
Decaimento Radioativo 1

5

META:

Nesta Aula discutiremos a lei de Decaimento Radioativo e Decaimento Alfa.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Usar a lei de decaimento radioativo para determinar atividade e outras características de material radioativo.

Determinar quantidades características de processo de decaimento alfa.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de equações diferenciais ordinárias. Os conhecimentos de determinação de massa de núcleos da Aula 1. Para compreensão melhor do material da aula é recomendado os conhecimentos de material de efeito tunel da disciplina "Introdução a Mecânica Quântica".

5.1 A Lei de Decaimento Radioativo

Como já sabemos, radioatividade é um fenômeno de emissão de raios radioativos α , β ou γ causada por processos dentro de núcleos atômicos. Podemos descrever esse processo como emissão de partícula α , β ou γ por núcleo em resultado de que o núcleo sofre uma transformação. Falamos que o núcleo sofre *decaimento radioativo*. No caso de emissão de partículas α , falamos que ocorre *decaimento alfa* (*decaimento α*). No caso de emissão de partículas β , falamos que ocorre *decaimento beta* (*decaimento β*). No caso de emissão de partículas γ , falamos que ocorre *decaimento gama* (*decaimento γ*). Além desses três tipos existe mais um tipo de decaimento radioativo chamado *fissão espontânea*, que ocorre normalmente com núcleos pesados. Neste caso o núcleo pesado desintegra-se por partes mais leves, tal que este tipo de decaimento não é caracterizado por emissão de um tipo determinado de partículas.

Agora descreveremos propriedades gerais de decaimento radioativo. Primeiramente observaremos que decaimento radioativo é um processo probabilístico. Tal que não podemos indicar um instante quando um núcleo determinado sofrer decaimento. Podemos indicar somente probabilidade de ocorrência de decaimento. Considerando material radioativo que contém número grande de núcleos, não podemos indicar exatamente quais núcleos sofreram decaimento durante um intervalo de tempo, mas podemos indicar fração de número total de núcleos que sofreram decaimento. Por exemplo, em um instante t o material contém N núcleos radioativos. Número de núcleos que sofreram decaimento durante intervalo de

tempo dt é determinado por

$$\lambda N dt \quad (5.131)$$

onde λ é um fator. Como mostram experimentos com materiais radioativos o fator λ não depende de condições externas: de temperatura, pressão, umidade, etc. e é determinado somente por material radioativo (de fato por tipo de núcleo) e por tipo de decaimento⁹. Tal que λ é uma constante que é chamada *constante de decaimento radioativo*. Significado físico de λ é probabilidade de decaimento por unidade de tempo. Dimensão de λ é $[\text{tempo}]^{-1}$. Para cada material e para cada tipo de decaimento λ tem um valor determinado. Quantidade

$$A = \lambda N \quad (5.132)$$

é chamada *atividade* de material radioativo e expressa número de decaimentos por unidade de tempo. Uma unidade natural de atividade é um decaimento por segundo. Essa unidade é chamada *bequerel*, Bq. Então, 1 Bq é 1 decaimento por segundo. Também são usadas unidades *rutherford*, Rd, e *curie*, Ci. Essas unidades são definidas em termos de Bq como: 1 Rd = 10^6 Bq, 1 Ci = $3,7 \cdot 10^{10}$ Bq.

Designaremos número de núcleos radioativos em instante t por $N(t)$ e em instante $t + dt$ por $N(t + dt)$. Segundo a Eq. (5.131), que descreve comportamento de decaimento radioativo, $\lambda N dt$ núcleos sofrem decaimento durante intervalo dt . Tal que número total de núcleos radioativos diminui por esse valor durante dt

$$N(t + dt) = N(t) - \lambda N dt \quad (5.133)$$

⁹Observamos que o mesmo núcleo pode sofrer decaimento de vários tipos.

Escolhendo dt suficiente pequeno podemos escrever que¹⁰

$$N(t + dt) = N(t) + \frac{dN}{dt} dt$$

$$N(t + dt) = N(t) + \frac{dN}{dt} dt = N(t) + dN$$

que dá

$$N(t) + \frac{dN}{dt} dt = N(t) - \lambda N dt$$

$$N(t) + dN = N(t) - \lambda N dt$$

ou

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (5.134)$$

Resolvemos equação diferencial (5.134), supondo que no instante inicial $t = 0$ número de núcleos é N_0 , que dá condição inicial $N(0) = N_0$. Da Eq. (5.134) temos

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = - \int \lambda dt$$

$$\ln N = -\lambda t + C$$

Aplicando condição inicial $N(0) = N_0$, recebemos

$$\ln N_0 = C$$

portanto

$$\ln N = -\lambda t + \ln N_0$$

$$\ln N - \ln N_0 = -\lambda t$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

¹⁰primeiros dois termos de decomposição em série de Taylor da função $N(t)$ para valor de argumento $t + dt$

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

Tal que número de núcleos radioativos em instante t é dado por

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (5.135)$$

A Eq. (5.135) apresenta a *lei de decaimento radioativo*.

Na prática é mais usada característica de decaimento radioativo chamada *meia vida*, designada por $T_{1/2}$. Meia vida é intervalo de tempo durante dual metade de núcleos de material radioativo sofrem decaimento. Determinaremos relação entre $T_{1/2}$ e λ . Usando a lei de decaimento radioativo (5.135), temos

$$N(T_{1/2}) = \frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \quad (5.136)$$

Portanto

$$e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$e^{\lambda T_{1/2}} = 2$$

$$\lambda T_{1/2} = \ln 2$$

Então

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (5.137)$$

para alguns núcleos valores de meia vida são apresentados na Tabela 5.1.

Além de meia vida é usada também característica chamada *vida média* τ , definida como

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (5.138)$$

Em termos de meia vida

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \quad (5.139)$$

	núcleo	meia vida, $T_{1/2}$
césio	$^{137}_{55}\text{Cs}$	30 anos
polônio	$^{210}_{84}\text{Po}$	138 dias
radônio	$^{222}_{86}\text{Rn}$	3,83 dias
rádio	$^{226}_{88}\text{Ra}$	1620 anos
urânio	$^{234}_{92}\text{U}$	$2,5 \cdot 10^5$ anos
urânio	$^{235}_{92}\text{U}$	$7,1 \cdot 10^8$ anos
urânio	$^{238}_{92}\text{U}$	$4,5 \cdot 10^9$ anos
neptúnio	$^{239}_{93}\text{Np}$	2,3 dias
plutônio	$^{239}_{94}\text{Pu}$	$2,44 \cdot 10^4$ anos

Tabela 5.1: Meia vida de núcleos

5.2 Decaimento Alfa

Decaimento alfa é processo de emissão espontânea de partícula α por núcleo atômico. Núcleos de sofrem decaimento α são chamados α -ativos. Como partícula α é núcleo de hélio ^4_2He , podemos escrever esquema de decaimento α na forma



ou simplesmente



Núcleo $^{A-4}_{Z-2}\text{Y}$ produzido em processo de decaimento é chamado também *núcleo filho*. Emissão de partícula α ocorre sem nenhuma ação externa. Ao contrário, energia é produzida em processo de decaimento. Isto significa que energia de separação de partícula α deve ser negativa. Determinaremos energia de separação de partícula α de núcleo ^A_ZX e aplicaremos a condição indicada para

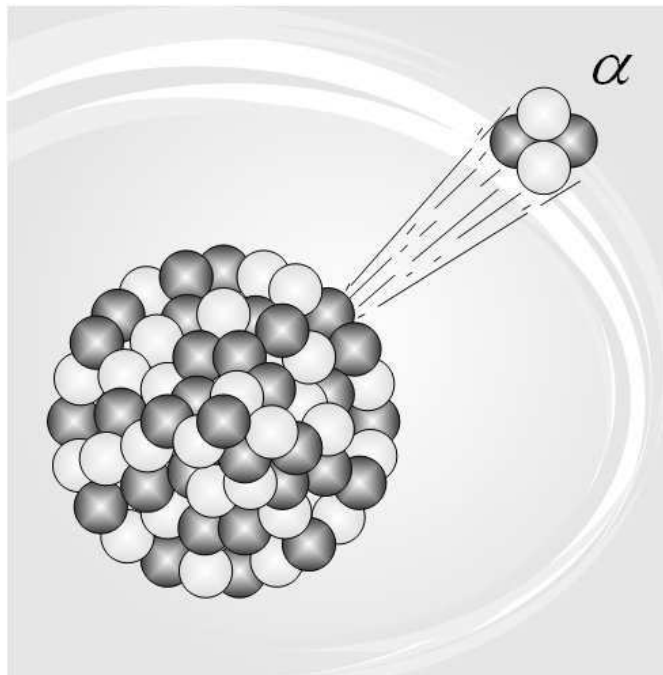


Figura 5.1: Decaimento alfa

ela

$$E_s \left({}^A_Z X \right) \left[{}^{A-4}_{Z-2} Y + \alpha \right] = M \left({}^{A-4}_{Z-2} Y \right) + M (\alpha) - M \left({}^A_Z X \right) < 0 \quad (5.142)$$

Da Eq. (5.142) recebemos condição de possibilidade de decaimento α para um núcleo ${}^A_Z X$ em termos de massas de núcleo inicial, núcleo produzido e de partícula α

$$M \left({}^A_Z X \right) > M \left({}^{A-4}_{Z-2} Y \right) + M (\alpha) \quad (5.143)$$

Podemos escrever a condição também em termos de energias de ligação

$$E_l \left({}^A_Z X \right) < E_l \left({}^{A-4}_{Z-2} Y \right) + E_l (\alpha) \quad (5.144)$$

Energia liberada Q em processo de decaimento α é definida como

$$Q = -E_s = M \left({}^A_Z X \right) - M \left({}^{A-4}_{Z-2} Y \right) - M (\alpha) \quad (5.145)$$

Decaimento alfa é observado para núcleos suficiente pesados com $Z > 82$, $A > 200$. Praticamente toda energia liberada é levada na forma de energia cinética por partícula α emitida. Mostraremos isso. Designaremos por $E_i = M_i c^2 + K_i$ – energia total de núcleo inicial, $E_f = M_f c^2 + K_f$ – energia total de núcleo final (núcleo filho), $E_\alpha = M_\alpha c^2 + K_\alpha$ energia total de partícula α , e por \vec{p}_i – momento de núcleo inicial, \vec{p}_f – momento de núcleo final (núcleo filho), \vec{p}_α – momento de partícula α . Devem ser satisfeitas a lei de conservação de energia total

$$E_\alpha + E_f = E_i \quad (5.146)$$

ou

$$M_\alpha c^2 + K_\alpha + M_f c^2 + K_f = M_i c^2 + K_i \quad (5.147)$$

e a lei de conservação de momento

$$\vec{p}_\alpha + \vec{p}_f = \vec{p}_i \quad (5.148)$$

Supomos que núcleo inicial está em repouso, tal que energia cinética dele é nula $K_i = 0$, momento dele é nulo $\vec{p}_i = 0$, portanto

$$\vec{p}_\alpha + \vec{p}_f = 0 \quad (5.149)$$

ou

$$\vec{p}_f = -\vec{p}_\alpha \quad (5.150)$$

e

$$M_\alpha c^2 + K_\alpha + M_f c^2 + K_f = M_i c^2 \quad (5.151)$$

ou

$$K_\alpha + K_f = M_i c^2 - M_f c^2 - M_\alpha c^2 = Q \quad (5.152)$$

Expressando energia cinética por meio de momento e usando Eq. (5.150), temos

$$K_f = \frac{p_f^2}{2M_f} = \frac{p_\alpha^2}{2M_f} = \frac{p_\alpha^2}{2M_\alpha} \frac{M_\alpha}{M_f} = K_\alpha \frac{M_\alpha}{M_f} \quad (5.153)$$

Substituindo Eq. (5.153) na Eq. (5.152) recebemos

$$K_\alpha + K_\alpha \frac{M_\alpha}{M_f} = Q$$

ou

$$K_\alpha \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_f} \right) = Q$$

Portanto

$$K_\alpha = \frac{Q}{\left(1 + \frac{M_\alpha}{M_f} \right)} = \frac{M_f}{M_\alpha + M_f} Q \quad (5.154)$$

Geralmente $M_\alpha \ll M_f$, portanto

$$K_\alpha \approx Q \quad (5.155)$$

Então, realmente energia cinética da partícula α emitida é praticamente igual a energia liberada em decaimento.

Valores de meia vida de núcleos α -ativos variam de $T_{1/2} = 10^{-6}$ s para ${}_{86}^{215}\text{Rn}$ a $T_{1/2} = 1,4 \cdot 10^{18}$ anos para ${}_{82}^{204}\text{Pb}$. Energia cinética K_α de partículas α emitidas variam de 4 MeV a 9 MeV para núcleos pesados e de 2 MeV a 4,5 MeV para núcleos de elementos de terras raras. Em experiências de H. Geiger e J. Nutall em 1912 foi observada relação entre meia vida $T_{1/2}$ de núcleos α -ativos e energia cinética de partículas α emitidas K_α . Essa relação pode ser apresentada na forma simples

$$\log T_{1/2} = C + \frac{D}{\sqrt{K_\alpha}} \quad (5.156)$$

onde coeficientes C , D têm dependência de número atômico Z e são independentes de número de massa A de núcleo. Caráter

de dependência de C , D de Z é mostrada na Tabela 5.2. A Eq. (5.156) apresenta a lei de Geiger-Nutall. A lei de Geiger-Nutall é satisfeita com boa precisão para núcleos par-par. Para núcleos ímpares precisão não é tanta boa. Desvio de dados experimentais pode atingir valores até $T_{1/2}^{exp}/T_{1/2}^{teor} \sim 10^3$.

Z	C	D
84	-50,15	128,8
90	-51,94	139,4
98	-55,40	154,7

Tabela 5.2: Dependência de coeficientes C , D de número atômico Z

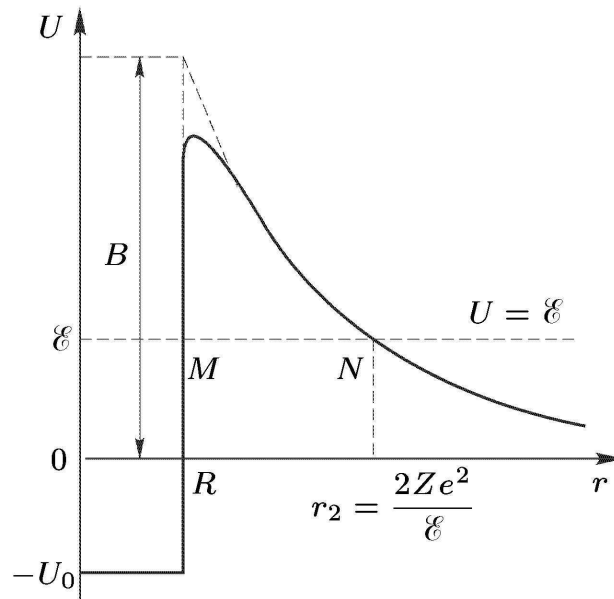


Figura 5.2: A explicação de decaimento alfa: barreira potencial.

Teoria de decaimento alfa foi elaborada a cerca de 1928 indepen-

dentemente por G. Gamow e por R. W. Gurney and E. U. Condon. Descreveremos resumidamente essa teoria. Na teoria é suposto que partícula α já existe dentro de núcleo inicial. Movimento de partícula α dentro de núcleo é governado por forças nucleares atrativas que pode ser descrito por um potencial negativo, $-V_0$. Fora de núcleo movimento é governado por força Coulombiana repulsiva descrita por potencial $2Ze^2/r$. Então, é considerado que partícula α move-se em um potencial dado por expressão

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < R \\ \frac{2Ze^2}{r}, & r > R \end{cases} \quad (5.157)$$

onde R é raio de núcleo. Gráfico do potencial $V(r)$ é mostrado na Fig. 5.2. Experiência mostra que energia cinética E de partículas α emitidas é bem menor de altura de barreira potencial $B = 2Ze^2/R$ (ver Fig. 5.2). De ponto de visto clássico se partícula α está dentro de núcleo ela não pode superar barreira potencial. Mas de ponto de visto quântico existe probabilidade de penetração de barreira potencial dada pela expressão¹¹

$$D = \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m(V(r) - E)} dr \right] \quad (5.158)$$

onde limites de integração são $r_1 = R$, r_2 é determinado por equação

$$V(r_2) = E$$

que dá $r_2 = 2Ze^2/E$. Cálculo do integral na Eq. (5.158) dá resultado

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m(V(r) - E)} dr = \quad (5.159)$$

¹¹Probabilidade de penetração de barreira potencial foi discutida na disciplina "Introdução a Mecânica Quântica"

$$= R\sqrt{2mB} \left[\sqrt{\frac{B}{E}} \arccos \sqrt{\frac{E}{B}} - \sqrt{1 - \frac{E}{B}} \right]$$

onde B é altura de barreira potencial. Tal que probabilidade D pode ser apresentada como

$$D = e^{-\gamma} \quad (5.160)$$

onde por γ é designada expressão

$$\gamma = \frac{2R\sqrt{2mB}}{\hbar} \left(\sqrt{\frac{B}{E}} \arccos \sqrt{\frac{E}{B}} - \sqrt{1 - \frac{E}{B}} \right) \quad (5.161)$$

Decaimento α , como qualquer tipo de decaimento radioativo, é caracterizado por constante de decaimento λ . Significado de λ é probabilidade de decaimento por unidade de tempo. Na descrição da teoria probabilidade de decaimento α é probabilidade de penetração de barreira potencial por partícula α . Para receber probabilidade de decaimento por unidade de tempo apresentamos λ como

$$\lambda = fD \quad (5.162)$$

onde f é um fator pre-exponencial cuja dimensão é $[\text{tempo}]^{-1}$. Na teoria é suposto que decaimento ocorre (com probabilidade D) quando partícula α aproxima superfície de núcleo em seu movimento caótico dentro de núcleo. Tal que fator f apresenta frequência com qual partícula α aparece na superfície de núcleo. Podemos estimar essa frequência como

$$f \sim \frac{v}{R} \quad (5.163)$$

onde v é velocidade média de partícula α , R é raio de núcleo. Velocidade v pode ser estimado por princípio de incerteza de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar$$

Como $\Delta x \sim R$, $\Delta p \sim mv$, temos

$$Rmv \sim \hbar$$

que dá estimacão para velocidade

$$v \sim \frac{\hbar}{mR} \quad (5.164)$$

Então, recebemos estimacão para frequência

$$f \sim \frac{\hbar}{mR^2} \quad (5.165)$$

Substituindo Eq. (5.165) na Eq. (5.162), recebemos expressão para constante de decaimento λ no caso de decaimento α

$$\lambda = \frac{\hbar}{mR^2} e^{-\gamma} \quad (5.166)$$

com γ dado na Eq. (5.161).

Verificaremos agora validade da fórmula (5.166). Lembramos que (Eq. (5.138)) vida média de núcleo radioativo  definida pela Eq. (5.138) como $\tau = 1/\lambda$. Relaco entre vida média τ e meia vida $T_{1/2}$  dada pela Eq. (5.139), que escrevemos na forma

$$T_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{1}{\lambda} \ln 2$$

Usando Eq. (5.166) para λ temos

$$T_{1/2} = \frac{mR^2 \ln 2}{\hbar} e^{\gamma} \quad (5.167)$$

Agora aplicaremos funo log aos dois lado da Eq. (5.167), que d

$$\log T_{1/2} = \log \left(\frac{mR^2 \ln 2}{\hbar} \right) + \gamma \log e \quad (5.168)$$

Fazemos estimacão de γ , supondo que $E \ll B$, $\frac{E}{B} \ll 1$. Neste caso os termos na Eq. (5.161) que expressa γ podem ser estimados como

$$\sqrt{1 - \frac{E}{B}} \approx 1$$

$$\arccos \sqrt{\frac{E}{B}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{E}{B}} \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{E}{B}}$$

Tal que

$$\begin{aligned} \gamma &\approx \frac{2R\sqrt{2mB}}{\hbar} \left(\sqrt{\frac{B}{E}} \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{E}{B}} \right) - 1 \right) \\ &= \frac{2R\sqrt{2mB}}{\hbar} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{B}{E}} - 1 - 1 \right) \\ &= \frac{2R\sqrt{2mB}}{\hbar} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{B}{E}} - 2 \right) \end{aligned}$$

Então

$$\gamma \approx \frac{\pi RB\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{4R\sqrt{2mB}}{\hbar} \quad (5.169)$$

Substituindo Eq. (5.169) na Eq. (5.168), temos

$$\log T_{1/2} \approx \log \left(\frac{mR^2 \ln 2}{\hbar} \right) \quad (5.170)$$

$$+ \frac{\pi RB\sqrt{2m} \log e}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{E}} - \frac{4R\sqrt{2mB} \log e}{\hbar}$$

Designamos na Eq. (5.170)

$$- \frac{4R\sqrt{2mB} \log e}{\hbar} + \log \left(\frac{mR^2}{\hbar} \ln 2 \right) = C \quad (5.171)$$

$$\frac{\pi RB\sqrt{2m} \log e}{\hbar} = D \quad (5.172)$$

e chegamos a equação

$$\log T_{1/2} \approx C + \frac{D}{\sqrt{E}} \quad (5.173)$$

que descreve a lei de Geiger-Nutall (5.156). Da Eq. (5.171) vemos que coeficiente C é negativo, e da Eq. (5.172) vemos que D é positivo. Observamos que coeficientes C , D não dependem de número de massa de núcleo A , mas têm dependência de número atômico Z , pois $B = 2Ze^2/R$.

5.3 Conclusão

Nesta aula discutimos a lei de decaimento radioativo e decaimento alfa.

RESUMO



No resumo dessa Aula constam os seguintes tópicos:

Foram introduzidos tipos de decaimentos radioativos: decaimento alfa, decaimento beta, decaimento gama, fissão espontânea.

Foi discutida a lei de decaimento radioativo que é expressa pela fórmula

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

onde $N(t)$ é número de núcleos radioativos em instante t , N_0 é número de núcleos radioativos em instante inicial, λ é constante de decaimento radioativo. Foi introduzida característica importante de decaimento radioativo – meia vida $T_{1/2}$, que é relacionada com λ como

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Junto com meia vida $T_{1/2}$ é usada também outra característica de decaimento radioativo – vida média τ , expressa como

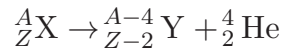
$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Foi introduzida característica – atividade do material radioativo

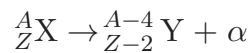
$$A = \lambda N$$

Unidades de atividade são bequerel, Bq, rutherford, Rd, e curie, Ci. 1 Bq corresponde a um decaimento por segundo, $1 \text{ Rd} = 10^6 \text{ Bq}$, $1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$.

Foi considerado processo de decaimento alfa, que é processo de emissão espontânea de partícula α por núcleo atômico. Núcleos que sofrem decaimento α chamam-se α -ativos. Esquema de decaimento α é



ou simplesmente



A condição de possibilidade de decaimento alfa é

$$M({}^A_Z\text{X}) > M({}^{A-4}_{Z-2}\text{Y}) + M(\alpha)$$

Aquela condição pode ser expressa também em termos de energias de ligação como

$$E_l({}^A_Z\text{X}) < E_l({}^{A-4}_{Z-2}\text{Y}) + E_l(\alpha)$$

Foi discutida a lei de Geiger-Nutall

$$\log T_{1/2} = C + \frac{D}{\sqrt{K_\alpha}}$$

que relaciona meia vida $T_{1/2}$ e energia cinética K_α de partículas α emitidas. Valores de coeficientes são apresentados na Tabela do Capítulo.

Foi discutida teoria de decaimento alfa baseada na aplicação do efeito tunel para partícula α considerada como partícula quântica.

Foi demonstrado que tal explicação teórica reproduz a lei de Geiger-Nutall.

PRÓXIMA AULA



Em próxima aula discutiremos outros tipos de decaimentos radioativos: decaimento beta, decaimento gama, fissão espontânea de núcleos.

ATIVIDADES



ATIV. 5.1. No instante inicial a atividade de um isótopo radioativo foi 20,2 Bq. Qual seja a atividade dele depois de $1/5$ da meia vida dele?

ATIV. 5.2. Em sangue de homem foi injetada uma quantidade pequena da solução de ${}_{11}^{24}\text{Na}$ da atividade $A = 2,0 \cdot 10^3$ Bq. Depois $t = 5,0$ horas o exame mostrou que a atividade de 1 cm^3 de sangue foi $B' = 0,267$ Bq/cm³. A meia vida de ${}_{11}^{24}\text{Na}$ é 15 horas. Determinar o volume de sangue do homem.

ATIV. 5.3. Núcleo de ${}_{84}^{200}\text{Po}$ em repouso emitiu partícula α com energia cinética $K_\alpha = 5,77$ MeV. Encontrar velocidade de récuo de núcleo filho.

ATIV. 5.4. É possível decaimento α de núcleo de ${}_{95}^{241}\text{Am}$? Qual núcleo é produto de decaimento? Determinar velocidade de partícula α emitida se decaimento é possível?



LEITURA COMPLEMENTAR

ALONSO, M., FINN, E. J. - Física. Vol. III. Fundo Educativo Interamericano, 1971.

EISBERG, R., RESNICK, R. - Física Quântica. São Paulo, editora Campus, 1983.

PESSOA, E. F., COUTINHO, F. A., SALA, O. - Introdução à Física Nuclear. São Paulo, EDUSP, 1978.

CHUNG, K. C. - Introdução à Física Nuclear. Rio de Janeiro, EdUERJ, 2001.