AULA 7

E.D.O. lineares com coeficientes constantes

META:

Descrever o método de resolução para equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Resolver uma E.D.O. linear com coeficientes constantes.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos da aula anterior.

7.1 Introdução

Caros alunos estamos praticamente na metade do nosso curso e nessa sétima aula vamos aprender como resolver algumas das equações diferenciais lineares de ordem superior, as quais são equações que modelam muitos problemas reais. Aqui nos restringiremos às equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes.

Como vimos na aula anterior, uma solução geral para tais equações é dada pela soma da solução geral da equação homogênea associada e uma solução particular da equação não homogênea. Dessa maneira, começaremos estudando as equações lineares homogêneas com coeficientes constantes.

7.2 Resolvendo equações lineares homogêneas com coeficientes constantes.

Consideremos a equação diferencial linear homogênea de coeficientes constantes de ordem n

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{7.45}$$

onde $a_0, \cdots, a_n$ são constantes. Se $n = 1$, obtemos a equação $a_1 y' + a_0 y = 0$ e já vimos na aula 4 que esta equação tem solução exponencial dada por

$$y(x) = ce^{-\int \frac{a_0}{a_1} dx}, x \in \mathbb{R}.$$

Dessa maneira, nos indagamos se para ordens maiores podemos obter soluções também do tipo exponencial.

Analisaremos aqui o caso $n = 2$. Para $n = 2$, temos

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{7.46}$$

onde a_0, a_1, a_2 são constantes. Suponha que $y(x) = e^{mx}$ seja solução de (7.46). Assim, derivando e substituindo na equação temos

$$a_2 m^2 e^{mx} + a_1 m e^{mx} + a_0 e^{mx} = (a_2 m^2 + a_1 m + a_0) e^{mx} = 0.$$

Como $e^{mx} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $y = e^{mx}$ é solução de (7.46) se , e somente se, m é raiz da equação

$$a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0, \tag{7.47}$$

a qual é conhecida por **equação auxiliar** ou **equação característica** de (7.46).

Observe que ao resolvermos a equação auxiliar (7.47) três casos devem ser considerados, a saber:

1) Raízes reais distintas, m_1, m_2, quando o discriminante $\triangle = a_1^2 - 4a_2 a_0$ é maior do que zero.

2) Raízes reais iguais, $m = m_1 = m_2$, quando o discriminante $\triangle = a_1^2 - 4a_2 a_0$ é igual a zero.

3) Raízes complexas, $m_1 = \alpha + i\beta, m_2 = \alpha - i\beta$, quando o discriminante $\triangle = a_1^2 - 4a_2 a_0$ é menor do que zero.

Comecemos pelo primeiro caso.

Raízes reais distintas

Sob a hipótese que a equação auxiliar (7.47) tenha duas raízes reais distintas m_1 e m_2, encontramos duas soluções para (7.46)

$$y_1(x) = e^{m_1 x} \text{ e } y_2(x) = e^{m_2 x}.$$

Afirmamos que essas duas soluções y_1, y_2 formam um conjunto fundamental para (7.46) para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, calculando o Wronskiano dessas duas funções, obtemos $W(y_1, y_2) = (m_2 - m_1)e^{(m_1+m_2)x}$, o qual é diferente de zero uma vez que $m_1 \neq m_2$. Assim, pelo Teorema 6.5 da aula anterior, uma solução geral de (7.46) é dada por

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}, x \in \mathbb{R}.$$

Raízes reais iguais

Quando $m_1 = m_2 = m$ temos necessariamente uma única solução exponencial, a saber, $y_1(x) = e^{mx}$, onde $m = -a_1/2a_2$. Contudo, mesmo encontrando uma solução apenas neste caso, podemos achar uma segunda solução y_2 de (7.46) de modo que y_1, y_2 formem um conjunto fundamental para (7.46). Acharemos tal solução u sando o processo, apresentado na aula anterior, conhecido por redução de ordem. Assim, pelo que vimos na aula passada, a solução y_2 procurada é da forma $y_2(x) = u(x)e^{mx}$ que derivando e substituindo na equação encontramos

$$y_2(x) = e^{mx} \int \frac{e^{-\int a_1/a_2 dx}}{e^{2mx}} dx = e^{mx} \int \frac{e^{2mx}}{e^{2mx}} dx = xe^{mx}.$$

Assim, neste caso, a solução geral para (7.46) é dada por

$$y(x) = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}, x \in \mathbb{R}.$$

Raízes complexas

Se m_1 e m_2 forem raízes complexas, então $m_1 = \alpha + i\beta$ e $m_2 = \alpha - i\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Portanto, nesse caso temos duas soluções complexas $y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$ e $y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}$. Essas duas soluções são L.I., uma vez que $W(y_1, y_2) \neq 0$, assim temos um conjunto fundamental para a equação homogênea e a solução geral complexa é dada por

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

No entanto, na prática é preferível trabalhar com funções reais, para isso faremos mais alguns cálculos até obtermos uma solução geral composta por funções reais apenas.
Considere a fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + isen\,\theta.$$

Assim, não é difícil ver que $e^{i\beta x} = \cos\beta + isen\,\beta x$ e $e^{-i\beta x} = \cos\beta - isen\,\beta x$.
Uma vez que $y(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ é solução de (7.46) para quaisquer valores de c_1 e c_2, consideremos duas soluções, uma com $c_1 = 1 = c_2$ e outra com $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$. Assim, obtemos as seguintes soluções

$$\begin{aligned} y_1(x) = \quad & e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}[e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}] = e^{\alpha x} 2\cos\beta x \\ y_2(x) = \quad & e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}[e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}] = e^{\alpha x} 2isen\,\beta x \end{aligned}.$$

Como múltiplo de solução é ainda solução (veja Corolário 6.1) segue que

$$\begin{aligned} \overline{y}_1(x) = \tfrac{y_1(x)}{2} = \quad & e^{\alpha x}\cos\beta x \\ \overline{y}_2(x) = \tfrac{y_2(x)}{2i} = \quad & e^{\alpha x} sen\,\beta x \end{aligned}$$

são ainda soluções de (7.46) e, além disso, como $W(\overline{y}_1, \overline{y}_2) \neq 0$, temos que $\overline{y}_1, \overline{y}_2$ é um conjunto fundamental para (7.46). Neste caso, uma solução geral real de (7.46) é dada por

$$\overline{y}(x) = \overline{c}_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + \overline{c}_2 e^{\alpha x} sen\,\beta x.$$

Exemplo 7.1. Encontre a solução do P.V.I.

$$2\frac{d^2y}{dt^2} - 10\frac{dy}{dt} + 12y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 2.$$

A equação auxiliar nesse caso é

$$2m^2 - 10m + 12 = 0,$$

cujas raízes são $m_1 = 3, m_2 = 2$. Assim, a solução geral da E.D.O. dada é

$$y(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{2t}.$$

E, como $y(0) = c_1 + c_2 = -1$ e $y'(0) = 3c_1 + 2c_2 = 2$, segue que $c_1 = 4, c_2 = -5$. Portanto, a solução do P.V.I. é $\overline{y}(x) = 4e^{3t} - 5e^{2t}$.

Exemplo 7.2. Ache todas as soluções da equação

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 4y = 0.$$

Como se trata de uma equação linear homogênea com coeficientes constantes, devemos achar a equação auxiliar, a qual é dada por

$$-m^2 + 4m - 4 = 0,$$

cujas raízes são $m_1 = m_2 = 2$. Assim, para obtermos a expressão para todas as soluções dessa E.D.O., devemos achar uma segunda solução, y_2, que seja L.I. com $y_1(x) = e^{2x}$. Dessa maneira, usando o processo conhecido por redução de ordem, (lembre-se que para usar esse processo a equação deve está na sua forma normal) obtemos

$$y_2(x) = e^{2x}\int \frac{e^{\int 4dx}}{e^{4x}}dx = xe^{2x}.$$

Assim, todas as soluções da E.D.O. $-\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ são da forma

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}.$$

Exemplo 7.3. (**Oscilador harmônico**) Resolva a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0.$$

Nesse caso, a equação auxiliar é

$$m^2 + w^2 = 0,$$

a qual tem raizes complexas, dadas por $m_1 = wi, m_2 = -wi$. Assim, pelo que vimos na explanação teórica, a solução geral real neste caso é

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 sen\, wt.$$

7.2.1 Equações de ordem superior

Em geral, seguindo o mesmo raciocínio do caso $n = 2$, para se resolver uma E.D.O. de ordem n linear homogênea com coeficientes constantes (7.45) precisamos resolver uma equação polinomial de grau n,

$$a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0. \tag{7.48}$$

Então,

• Se todas as raízes de (7.48) forem reais distintas, temos uma solução geral de (7.45) dada por

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}.$$

• Se ocorrer, por exemplo, que a raiz m_1 é 5 vezes repetida (ou seja tem multiplicidade igual a 5) e as demais raízes reais distintas, podemos mostrar que as soluções L.I. correspondentes a m_1 são

$$e^{m_1 x}, xe^{m_1 x}, x^2 e^{m_1 x}, x^3 e^{m_1 x}, x^4 e^{m_1 x}$$

e neste caso teremos como solução geral de (7.45)

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x} + c_3x^2e^{m_1x} + c_4x^3e^{m_1x} \\ &+ c_5x^4e^{m_1x} + c_6e^{m_6x} + \cdots + c_ne^{m_nx}. \end{aligned}$$

• Se ocorrer uma raiz complexa $m_1 = \alpha + i\beta$ com multiplicidade k e as demais raízes reais distintas, sabemos que sua conjugada $m_2 = \alpha - i\beta$ também será raiz de multiplicidade k e assim as funções L.I. serão

$$e^{(\alpha+i\beta)x}, xe^{(\alpha+i\beta)x}, \cdots, x^{k-1}e^{(\alpha+i\beta)x}$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x}, xe^{(\alpha-i\beta)x}, \cdots, x^{k-1}e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

A solução geral **real** neste caso será

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x + c_2 sen\,\beta x] + xe^{\alpha x}[c_3\cos\beta x + c_4 sen\,\beta x] + \\ &\cdots + x^{k-1}e^{\alpha x}[c_{2k-1}\cos\beta x + c_{2k} sen\,\beta x] + c_{2k+1}e^{m_{2k+1}x} + \\ &\cdots + c_ne^{nx}. \end{aligned}$$

Exemplo 7.4. Resolva a E.D.O.

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Essa equação homogênea tem equação auxiliar dada por

$$m^3 + 2m^2 + m = 0,$$

cujas raízes são $m_1 = 0, m_2 = m_3 = -1$. Assim, a solução geral será

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x}.$$

7.3 Resolvendo uma E.D.O. linear não homogênea com coeficientes constantes.

Existem dois métodos conhecidos para se resolver uma E.D.O. linear não homogênea: **coeficientes a determinar**, usado só para equações lineares não homogênea com coeficientes constantes e **variação de parâmetros** usado para quaisquer equações lineares não homogênea. Este último veremos na próxima aula. Aqui apresentaremos o método dos coeficientes a determinar.

Método dos coeficientes a determinar

Pelo Teorema 6.7, da aula anterior, vimos que uma solução geral de uma equação diferencial linear não homogênea

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

é da forma

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x),$$

onde $y_c(x)$ é a solução geral da E.D.O. homogênea associada e y_p é uma solução particular da E.D.O. não homogênea.

Pela seção anterior já sabemos calcular $y_c(x)$ quando a equação linear tem coeficientes constantes, ou seja, quando $a_i(x), i = 0, \cdots, n$ são funções constantes. Logo, para encontrarmos uma solução geral para a E.D.O. não homogênea, precisamos apenas calcular y_p. O método que usaremos aqui para determinar y_p é chamado método dos coeficientes a determinar e só é aplicado a E.D.O.'s na forma

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x),$$

onde $a_i, i = 0, \cdots, n$ são funções constantes e $g(x)$ é uma função polinomial, exponencial ou igual a $c \cos \beta x$, $csen\, \beta x$ ou combinações dessas funções.

Exemplo 7.5. (**A função** $g(x)$ **é uma função polinomial, exponencial ou da forma** $c \cos \beta x$ **ou** $c\, sen\, \beta x$) Resolva a E.D.O.

$$y'' - 4y = x^2 - x + 2.$$

Resolvamos primeiro a E.D.O.linear homogênea associada $y'' - 4y = 0$. A equação auxiliar neste caso é

$$m^2 - 4 = 0$$

cujas soluções são $m_1 = 2, m_2 = -2$. Assim, a solução geral da E.D.O. homogênea é dada por

$$y_c(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Para acharmos uma solução particular y_p, procedamos da seguinte maneira: uma vez que a função $g(x)$ é uma função polinomial quadrática o método nos indica a supor que y_p tem o mesmo formato, ou seja, suponha que

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Derivando y_p e substituindo na equação não homogênea, obtemos $2A - 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 - x + 2$. Organizando o lado esquerdo da igualdade com respeito as potências de x, temos $-4Ax^2 - 4Bx + (2A - 4C) = x^2 - x + 2$. Para que esses polinômios sejam iguais é necessário que

$$-4A = 1, \; -4B = -1, \; 2A - 4C = 2.$$

Assim, segue que $A = -1/4, B = 1/4$ e $C = -5/8$. Portanto, $y_p(x) = -x^2/4 + x/4 - 5/8$ e, consequentemente, uma solução geral da E.D.O. não homogênea $y'' - 4y = x^2 - x + 2$ é

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + -x^2/4 + x/4 - 5/8.$$

Se a função $g(x)$ fosse da forma exponencial, por exemplo, resolva a E.D.O.

$$y'' - 4y = e^{5x}.$$

Neste caso temos que supor que y_p é da forma

$$y_p(x) = Ae^{5x}.$$

Assim, derivando y_p e substituindo, obtemos $25Ae^{5x} - 4Ae^{5x} = e^{5x}$. Organizando o lado esquerdo da igualdade temos $21Ae^{5x} = e^{5x}$, que por igualdade de funções temos que $21A = 1$, daí

$$y_p(x) = \frac{1}{21}e^{5x}.$$

Portanto, uma solução geral da E.D.O. não homogênea $y'' - 4y = e^{5x}$ é

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{21}e^{5x}.$$

Se a função $g(x) = 3\cos 4x$. Neste caso para acharmos uma solução particular da E.D.O.

$$y'' - 4y = 3\cos 4x$$

devemos supor $y_p(x)$ da forma

$$y_p(x) = A\cos 4x + B sen\, 4x.$$

Observação 7.1. Neste caso a função seno apareceu na forma de y_p porque a forma de y_p deve ser a combinação de todas as funções

L.I. que aparecem em $g(x)$ e as que são geradas quando derivamos $g(x)$. Observe que isso foi obedecido nos casos anteriores a este.

Assim, derivando y_p e substituindo na equação, obtemos

$$-16A\cos 4x - 16B sen\, 4x - 4(A\cos 4x + B sen\, 4x) = 3\cos 4x.$$

Organizando o lado esquerdo da equação acima, temos $-20A\cos 4x - 20B sen\, 4x = 3\cos 4x$. Como as funções cosseno e seno são L.I. uma igualdade assim só pode ocorrer se $-20A = 3$ e $-20B = 0$. Logo, $A = -3/20$ e $B = 0$. Portanto,

$$y_p(x) = -\frac{3}{20}\cos 4x.$$

Assim, uma solução geral da E.D.O. não homogênea $y'' - 4y = 3\cos 4x$ é

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{3}{20}\cos 4x.$$

No exemplo abaixo tratamos o caso em que a função $g(x)$ é uma combinação das funções apresentadas no exemplo acima.

Exemplo 7.6. (**a função $g(x)$ é uma combinação de funções**) Resolva a E.D.O.

$$y'' - 4y = x^3 + xe^{6x} + xsen3x.$$

Pela Observação 7.1 a forma de y_p neste caso deve ser

$$y_p(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D+(Ex+F)e^{6x}+(Gx+H)\cos 3x+(Ix+J)sen\, 3x.$$

Então, derivando duas vezes y_p, substituindo na equação o valor de y_p'' encontrado e o valor de y_p, temos

$$-4Ax^3 - 4Bx^2 + (6A - 4C)x + (2B - 4D) + (12E + 32F)e^{6x} + 32Exe^{6x}$$

$$+(-6G - 13J)sen\, 3x - 13Ixsen\, 3x + (6I - 13H)\cos 3x - 13Gx\cos 3x$$

$$= x^3 + xe^{6x} + xsen\, 3x.$$

Observe que organizamos o lado esquerdo da igualdade acima distribuindo os coeficientes segundo as funções $x^3, x^2, x, 1, xe^{6x}, e^{6x}, \cos 3x$, $x\cos 3x$, $sen\, 3x$, $xsen\, 3x$, visto que essas funções são L.I. Dessa maneira, a igualdade acima só pode ocorrer se os correspondentes coeficientes das funções L.I. são iguais, assim obtemos um sistema da forma

$$\begin{array}{ll} -4A = 1 & 32E = 1 \\ -4B = 0 & -6G - 13J = 0 \\ 6A - 4C = 0 & -13I = 1 \\ 2B - 4D = 0 & 6I - 13H = 0 \\ 12E + 32F = 0 & -13G = 0 \end{array}.$$

Resolvendo o sistema temos a seguinte expressão para y_p

$$y_p(x) = -\frac{x^3}{4} - \frac{3}{8}x + \left(\frac{x}{32} - \frac{3}{256}\right)e^{6x} - \frac{6}{169}\cos 3x - \frac{x}{13}sen\, 3x.$$

Portanto, uma solução geral para a E.D.O. em questão é

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{x^3}{4} - \frac{3}{8}x + \left(\frac{x}{32} - \frac{3}{256}\right)e^{6x} - \frac{6}{169}\cos 3x - \frac{x}{13}sen\, 3x.$$

Abaixo apresentamos um exemplo onde o método coeficientes a determinar falha.

Exemplo 7.7. Resolva

$$y'' - 4y = e^{2x}.$$

Como derivando e^{2x} não temos funções novas além de Ae^{2x}, a forma de y_p deve ser $y_p(x) = Ae^{2x}$. Assim, derivando duas vezes y_p e substituindo na equação, obtemos

$$4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow 0 = e^{2x}.$$

Observe que a substituição feita gerou um absurdo. Esse absurdo foi gerado porque a função e^{2x} já aparece na expressão da solução geral da homogênea associada, isso quer dizer que qualquer múltiplo dela Ae^{2x}, quando substituído na equação correspondente, produz zero. Então, toda vez que o formato de y_{p_i} coincidir com alguma função que já aparece na expressão da solução geral da equação homogênea associada, devemos multiplicar a forma, primei ramente suposta para y_{p_i}, por x^n, onde n é o menor inteiro positivo que elimina a coincidência, ou seja, no caso desse exemplo, devemos supor $y_p(x) = Ae^{2x}x$. Se tivéssemos a função xe^{2x} aparecendo na expressão da solução geral da homogênea associada, deveríamos supor $y_p(x) = Ae^{2x}x^2$ e assim por diante.

Caso a EDO seja $y'' - 4y = e^{2x} + cos(3x)$, sabemos que a solução geral da EDO homogênea associada é $y_c(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$. Observando apenas a função $g(x) = g_1(x) + g_2(x) = e^{2x} + cos(3x)$, onde $g_1(x) = e^{2x}$ e $g_2(x) = cos(3x)$, somos levados a supor que a solução particular é $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = Ae^{2x} + Bcos(3x) + Csen(3x)$, onde $y_{p_1}(x) = Ae^{2x}$ e $y_{p_2}(x) = Bcos(3x) + Csen(3x)$. No entanto, como há repetição de função em $y_{p_1}(x)$, multiplicaremos $y_{p_1}(x)$ por x^n, onde n é o menos inteiro que retira a repetição, neste caso, $n = 1$. Assim, a solução geral, nesse caso, é $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + Axe^{2x} + Bcos(3x) + Csen(3x)$.

A seguir apresentamos uma tabela para y_p, supondo claro que nenhuma forma de y_p aparece em y_c, ou seja, aparece na solução geral da E.D.O. homogênea associada.

$\mathbf{g(x)}$	$\mathbf{y_p(x)}$
1	A
$3x-1$	$Ax+B$
x^2	Ax^2+Bx+C
x^3-3	Ax^3+Bx^2+Cx+D
$sen\,7x$	$Asen\,7x+B\cos\,7x$
$\cos 3x$	$Asen\,3x+B\cos 3x$
e^{-2x}	Ae^{-2x}
$5xe^{3x}$	$(Ax+B)e^{3x}$
$2x^2e^{4x}$	$(Ax^2+Bx+C)e^{4x}$
$e^{4x}\cos 2x$	$Ae^{4x}\cos 2x+Be^{4x}sen\,2x$
x^2sen5x	$(Ax^2+Bx+C)sen\,5x+(Ex^2+Fx+G)\cos 5x$
$xe^x\cos 2x$	$(Ax+B)e^x\cos 2x+(Dx+E)e^x sen\,2x$

7.4 Conclusão

Na aula de hoje, vimos como podemos resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. O método de resolução é bastante fácil tanto para equações homogêneas quanto para não homogêneas. No decorrer do método usamos a técnica de redução de ordem para contornar alguns problemas, tais como: achar uma segunda solução L.I. com a primeira solução quando uma equação auxiliar de segundo grau teve raiz repetida; no caso de resolução de E.D.O. linear não homogênea, achar uma solução geral para uma E.D.O. linear não homogênea quando não se tem um conjunto fundamental para a equação homogênea associada.

RESUMO

..

Na aula de hoje aprendemos uma técnica para resolução de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, a qual se baseia em achar as raízes de uma equação auxiliar e uma outra técnica para resolver equações lineares não homogêneas com coeficientes constantes, a qual é chamada por método dos coeficientes a determinar.

PRÓXIMA AULA

..

Em nossa próxima aula veremos um método para se resolver equações lineares não homogêneas bem mais abragente que o de coeficientes a determinar, uma vez que ele pode ser aplicado a equações com coeficientes não constantes.

ATIVIDADES

..

Atividade. 7.1. Determine a solução geral dos problemas abaixo

a)$4y'' + y' = 0$ f) $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$

b)$y'' - 4y' + 5y = 0$ g)$y^{(5)} + 5y^{(4)} - 2y^{(3)} - 10y'' + y' + 5y = 0$

c)$y'' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

d)$12y'' - 5y' - 2y = 0$

e)$y''' - 4y'' - 5y' = 0$

Atividade. 7.2. Use coeficientes a determinar para resolver as equações a- $y'' + 3y' + 2y = 6$

b- $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$

c- $\frac{y''}{4} + y' + y = x^2 - 2x$

d- $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$

e- $y'' + 4y = 3sen2x, y(1) = 1, y'(1) = -1$

f- $y'' + y = 2xsenx$

g- $y'' + 2y' + y = senx + 3cos2x$

h- $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$

i- $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$

j- $y^{(4)} + 2y'' + y = (x-1)^2$

LEMBREM-SE QUE PARA RESOLVER UM P.V.I. DE UMA EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA TEM QUE PRIMEIRO ACHAR UMA SOLUÇÃO GERAL DA NÃO HOMOGÊNEA, SÓ DEPOIS SUBSTITUÍMOS AS CONDIÇÕES INICIAIS.

LEITURA COMPLEMENTAR

..

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

7.5 Referências Bibliográficas

KREIDER, KULLER, OSTBERG, Equações Diferenciais, USP, 1972.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.