, as soluções encontradas.

RESUMO

¨

Na aula de hoje aprendemos algumas propriedades das equações diferenciais lineares, tais como:

- Combinação linear de soluções de uma E.D.O. linear homogênea é sempre uma solução dessa E.D.O.. Além disso, a solução geral para esse tipo de E.D.O. é dado por uma combinação linear de funções que pertencem a um conjunto fundamental dessa E.D.O..

- A solução trivial é sempre solução de uma E.D.O. linear homogênea.

- É possível obter a solução geral para uma E.D.O. linear homogênea de segunda ordem conhecendo-se apenas uma solução dessa E.D.O.. Esse processo é conhecido por redução de ordem para E.D.O.'s lineares homogênea de segunda ordem.

- O processo de redução de ordem pode ser aplicado a E.D.O. lineares de ordem superior, seja ela homogênea ou não homogênea.

Além disso, aprendemos um critério para identificarmos se um determinado conjunto de soluções de uma E.D.O. linear homogênea é linearmente independente ou não, para isso usamos o conceito de Wronskiano desse conjunto de soluções. Vimos que basta que o Wronskiano desse grupo de funções seja diferente de zero em algum ponto do domínio dessas funções para que esse conjunto seja L.I..

PRÓXIMA AULA

..

Em nossa próxima aula começaremos expondo de fato os métodos para resolução de E.D.O. lineares de ordem maior do que um.

ATIVIDADES

..

Atividade. 6.1. Verifique se pode ser encontrado um membro da família de soluções $y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$ da EDO $y'' - 2y' + 2y = 0$ que satisfaça as condições de contorno $y(0) = 1, y'(\pi) = 0$.

Atividade. 6.2. Verifique se a família de funções a dois parâmetros

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x + (\cos x) ln(\cos x), x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

é a solução geral da EDO linear não homogênea $y'' + y = \sec x$. (**Lembre-se que uma solução geral de uma E.D.O. linear não homogênea é a soma de uma solução de uma solução geral de uma E.D.O. linear homogênea com uma solução particular dessa E.D.O. não homogênea**)

Atividade. 6.3. Use redução de ordem para encontrar uma segunda solução $y_2(x)$ para

$$y'' + 16y = 0; y_1(x) = \cos 4x$$

tal que y_1 e y_2 sejam L.I.

Atividade. 6.4. a)Construa uma EDO de 1a. ordem linear da forma $xy' + a_0(x)y = g(x)$ para a qual $y_c = c/x^3$ e $y_p = x^3$, onde y_c é a solução geral da equação homogênea associada e y_p é uma solução particular da E.D.O. não homogênea dada. Dê um intervalo no qual $y = x^3 + c/x^3$ seja uma solução geral da EDO.

b)Dê uma condição inicial $y(x_0) = y_0$ para a EDO encontrada no item a) de tal forma que a solução do PVI seja $y = x^3 - 1/x^3$.

LEITURA COMPLEMENTAR

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

6.5 Referências Bibliográficas

KREIDER, KULLER, OSTBERG, Equações Diferenciais, USP, 1972.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.