AULA 9

Energia e Momento em Reações de Partículas

META:

Introduzir conceitos necessários da Relatividade Especial.

Discutir limiar de reação para o caso de velocidades relativísticas de partículas elementares.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Determinar quantidades cinemáticas de partículas elementares levando em conta efeitos relativísticos.

Determinar limiar de reação na transformação de partículas elementares.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de conceitos da Relatividade Especial da disciplina "Física B".

9.1 Conservação de Energia e Momento nas Reações de Partículas Elementares

Como para qualquer sistema físico nas reações de transformação de partículas elementares são conservados energia total e momento. Para descrever corretamente conservação de energia total e momento nas reações de transformação de partículas elementares precisa aplicar conceitos de relatividade restrita. Lembraremos alguns deles necessários para nosso objetivo. No caso de movimento relativístico, isto é com velocidade comparavel com velocidade da luz c, $v \approx c$, são observados efeitos de contração de comprimento ao longo de direção de movimento e dilatação de intervalos de tempo. Tal que comprimento l medido em laboratório de um objeto de comprimento l_0 que move-se com velocidade v é dado como

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{9.253}$$

Intervalo de tempo Δt medido em laboratório de um processo que dura intervalo $\Delta\tau$ em referencial que move-se com velocidade v é dado como

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{9.254}$$

Conceitos de energia e momento também são modificados na consideração de movimento relativístico. É introduzida energia relativistica total E como

$$E = \sqrt{E_0^2 + \vec{p}^2c^2} \tag{9.255}$$

onde E_0 é energia de repouso de partícula, $E_0 = mc^2$, m - massa da partícula, $\vec{p}$ é momento relativístico de partícula. Momento relativístico de partícula é expresso como

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v} \tag{9.256}$$

Em termos de energia de repouso

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{9.257}$$

Energia cinética relativística K é definida como diferença entre energia total e energia de repouso

$$K = E - E_0 \tag{9.258}$$

portanto em termos de energia cinética

$$E = E_0 + K \tag{9.259}$$

Quantidade $E^2 - \vec{p}^2 c^2$ não depende de referencial, isto é um invariante

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = inv \tag{9.260}$$

Usando Eq. (9.255) podemos calcular valor deste invariante

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = E_0^2 + \vec{p}^2 c^2 - \vec{p}^2 c^2 \tag{9.261}$$

$$= E_0^2 = \left(mc^2\right)^2 = inv$$

Tal que massa de partícula é quantidade invariante.[24]

Receberemos também relações entre energia cinética relativística K e momento relativístico $\vec{p}$. Da Eq. (9.258) temos

$$K = E - E_0 = \sqrt{E_0^2 + \vec{p}^2 c^2} - E_0 \tag{9.262}$$

[24] Sobre conceito de energia na relatividade restrita pode ler em artigos de *Revista Brasileira de Ensino* "http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/vol15a13.pdf" e "http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/vol15a14.pdf"

E relação inversa. Da Eq. (9.255)

$$E^2 = E_0^2 + \vec{p}^2 c^2 \tag{9.263}$$

de outro lado da Eq. (9.259)

$$E^2 = (E_0 + K)^2 = E_0^2 + 2E_0K + K^2$$

Portanto

$$E_0^2 + \vec{p}^2 c^2 = E_0^2 + 2E_0K + K^2$$

ou

$$\vec{p}^2 c^2 = 2E_0K + K^2 = (2E_0 + K)\,K \tag{9.264}$$

Tal que

$$|\vec{p}| = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_0 + K)\,K} \tag{9.265}$$

Se é considerado um sistema relativístico de n partículas podemos introduzir energia total de sistema

$$E_s = E_1 + E_2 + E_3 + ... + E_n \tag{9.266}$$

e momento de sistema

$$\vec{p}_s = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + ... + \vec{p}_n \tag{9.267}$$

onde E_1, E_2, E_3, ..., E_n e $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$,..., $\vec{p}_n$ são enertgias totais e momentos de partículas. Da Eq. (9.259) podemos escrever E_s como

$$\begin{aligned} E_s &= E_{01} + K_1 + E_{02} + K_2 + E_{03} + \\ &+ E_{03} + K_3 + ... + E_{0n} + K_n \\ &= E_{10} + E_{20} + E_{30} + ... + E_{n0} + \\ &+ K_1 + K_2 + K_3 + ... + K_n \end{aligned}$$

Designando por E_{s0} energia de repouso total de sistema

$$E_{s0} = E_{10} + E_{20} + E_{30} + ... + E_{n0} \tag{9.268}$$

e por K_s - energia cinética total de sistema

$$K_s = K_1 + K_2 + K_3 + ... + K_n \tag{9.269}$$

Escrevemos que

$$E_s = E_{s0} + K_s \tag{9.270}$$

Para sistema de partículas quantidade $E_s^2 - \vec{p}_s^2 c^2$ também é invariante (não depende de referencial)

$$E_s^2 - \vec{p}_s^2 c^2 = inv \tag{9.271}$$

Supomos que um sistema inicial de partículas em resultado de uma reação entre partículas transforma-se em um sistema final de partículas. Sistema inicial é caracterizado por energia total E_s e momento $\vec{p}_s$, sistema final é caracterizado por energia total E'_s e momento $\vec{p}'_s$. A lei de conservação de energia exige que

$$E_s = E'_s \tag{9.272}$$

A lei de conservação de momento exige que

$$\vec{p}_s = \vec{p}'_s \tag{9.273}$$

9.2 Limiar de Reação

Consideraremos agora uma reação. Escrevemos simbolicamente essa reação como

$$b + a \rightarrow c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_n \tag{9.274}$$

onde a é partícula alvo, b é partícula projétil, c_1, c_2, c_3, ..., c_n são partículas produzidas. Designaremos energia total de sistema antes da reação

$$E_s = E_a + E_b \tag{9.275}$$

momento de sistema antes da reação

$$\vec{p}_s = \vec{p}_a + \vec{p}_b \tag{9.276}$$

energia total de sistema após da reação

$$E_s' = E_1 + E_2 + E_3 + ... + E_n \tag{9.277}$$

momento de sistema após da reação

$$\vec{p}_s' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + ... + \vec{p}_n \tag{9.278}$$

Quantidade

$$Q = E_{s0} - E_{s0}' = (E_{a0} + E_{b0}) - (E_{10} + E_{20} + E_{30} + ... + E_{n0})$$

chamaremos *energia de reação*. Se massa total de partículas produzidas na reação é maior de massa total de partículas iniciais, $E_{s0}' > E_{s0}$, temos condição

$$Q < 0 \tag{9.279}$$

Neste caso introduzimos uma quantidade positiva

$$Q_e = -Q = E_{s0}' - E_{s0} > 0 \tag{9.280}$$

Discutimos agora a condição de invariância da quantidade $E_s^2 - \vec{p}_s^2 c^2$, Eq. (9.271). Essa quantidade é invariante como antes de reação

$$E_s^2 - \vec{p}_s^2 c^2 = inv$$

tanto depois da reação

$$E_s'^2 - \vec{p}_s'^2 c^2 = inv$$

Tal que $E_s = E_s'$ e $\vec{p}_s = \vec{p}_s'$ podemos escrever

$$E_s^2 - \vec{p}_s^2 c^2 = E_s'^2 - \vec{p}_s'^2 c^2 = inv \tag{9.281}$$

Supomos que em referencial de laboratório (RL) partícula alvo está em repouso, que implica que $\vec{p}_a = 0$, $E_a = E_{a0}$ e $K_a = 0$. Portanto o lado esquerdo da Eq. (9.281), a quantidade $E_s^2 - \vec{p}_s^2 c^2$ antes da reação, podemos escrever como

$$E_s^2 - \vec{p}_s^2 c^2 = (E_{a0} + E_{b0} + K_b)^2 - \vec{p}_b^2 c^2 \tag{9.282}$$

Usando Eq. (**??**) para $\vec{p}_b^2 c^2$ podemos escrever

$$\vec{p}_b^2 c^2 = 2E_{b0}K + K_b^2 \tag{9.283}$$

Substituindo Eq. (9.283) na Eq. (9.282) e abrindo quadrado na forma apropriada, temos

$$(E_{a0} + E_{b0} + K_b)^2 - \vec{p}_b^2 c^2 = \tag{9.284}$$

$$= (E_{a0} + E_{b0})^2 + 2\left(E_{a0} + E_{b0}\right) K_b + K_b^2$$

$$-2E_{b0}K_b - K_b^2$$

$$= (E_{a0} + E_{b0})^2 + 2E_{a0}K_b$$

$$= E_{s0}^2 + 2E_{a0}K_b$$

O lado direito da Eq. (9.281), a quantidade $E_s'^2 - \vec{p}_s'^2 c^2$ depois da reação, escrevemos em referencial de centro de massa (RCM) de sistema de partículas produzidas. No referencial de centro de massa $\vec{p}_s' = 0$, portanto

$$E_s'^2 - \vec{p}_s'^2 c^2 = \left(E_{s0}' + K_s'\right)^2 \tag{9.285}$$

Agora reescrevemos Eq. (9.281) com lado esquerdo na forma da Eq. (9.284) e com lado direito na forma da Eq. (9.285) Portanto da Eq. () temos

$$E_{s0}^2 + 2E_{a0}K_b = \left(E'_{s0} + K'_s\right)^2 \tag{9.286}$$

Tal que

$$2E_{a0}K_b = \left(E'_{s0} + K'_s\right)^2 - E_{s0}^2$$

e recebemos energia cinética do projétil na forma

$$K_b = \frac{\left(E'_{s0} + K'_s\right)^2 - E_{s0}^2}{2E_{a0}} \tag{9.287}$$

Para determinar limiar de energia de reação K_{lim} precisa impor $K'_s = 0$, que implica que energia do projétil é suficiente somente para produção de partículas e insuficiente para partículas produzidas receberiam energia para iniciar movimento. Então

$$K_{lim} = \frac{E'^2_{s0} - E^2_{s0}}{2E_{a0}} \tag{9.288}$$

Recebemos também outra forma de limiar de energia. Esrcrevemos Eq. (9.288) na forma

$$\begin{aligned} K_{lim} = \frac{E'^2_{s0} - E^2_{s0}}{2E_{a0}} &= \frac{\left(E'_{s0} - E_{s0}\right)\left(E'_{s0} + E_{s0}\right)}{2E_{a0}} \\ &= \frac{\left(E'_{s0} - E_{s0}\right)\left(E'_{s0} - E_{s0} + 2E_{s0}\right)}{2E_{a0}} \end{aligned}$$

Usando energia de reação $Q_e = E'_{s0} - E_{s0}$, temos

$$\begin{aligned} K_{lim} = \frac{Q_e\left(Q_e + 2E_{s0}\right)}{2E_{a0}} &= Q_e\left(\frac{E_{s0}}{E_{a0}} + \frac{Q_e}{2E_{a0}}\right) \\ &= Q_e\left(\frac{E_{a0} + E_{b0}}{E_{a0}} + \frac{Q_e}{2E_{a0}}\right) \\ &= Q_e\left(1 + \frac{E_{b0}}{E_{a0}} + \frac{Q_e}{2E_{a0}}\right) \end{aligned} \tag{9.289}$$

Escrevendo energia de repouso usando Eq. (), recebemos limiar de energia na forma

$$K_{lim} = Q_e \left(1 + \frac{m_b c^2}{m_a c^2} + \frac{Q_e}{2m_a c^2}\right) \quad (9.290)$$

ou

$$K_{lim} = Q_e \left(1 + \frac{m_b}{m_a} + \frac{Q_e}{2m_a c^2}\right) \quad (9.291)$$

No caso não relativístico $Q_e << m_a c^2$, tal que o termo $Q^2/m_a c^2$ na Eq. (9.291) pode ser despresado. Portanto par o caso não relativístico temos expressão para limiar de energia

$$K_{lim} = Q\left(1 + \frac{m_b}{m_a}\right) \quad (9.292)$$

Observamos que Eq. (9.292) coincide com Eq. (7.228) do Capítulo 7 qual foi recebida para o caso não relativístico.

9.3 Exemplos

1. Consideraremos produção de nêutron e anti-nêutron na colisão de prótons

$$p + p \rightarrow p + p + n + \bar{n}$$

Energia de reação é

$$Q = \left(E_{s0} - E'_{s0}\right) = \left(2M_p c^2 - 2M_p c^2 - 2M_n c^2\right)$$

$$= -2M_n c^2 \approx -2 \cdot 938 = -1,876 \text{ GeV}$$

Determinaremos limiar de energia cinética nessa reação

$$K_{lim} = \frac{(E'_{s0} - E_{s0})\,(E'_{s0} + E_{s0})}{2E_{a0}}$$

$$= \frac{\left(2M_p c^2 + 2M_n c^2 - 2M_p c^2\right)\left(2M_p c^2 + 2M_n c^2 + 2M_p c^2\right)}{2M_p c^2}$$

$$= \frac{2M_n c^2 \cdot \left(4M_p c^2 + 2M_n c^2\right)}{2M_p c^2}$$

Usando aproximação $M_n \approx M_p$, temos

$$K_{lim} = \frac{2M_p c^2 \cdot \left(4M_p c^2 + 2M_p c^2\right)}{2M_p c^2} = 6M_p c^2$$

$$= 6 \cdot 938 = 5,628 \text{ GeV}$$

2. Produção de méson π^0 na colisão de prótons

$$p + p \to p + p + \pi^0$$

Energia de reação é

$$Q = \left(E_{s0} - E'_{s0}\right) = 2M_p c^2 - 2M_p c^2 - M_{\pi^0} c^2 = -M_{\pi^0} c^2$$

Usando o fato que $M_{\pi^0} = 0,144 M_p$, temos

$$Q = -0,144 \cdot 938 = -135 \text{ Mev}$$

Limiar de energia cinética é

$$K_{lim} = \frac{\left(E'_{s0} - E_{s0}\right)\left(E'_{s0} + E_{s0}\right)}{2E_{a0}}$$

$$= \frac{\left(2M_p c^2 + M_{\pi^0} c^2 - 2M_p c^2\right)\left(2M_p c^2 + M_{\pi^0} c^2 + 2M_p c^2\right)}{2M_p c^2}$$

$$= \frac{M_{\pi^0} c^2 \cdot \left(4M_p c^2 + 0,144 M_{\pi^0} c^2\right)}{2M_p c^2}$$

$$= \frac{0,144 M_p c^2 \cdot \left(4M_p c^2 + 0,144 M_p c^2\right)}{2M_p c^2} = \frac{0,144 \cdot 4,144}{2} M_p c^2$$

$$= 0,298 M_p c^2 = 0,298 \cdot 938 = 279,52 \text{ MeV}$$

3. Nas reações de transformação de partículas elementares podem participar fótons, partículas sem massa. Neste caso são aplicáveis as mesmas fórmulas para cálculo de energia de reação Q e para limiar de energia cinética K_{lim}. Consideraremos reação de colisão

inelástica de próton p e fóton γ com produção de nêutron n e méson π^+

$$p + \gamma \to n + \pi^+$$

Energia de reação é

$$Q = \left(E_{s0} - E'_{s0}\right) = M_p c^2 + 0 - M_n c^2 - M_{\pi^+} c^2 \approx -M_{\pi^+} c^2$$

Como $M_{\pi^+} = 0,149 M_p$, temos

$$Q = -0,149 \cdot 938 = -139,76 \text{ MeV}$$

Claro que partícula alvo nessa reação é próton, tal que limiar de energia nessa reação é limiar de energia de fóton E_γ

$$E_\gamma = \frac{\left(E'_{s0} - E_{s0}\right)\left(E'_{s0} + E_{s0}\right)}{2E_{a0}}$$

$$= \frac{\left(M_n c^2 + M_{\pi^+} c^2 - M_p c^2\right)\left(M_n c^2 + M_{\pi^+} c^2 + M_p c^2\right)}{2M_p c^2}$$

$$\approx \frac{M_{\pi^+} c^2 \cdot \left(2M_p c^2 + M_{\pi^+} c^2\right)}{2M_p c^2}$$

$$= \frac{0,149 M_p c^2 \cdot \left(2M_p c^2 + 0,149 M_p c^2\right)}{2M_p c^2} = \frac{0,149 \cdot 2,149}{2} M_p c^2$$

$$= 0,160 \cdot 938 = 150 \text{ MeV}$$

9.4 Conclusão

Nesta aula discutimos quantidades cinemáticas de partículas elementares levando em conta efeitos relativísticos e determinamos o limiar de reação para velocidades relativísticas de partículas.

RESUMO

No resumo dessa Aula constam os seguintes tópicos:

Foram revisados conceitos de Relatividade Especial. Usando energia de repouso de partícula $E_0 = mc^2$, onde m - massa da partícula, energia relativística total E é expressa como

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Momento relativístico de partícula $\vec{p}$ é expresso como

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$$

Energia relativística total E pode ser expressa como

$$E = \sqrt{E_0^2 + \vec{p}^2 c^2}$$

Energia cinética relativística K é definida como diferença entre energia total e energia de repouso

$$K = E - E_0$$

Energia relativistica total E também pode ser expressa como

$$E = E_0 + K$$

De outro lado momento relativístico em termos de energia cinética relativística e energia de repouso é é expesso como

$$|\vec{p}| = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_0 + K)\,K}$$

Quantidade $E^2 - \vec{p}^2 c^2$ não depende de referencial, isto é um invariante

$$E^2 - \vec{p}^2 c^2 = inv$$

Considerando sistema de partículas, introduzimos momento do sistema

$$\vec{p}_s = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

e energia total do sistema

$$E_s = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} (E_{0i} + K_i) = E_{s0} + K_s$$

onde E_{s0} é energia de repouso e K_s é energia cinética relativística do sistema

$$E_{s0} = \sum_{i=1}^{n} E_{0i}, \; K_s = \sum_{i=1}^{n} K_i$$

Para sistema de partículas quantidade $E_s^2 - \vec{p}_s^2 c^2$ também é invariante (não depende de referencial)

$$E_s^2 - \vec{p}_s^2 c^2 = inv$$

As leis de conservação de energia total e momento do sistema exigem

$$E_s = E_s', \; \vec{p}_s = \vec{p}_s'$$

onde quantidades depois da reação marcadas por linha.

Energia de reação é definida como

$$Q = E_{s0} - E_{s0}'$$

e introduzida quantidade positiva Q_e para reação endo-energética

$$Q_e = -Q = E_{s0}' - E_{s0}$$

Para limiar da reação no caso da reação endo-energética e no caso de velocidades relativísticas de partículas foi recebida expressão na forma

$$K_{lim} = Q_e \left(1 + \frac{m_b}{m_a} + \frac{Q_e}{2m_a c^2}\right)$$

ou na forma

$$K_{lim} = \frac{E'^2_{s0} - E^2_{s0}}{2E_{a0}} = \frac{(E'_{s0} - E_{s0})\,(E'_{s0} + E_{s0})}{2E_{a0}}$$

onde m_a é massa da partícula alvo, m_b é massa da partícula projétil, $E_{a0} = m_a c^2$.

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula discutiremos Modelo Padrão de partículas elementares e equipamentos de estudo de partículas.

ATIVIDADES

ATIV. 9.1. Determinar energia cinética de próton com momento: a) 0.1 GeV/c; b) 1 GeV/c; c) 10 GeV/c.

ATIV. 9.2. Vida média de mesons π lentos é τ_0 = 25,5 ns. Um méson π possui energia cinética que está em η= 1,2 vezes maior de sua energia de repouso. Determinar a distância média que percorre meson π.

ATIV. 9.3. Mesons π^- com energia cinética K= 100 MeV percorrem distância l = 11 m desde local da criação até o local do decaimento. Determinar o tempo próprio da vida de mesons π^-.

ATIV. 9.4. Determinar o limiar de reação de produção de antipróton em colisão de: a) elétron com próton em repouso; b) elétron com elétron em repouso; c) fóton com elétron em repouso.

ATIV. 9.5. Determinar limiar de energia de anti-neutrino em reação $\bar{\nu}_e + p \to n + e^+$.

LEITURA COMPLEMENTAR

ALONSO, M., FINN, E. J. - Física. Vol. III. Fundo Educativo Interamericano, 1971.

MENEZES, D. P. - Introdução à física nuclear e de partículas elementares. Florianópolis, Editora da UFSC, 2002.

SHELLARD, R. C. - Introducao a física das particulas elementares. São Paulo, Instituto de Fisica Teorica, 1982.