AULA 11

A Transformada de Laplace: Fundamentos teóricos

META:

Descrever o fundamento teórico sobre a transformada de Laplace.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Calcular diversas transformadas de Laplace e suas inversas. Utilizar as propriedades da transformada de Laplace.

PRÉ-REQUISITOS

Um pouco de conhecimento sobre álgebra linear, mais especificamente, a definição de transformação linear, função soma, função multiplicação por um escalar. Além dos conhecimentos relativos à integração, integração imprópria e à derivação de funções.

11.1 Introdução

Caros alunos, nesta aula usaremos o conceito de transformação linear e sua inversa. Estudaremos uma transformação muito particular: a transformada de Laplace. E você pode está se perguntando, e o que isto tem haver com equações diferenciais ? Nós podemos dizer que tudo, a transformada de Laplace torna mais fácil a resolução de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = g(x)$$

em que, por exemplo, a função independente $g(x)$ não é contínua. Nesta aula estudaremos todo o fundamento teórico necessário e apenas na próxima aula veremos como aplicar a transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais ordinárias.

11.2 A transformada de Laplace

Antes de darmos a definição de transformada de Laplace, relembraremos o conceito de funções contínuas por partes, uma vez que esse conceito será necessário para descrevermos o conjunto em que a transformada de Laplace existe.

Definição 11.1. Uma função f a valores reais é dita contínua por partes num intervalo $[a, b]$ se
a) f é definida e contínua em todos os pontos de $[a, b]$ exceto num número finito e
b)os limites

$$f(x_0^+) = \lim_{h\to 0^+} f(x_0 + h),$$

$$f(x_0^-) = \lim_{h\to 0^+} f(x_0 - h)$$

existem em cada ponto x_0 de $[a, b]$.

Exemplo 11.1. A função f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \geq 5 \\ \\ -1, x < 5 \end{cases}$$

é contínua por partes em $(-\infty, \infty)$.

Definição 11.2. Seja f uma função definida para $t \geq 0$. A integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

será chamada **transformada de Laplace** de f, desde que a integral convirja.

Observação 11.1. 1) Observe que a transformada de Laplace de uma função f, como definida acima, é uma função da variável s.
2) Denotaremosas letras maiúsculas para a transformada e as minúsculas para a função que se quer calcular a transformada.
Por exemplo, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

Exemplo 11.2. Calcule a transformada de Laplace da função $f(t) = sen\, t$.

$\mathcal{L}\{sen\, t\} = \int_0^\infty e^{-st} sen\, t dt = \lim x \to \infty \displaystyle\int_0^x e^{-st} sen\, t dt$. Mas,
$\int e^{-st} sen\, t dt = -e^{-st} \cos t - s \int \cos t e^{-st} dt$. Como

$$\int \cos t e^{-st} dt = e^{-st} sen\, t + s \int e^{-st} sen\, t dt,$$

temos

$$\begin{aligned} \int e^{-st} sen\, t dt &= -e^{-st} \cos t - s \left[e^{-st} sen\, t + s \int e^{-st} sen\, t dt \right] \\ &= -e^{-st} \cos t - s e^{-st} sen\, t - s^2 \int e^{-st} sen\, t dt \end{aligned}$$

Assim,

$$\int e^{-st} sen\, t dt = \frac{1}{1+s^2}\left[-e^{-st}\cos t - se^{-st} sen\, t\right],$$

consequentemente,

$$\lim x \to \infty \int_0^x e^{-st} sen\, t dt = \frac{1}{1+s^2}, s > 0.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{sen\, t\} = \frac{1}{1+s^2}, s > 0.$$

Agora vamos aplicar as informações?

Mãos à obra:

Calcule a transformada $\mathcal{L}\{1\}$ e verifique que é a função $F(s) = 1/s, s > 0$.

Observação 11.2. A fim de simplificarmos a notação, usaremos $|_0^\infty$ para denotarmos o cálculo $\lim_{x\to\infty}()|_0^x$.

Exemplo 11.3. Calculemos a transformada $\mathcal{L}\{e^{kt}\}, k \in \mathbb{R}$.
Pela definição, temos

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{kt}dt.$$

Como, $\int_0^\infty e^{-st}e^{kt}dt = \frac{1}{-s+k}e^{(-s+k)t}|_0^\infty$, então

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k}, s > k.$$

Abaixo listamos algumas das transformadas mais corriqueiras.

Exemplo 11.4. Seja k um número real. Então,

$1)\mathcal{L}\{1\} = 1/s$ $\qquad$ $5)\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k}, s > k$

$2)\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \cdots$ $\qquad$ $6)\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$

$3)\mathcal{L}\{sen\, kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$ $\qquad$ $7)\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2-k^2}$

$4)\mathcal{L}\{senh\, kt\} = \frac{k}{s^2-k^2}$

Fica claro, pela definição, e pelos exemplos que a transformada de Laplace, $\mathcal{L}$, é uma transformação ou uma função que leva uma função em uma outra função. Como em toda transformação, se faz necessário que conheçamos para qual conjunto de funções a transformada existe. Para isso, antes de enunciarmos, no próximo teorema, as condições suficientes para a existência da transformada de Laplace, definiremos o conceito de uma função ser de ordem exponencial.

Definição 11.3. Dizemos que uma função f é de **ordem exponencial** α se existirem constantes $\alpha, c > 0$ e $T > 0$ de tal forma que $|f(t)| \leq ce^{\alpha t}$ para todo $t > T$.

Ou seja, a definição acima nos diz que uma função f é de ordem exponencial α se a partir de um certo momento T ela não ultrapassar a função $ce^{\alpha t}$.

Teorema 11.1. Condições para a existência da transformada de Laplace *Se f é uma função contínua por partes de ordem exponencial, então existe um número λ tal que*

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)$$

converge para todos os valores de s maiores do que λ.

Observação 11.3. A menos que mencionemos o contrário, estamos, daqui para frente, considerando s sempre uma constante positiva.

Observe que este teorema nos fornece uma condição suficiente, mas não necessária para a existência da transformada, ou seja, pode existir uma função que, por exemplo, não é contínua por partes num certo intervalo, mas sua transformada existe.

Propriedades da transformada de Laplace

A transformada de Laplace é uma transfromação linear. Ou seja, dadas as funções $f(t), g(t)$ contínuas por partes para $t \geq 0$ e de ordem exponencial e a uma constante, segue que

$$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\},$$
$$\mathcal{L}\{af(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}(f(t) + g(t))dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt \\ &= \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{af(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}(af(t))dt \\ &= a\int_0^\infty e^{-st}(f(t))dt \\ &= a\mathcal{L}\{f(t)\}. \end{aligned}$$

Essa propriedade é muito útil, pois usando a linearidade da transformada, não precisamos calcular a transformada de toda função, veja o exemplo abaixo.

Exemplo 11.5. Calcule a transformada de Laplace da função $f(t) = 4t^3 + 5 + \cos 7t + e^{2t}$. Se calcularmos pela definição, temos que resolver a integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}(4t^3 + 5 + \cos 7t + e^{2t})dt.$$

Contudo, usando a propriedade de linearidade da transformada esse cálculo é significativamente reduzido quando se conhece a transformada das funções que aparecem na expressão de f. Dessa maneira, temos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 4\mathcal{L}\{t^3\} + 5\mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\cos 7t\} + \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

$$4\tfrac{3!}{s^4} + 5\tfrac{1}{s} + \tfrac{s}{s^2+49} + \tfrac{1}{s-2},\, s > 2.$$

Exemplo 11.6. Calcule a transformada da função

$$f(t) = \begin{cases} 0,\ 0 < t \leq 1 \\ t,\ t > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \textstyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ &= \textstyle\int_0^1 e^{-st}(0)dt + \int_1^\infty e^{-st} t dt \\ &= \tfrac{e^{-s}}{s} + \tfrac{e^{-s}}{s^2}. \end{aligned}$$

Mãos à obra

Calcule a transformada de Laplace da função $f(t) = \frac{t^2-1}{t-1}$

Outras propriedades importantes da transformada são descritas nos teoremas abaixo

Teorema 11.2. Teorema de translação sobre o eixo s *Se* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *e* a *for um número real qualquer, então*

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

Demonstração:

Pela definição de transformada, temos que

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a).$$

■

Exemplo 11.7. Usando o teorema acima a transformada da função $f(e^{3t}\cos 4t)$ é $\frac{s-3}{(s-3)^2+16}$, pois $\mathcal{L}\{\cos 4t\} = \frac{s}{s^2+16}$.

Teorema 11.3. Teorema de translação sobre o eixo t *Se* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *e* $a > 0$*, então*

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s),$$

onde $\mathcal{U}$ *é a função degrau unitário que definimos abaixo.*

Definição 11.4. A **Função Degrau unitário** $\mathcal{U}(t-a)$ é definida por

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq t < a \\ \\ 1, \ t \geq a \end{cases}$$

Exemplo 11.8. Calcule a transformada da função

$$g(t) = \begin{cases} 0, 0 \leq t < 3 \\ \\ sen\,(t-3), t \geq 3 \end{cases}$$

Primeiramente, observe que

$$g(t) = \mathcal{U}(t-3)sen\,(t-3).$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-3)sen\,(t-3)\} = e^{-3s}\frac{1}{s^2+1},$$

pelo Teorema 11.3.

Teorema 11.4. *Se* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, *então*

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s).$$

Demonstração: Sabemos que $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$. A idéia é derivar n vezes, com respeito a s, essa expressão. Derivemos uma vez

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{ds}F(s) &= \tfrac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \tfrac{\partial}{\partial s}[e^{-st}f(t)]dt \\ &= -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt \\ &= -\mathcal{L}\{tf(t)\}. \end{aligned}$$

Continuando a derivação, chegaremos na expressão desejada.

∎

11.3 A transformada inversa de Laplace

Se $F(s)$ for a transformada de Laplace da função $f(t)$, então definimos $f(t)$ como a **transformada inversa de Laplace** de $F(s)$ e denotamos por $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. Assim, segundo o Exemplo 11.4, enunciamos o seguinte resultado

Exemplo 11.9. Seja k um número real. Então,

$1)\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$ $\quad$ $5)\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-k}\} = e^{kt}, s > k$

$2)\mathcal{L}^{-1}\{\frac{n!}{s^{n+1}}\} = t^n, n = 1, 2, 3, \cdots$ $\quad$ $6)\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+k^2}\} = \cos kt$

$3)\mathcal{L}^{-1}\{\frac{k}{s^2+k^2}\} = sen\, kt$ $\quad$ $7)\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2-k^2}\} = \cosh kt$

$4)\mathcal{L}^{-1}\{\frac{k}{s^2-k^2}\} = senh\, kt$

A transformada inversa de Laplace também possui as mesmas propriedades da transformada de Laplace, a saber

Teorema 11.5. *Sejam $F(s)$ e $G(s)$ as transformadas das funções $f(t)$ e $g(t)$, respectivamente, e a, b constantes, então*
1) $\mathcal{L}^{-1}$ é uma transformação linear.
$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$.

2)$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$.

3)$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\alpha s F(s)}\} = f(t-\alpha)\mathcal{U}(t-\alpha), \alpha > 0$.

Ainda podemos enunciar uma propriedade correspondente a do Teorema 11.4.

Teorema 11.6. *Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{d^n}{ds^n}F(s)\} = (-1)^n t^n \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Exemplo 11.10. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{s^2-5}\}$. Observe que $\frac{3}{s^2-5} = \frac{3}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{s^2-5}$.
Assim,
$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{s^2-5}\} = \frac{3}{\sqrt{5}}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{\sqrt{5}}{s^2-5}\} = \frac{3}{\sqrt{5}} senh\, \sqrt{5}t$.

Exemplo 11.11. Usando frações parcias

Calcule $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-3)(s+1)}\}$. Podemos calcular essa transformada começando por decompor a expressão racional $\frac{1}{(s-3)(s+1)}$ como soma de duas funções racionais, cuja a transformada é conhecida. Para isso, a técnica de frações parciais, ensinada nas disciplinas de cálculo, nos será muito útil. Vamos recordá-la um pouco.

A idéia é achar constantes A e B tais que

$$\frac{1}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $(s-3)(s+1)$ e igualando os coeficientes de mesma potência em s, obtemos $A = 1/4$ e $B = -1/4$. Portanto, $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-3)(s+1)}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{4(s-3)} - \frac{1}{4(s+1)}\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-3}\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} = \frac{e^{3t}}{4} - \frac{e^{-t}}{4}$.

Exemplo 11.12. Calcule a transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\}$. Aqui tentaremos usar a propriedade da translação. Dessa maneira, observe que

$$\begin{aligned}\tfrac{2s+3}{s^2-4s+20} &= \tfrac{2s+3}{(s-2)^2+16} = \tfrac{2(s-2)+7}{(s-2)^2+16}\\ &= 2\left[\tfrac{s-2}{(s-2)^2+16}\right] + \tfrac{7}{4}\left[\tfrac{4}{(s-2)^2+16}\right].\end{aligned}$$

Como, pela propriedade de translação, temos que

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\} = e^{2t}\cos 4t$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4}{(s-2)^2+16}\} = e^{2t} sen\, 4t$$

fica fácil ver que

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s+3}{s^2-4s+20}\} = 2e^{2t}\cos 4t + \frac{7}{4}e^{4t} sen\, 4t.$$

Frações parciais: Faremos aqui um breve resumo dos casos de decomposição de funções racionais usando o método das frações parcias. No entanto, este resumo está longe de contemplar todos os casos, dessa maneira recomendamos que vocês estudem este assunto em algum livro de cálculo.

Quando tivermos funções racionais com termos repetidos no denominador, por exemplo, $\frac{1}{(t-1)^3(t+4)}$. A maneira de decompor esta função racional em somas de funções racionais mais simples é achar constantes A, B, C e D tais que

$$\frac{1}{(t-1)^3(t+4)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{(t-1)^3} + \frac{D}{t+4}.$$

Quando no denominador da função racional aparecer uma função quadrática irredutível, como por exemplo, $\frac{1}{x^2+1}$, devemos encontrar constantes A, B tais que

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{Ax+B}{x^2+1}.$$

11.4 Conclusão

Na aula de hoje, concluímos que a transformada de Laplace é uma transformação linear que leva função em função. Esta transformada é muito útil no cálculo de soluções de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

RESUMO

Na aula de hoje aprendemos sobre a transformada de Laplace e sua inversa. Vimos como calcular tais transformadas e algumas de suas propriedades. Dentre essas propriedades está a de linearidade, a qual é bastante útil nos cálculos de várias transformadas.

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula veremos como resolver equações diferenciais usando a transformada de Laplace.

ATIVIDADES

Atividade. 11.1. Ache a transformada inversa de Laplace de cada uma das funções abaixo: (Lembrem-se das propriedades da transformada e da técnica de frações parciais)

a)$\frac{5}{s^2(s-5)^2}$

b)$\frac{1}{s^2+4s+29}$

c)$\frac{2s}{2s^2+1}$

d)$\frac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)}$

e)$ln\left(\frac{s+3}{s+2}\right)$ (Use $\frac{d}{ds}ln\left(\frac{s+3}{s+2}\right) = -\frac{1}{(s+2)(s+3)}$.)

Atividade. 11.2. Encontre a transformada de Laplace de cada uma das funções abaixo:(Lembrem-se das propriedades da transformada)

a) $e^{2t} sen\, 3t$

b) $e^{-3t}\cos(2t+4)$

c)$t^2 e^t \cos t$

d) $f(t) = \begin{cases} 0, t < 1/2 \\ \\ 1 + t, t \geq 1/2 \end{cases}$ (Use a definição de transformada.)

LEITURA COMPLEMENTAR

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

11.5 Referências Bibliográficas

KREIDER, KULLER, OSTBERG, Equações Diferenciais, USP, 1972.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.