Aula 06

HOMOMORFISMOS DE GRUPOS

META

Apresentar o conceito de homomorfismo de grupos

OBJETIVOS

Reconhecer e classificar os homomorfismos.

Aplicar as propriedades imediatas dos homomorfismos de grupos.

Calcular os núcleo e imagem de um homomorfismo.

Aplicar os teoremas dos homomorfismos na relação de problemas.

PRÉ-REQUISITOS

Todas as aulas anteriores principalmente as aulas 4 e 5.

INTRODUÇÃO

Caminhando dentro da teoria dos grupos, vamos a mais uma aula. Mais uma vez, necessitamos que você, caro aluno, tenha aprendido os conteúdos das aulas anteriores, principalmente, os das aulas 4 e 5 que tratam dos grupos.

Em estruturas algébricas os homomorfismos são aplicações que têm como domínio e contradomínio estruturas algébricas de mesma natureza (mesma definição abstrata) e servem em geral para comparar tais estruturas. No nosso caso, é claro, trataremos dos homomorfismos de grupos.

O CONCEITO DE HOMOMORFISMO

Definição 1. Sejam G e G grupos e ψ uma aplicação de G em G. Dizemos que ψ é um homomorfismo se $\psi(a.b) = \psi(a).\psi(b)$.

Exemplo 1. Se G é um grupo e $H \trianglelefteq G$, para $G = {}^{G}/_{H}$, a aplicação $\psi = G \longrightarrow {}^{G}/_{H}$ definida por $\psi(a) = Ha$ é um homomorfismo de grupos, pois $\psi(ab) = Hab = Ha.Hb = \psi(a).\psi(b)$, $\forall a, b \in G$. Este homomorfismo é comumente chamado projeção canônica.

Exemplo 2. Dado um grupo G, a função identidade de G é evidentemente um homomorfismo de G em G. Notemos que $I_G(ab) = ab = I_G(a).I_G(b)$, $\forall a, b \in G$.

A um homomorfismo de um grupo G nele próprio, chamamos endomorfismo de G.

A um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow G$ injetivo, chamamos um monomorfismo de G em G.

A um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow G$ sobrejetivo,chamamos um epimorfismo de G em G.

A um homomorfismo $\psi : G \longrightarrow G$ bijetivo, chamamos um isomorfismo de G em G. Neste caso dizemos também que G e G são grupos isomorfos.

A um isomorfismo de um grupo G nele próprio, chamamos um automorfismo de G.

Proposição 1. Seja $\psi : G \longrightarrow G$ um homomorfismo. Então, $\psi(e) = e$, onde e e e são, respectivamente, as identidades de G e G.

Demonstração: $\psi(e).\psi(e.e) = \psi(e).\psi(e) \Rightarrow \psi(e).\psi(e)^{-1} = \big(\psi(e).\psi(e)\big)\,\psi(e) \Rightarrow e = \psi(e).(\psi(e).\psi(e)^{-1} \Rightarrow \psi(e).e = e \Rightarrow \psi(e) = e.$

Proposição 2. Seja $\psi : G \longrightarrow G$ um homomorfismo. Então, $\forall a \in G$, $\psi(a)^{-1} = \psi(a)^{-1}$.

Demonstração $e = \psi(e) = \psi(a.a^{-1}) = \psi(a).\psi(a^{-1}) \Longrightarrow \psi(a^{-1}) = \psi(a)^{-1}$.

Proposição 3. Se $\psi : G \longrightarrow G$ *é um homomorfismo e* $H \leq G$ *então* $\psi(H)$ *é um subgrupo de* G*?*

Demonstração: $e \in H$ *e* $\psi(e) = e \Longrightarrow e \in \psi(H) \neq \phi$. *Sejam* $a, b \in \psi(H)$. *Existem* $a, b \in H$ *tais que* $\psi(a) = a$ *e* $\psi(b) = b$. *Logo,* $a.b^{-1} = \psi(a).\psi(b)^{-1} = \psi(a).\psi(b^{-1}) = \psi(ab^{-1})$ *e, como* $ab^{-1} \in H$*segue que* $a.b \in \psi(H)$. *Portanto,* $\psi(H) \leq G$. *Neste caso* $Im\,\psi = \psi(G) \leq G$.

Proposição 4. Se $\psi : G \longrightarrow G$ *e* $\varphi : G \longrightarrow G$ *são homomorfismos então* $\varphi \circ \psi : G \longrightarrow G$ *também é homomorfismo.*

Demonstração:

Dados $a, b \in G$, $(\varphi \circ \psi)(ab) = \varphi(\psi(ab)) = \varphi(\psi(a).\psi(b)) = \varphi(\psi(a)).\varphi(\psi(b)) = (\varphi \circ \psi)(a).(\varphi \circ \psi)(b)$.

Definição 2. Seja $\psi : G \longrightarrow G$ *um homomorfismos chamamos núcleo de* ψ *e denotamos por* $ker\,\psi($*ou* $N(\psi)$ *o subconjunto de* G*:*

$$ker\,\psi = \{x \in G;\ \psi(x) = e\}.$$

Exemplo 3. Dados um grupo G *e* $H \trianglelefteq G$, *notemos que* H *é o núcleo da projeção canônica* $\psi = G \longrightarrow {}^{G}/_{H}$, $\psi(a) = Ha$, *pois,* $Hx = H \Leftrightarrow x \in H$, *ou seja,* $ker\,\psi = \{x \in G;\ \psi(x) = Hx = H\} = H$.

Proposição 5. Para todo homomorfismo $\psi : G \longrightarrow G$, $ker\,\psi \trianglelefteq G$.

Demonstração: Como $\psi(e) = e$, $e \in ker\,\psi \neq \phi$. *Se* $a, b \in ker\,\psi$ *então* $\psi(ab^{-1}) = \psi(a).\psi(b)^{-1} = e.e^{-1} = e \Longrightarrow ab^{-1} \in ker\,\psi$. *Logo* $ker\,\psi \leq G$. *Agora, seja* $a \in G$ *e* $b \in ker\,\psi$. *Temos* $\psi(a^{-1}ba) = \psi(a^{-1}).\psi(b).\psi(a) = \psi(a)^{-1}.e.\psi(a) = \psi(a)^{-1}.\psi(a) = e \Leftrightarrow a^{-1}ker\,\psi\, a = ker\,\psi$. *Portanto* $ker\,\psi \trianglelefteq G$.

Proposição 6. Seja $\psi : G \longrightarrow G$. ψ *é monomorfismo se, e somente se,* $ker\,\psi = \{e\}$.

Demonstração: $(\Longrightarrow)$ *Trivial, pois* $\psi(e) = e$ *e* ψ *é injetiva* $\Longrightarrow ker\,\psi = \{e\}$.

$(\Longleftarrow)$ *Se* $a, b \in G$ *e* $\psi(a) = \psi(b)$ *então* $\psi(a).\psi(b)^{-1} = e \Longrightarrow \psi(ab^{-1}) = e \Longrightarrow ab^{-1} \in ker\,\psi = \{e\} \Longrightarrow a = b$, *ou seja,* ψ *é injetiva.*

OS TEOREMAS FUNDAMENTAIS DOS HOMOMORFISMOS

Proposição 1. Se $\psi : G \longrightarrow G$ é um homomorfismo de grupos com núcleo N então existe um homomorfismo injetivo $\overline{\psi} : {}^{G}/_{N} \longrightarrow G$ tal que $\overline{\psi}(Na) = \psi(a)\ \forall a \in G$.

Demonstração: Inicialmente, notemos que se $a, b \in G$ são tais que $a \equiv b(modN)$ então $ab^{-1} \in N$ e $\psi(ab^{-1}) = e$ donde temos que $\psi(a) = \psi(b)$. Isto significa que para $Na = Nb$, $\overline{\psi}(Na) = \psi(a) = \psi(b) = \overline{\psi}(Nb)$ ou seja que está, bem definida, ou seja a imagem de Ha não depende do seu representante. Dados $Ha, Hb \in {}^{G}/_{N}$, temos $\overline{\psi}(Ha.Hb) = \overline{\psi}(Hab) = \psi(ab) = \psi(a).\psi(b) = \overline{\psi}(Ha).\overline{\psi}(Hb)$ logo, $\overline{\psi}$ é um homomorfismo de grupos. Agora, $Na \in ker\,\overline{\psi} \Leftrightarrow \overline{\psi}(Na) = \psi(a) = e \Leftrightarrow a \in N \Leftrightarrow Na = N \Leftrightarrow ker\,\overline{\psi} = \{N\}$ ou seja $\overline{\psi}$ é injetiva.

Corolário (1º teorema do isomorfismo). Se $\psi : G \longrightarrow G$ é um epimorfismo e $N = ker\,\psi$ então ${}^{G}/_{N}$ e G são isomorfos. Ou melhor, existe um isomorfismo $\overline{\psi} : {}^{G}/_{N} \longrightarrow G$ tal que $\overline{\psi}(Ha) = \psi(a), \forall a \in G$.

Demonstração: $\overline{\psi}$ é o monomorfismo de ${}^{G}/_{N}$ em G definida na proposição e como $Im\,\overline{\psi} = Im\,\psi = G$, segue que $\overline{\psi}$ é um isomorfismo $({}^{G}/_{N} \cong G)$.

Se $\pi : G \longrightarrow {}^{G}/_{N}$ é a projeção canônica, este teorema pode ser expresso pela comutatividade do seguinte diagrama;

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ {}^{G}/_{N} \arrow[ur, "\overline{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

$(\overline{\psi} \circ \pi = \psi)$

Exemplo 1. Sejam $G = \mathbb{Z}$ (grupo aditivo) e $G = \{1, i, -1, -i\}$ o grupo multiplicativo formado pelos números complexos ± 1 e $\pm i$ e a aplicação $\psi : G \longrightarrow G'$ dada por $\psi(a) = i^{a}$. É fácil ver que $\psi(a + b) = \psi(a).\psi(b)$ (faça isto como atividade). Agora,

$$ker\,\psi = \{a \in \mathbb{Z};\ \psi(a) = 1\} = \{a \in \mathbb{Z};\ i^{a} = 1\} = \{0, \pm 4, \pm 8, \dots\} = 4\mathbb{Z}.$$

Como ψ é sobrejetiva, do 1º teorema dos homomorfismos, temos que $(\{1, i, -1, -i\}, \cdot) \cong (\mathbb{Z}_4, +)$.

Quando G é um grupo, $H, N \leq G$ e $N \trianglelefteq G$ então $HN \leq G$ e $H \cap N \trianglelefteq G$.

Com efeito, $e = ee \in HN \neq \phi$ *e se* $x = hn, y = h'n' \in HN$ *então* $xy^{-1} = hn(h'n')^{-1} = hn(n'^{-1}.h'^{-1})$. *Sendo* $N \trianglelefteq G$, $n'^{-1}.h'^{-1} \in Nh'^{-1} = h'^{-1}.N \subset HN$. *Logo,* $xy^{-1} \in HN$ *donde temos que* $HN \leq G$.

Sendo $N \trianglelefteq G$, *segue que* $N \trianglelefteq HN$ *pois,* $\forall a \in G, aN = Na$, *em particular,* $\forall a \in HN$, $aN = Na$. *Também,* $\mathrm{H} \cap \mathrm{N} \trianglelefteq \mathrm{H}$. *Aqui, dados* $\mathrm{a} \in \mathrm{H}\, e\, b \in H \cap N$, $a^{-1}b\ a \in a^{-1}Na = N$. *Como* $a, b \in H$ *segue que* $a^{-1}b\ a \in H \cap N$. *Logo,* $a^{-1}(H \cap N)\ a \subset H \cap N$. *Analogamente* $H \cap N \subset a^{-1}(H \cap N)a, \forall a \in H$. *Portanto* $H \cap N \trianglelefteq H$.

Proposição 2. (2º teorema dos homomorfismos). Se $H, N \leq G$ *e* $N \trianglelefteq G$ *então* $\frac{HN}{N} \cong \frac{H}{H \cap N}$.

Demonstração: Seja $\psi : H \longrightarrow \frac{HN}{N}$ *definida por* $\psi(h) = hN$. *Então,* $\psi(h.h') = (h.h')N = hN.h'N = \psi(h).\psi(h')$, *é homomorfismo de grupos (notemos que aqui* $hN = Nh$ *pois* $N \trianglelefteq HN$*). Para qualquer classe* $aN \in \frac{HN}{N}$, *temos* $a \in HN$ *donde* $a = hn$ *com* $h \in H$ *e* $n \in N$. *Isto implica que* $\psi(a) = aN = (hn)N = h(nN) = hN = \psi(h)$ *logo, é sobrejetivo. Além disto,* $h \in ker\,\psi \Leftrightarrow hN = N \Leftrightarrow h \in N$. *Ou seja,* $ker\,\psi = H \cap N$. *Como conseqüência do primeiro teorema segue que* $\frac{H}{H \cap N} \cong \frac{HN}{N}$, *como queríamos demonstrar.*

Observação. Se $H \cap N = \{e\}$, *segue deste teorema que* $\frac{HN}{N} \cong H$.

No estudo de grupos quocientes formados a partir de grupos quocientes, é útil a seguinte

Proposição 3. (3º Teorema dos homomorfismos). Se $K, H \trianglelefteq G$ *e* $K \subset H$ *então* $K \trianglelefteq H$, ${}^{H}/_{K} \trianglelefteq {}^{G}/_{K}$ *e vale:*

$$\frac{{}^{G}/_{H}}{{}^{H}/_{K}} \cong \frac{G}{H}$$

Demonstração: É claro que $K \trianglelefteq N$. *Agora, notemos que se* $Ka = Kb$ *temos* $ab^{-1} \in K$ *e como* $K \subset H$ *segue que* $ab^{-1} \in H$ *e* $Ha = Hb$. *Portanto, podemos definir a aplicação*$\psi : {}^{G}/_{K} \longrightarrow {}^{G}/_{H}$, *pondo* $\psi(Ka) = Ha$.

Notemos ainda que $\forall a, b \in G$, $\psi(KaKb) = \psi(Kab) = Hab = Ha.Hb = \psi(Ka).\psi(Kb)$. *Além disto, para cada* $Ha \in {}^{G}/_{H}$, *existe* $Ka \in {}^{G}/_{K}$ *tal que* $\psi(ka) = Ha$, *ou seja,* ψ *é um homomorfismo sobrejetivo de* ${}^{G}/_{K}$ *em*${}^{G}/_{H}$.

Finalmente, $ker\,\psi = \{Ka; Ha = H\} = \{Ka; a \in H\} = {}^{H}/_{K}$.

Segue do 1º teorema dos homomorfismos que $\frac{G/K}{H/K} \cong \frac{G}{H}$.

Observação. Este teorema deixa claro que quocientes de quocientes de G *são na realidade isomorfos a quocientes de* G*. Vamos terminar esta aula estabelecendo o teorema da correspondência no qual veremos que um epimorfismo de grupos preserva propriedades como ser subgrupos ou ser subgrupo normal tanto diretamente quanto inversamente. Mais precisamente, vale a*

Proposição 4. (Teorema da correspondência). Sejam G *e* G' *grupos e* $\psi : G \longrightarrow G'$ *um epimorfismo onde* $N = ker\ \psi$*. Então:*

a)Para cada $H, H \leq G, \psi(H) \leq G'$*. Se* $H \trianglelefteq G$ *então* $\psi(H) \trianglelefteq G'$*.*

b)Para cada $H', H' \leq G'$*, o único subgrupo* X *de* G *contendo* N *tal que* $\psi(X) = H$ *é* $\psi^{-1}(H')$*. Se* $H' \trianglelefteq G$ *então* $\psi^{-1}(H') \trianglelefteq G$*.*

Demonstração: a) Já sabemos que $\psi(H) \leq G'$*; sejam* $H \trianglelefteq G$ *e* $\psi(a)^{-1}.\psi(H).\psi(a) = \psi(a^{-1}).\psi(H).\psi(a) = \psi(a^{-1}Ha) = \psi(H)$ *portanto,* $\psi(H) \trianglelefteq G'$*.*

b) Como $\psi(N) = \{e\} \subset H'$*, claramente* $\phi \neq \psi^{-1}(H') \subset N$*. Se* $a, b \in \psi^{-1}(H')$ *então* $\psi(a), \psi(b) \in H'$*. Isto implica que* $\psi(a).\psi(b)^{-1} \in H' \Longrightarrow \psi(a, b^{-1}) \in H' \Longrightarrow ab^{-1} \in \psi^{-1}(H')$*. Logo,* $\psi^{-1}(H') \leq G$*.*

Para cada $a \in G$ *temos:*

$\psi(a^{-1}\psi^{-1}(H')a) = \psi(a)^{-1}.\psi(\psi^{-1}(H')).\psi(a) = \psi(a)^{-1}.H'.\psi(a) = H'$.
to,$a^{-1}\psi^{-1}(H')a \subset \psi^{-1}(H') \Longrightarrow a^{-1}(\psi^{-1}(H')a = \psi^{-1}(H')$. *Donde segue que* $\varphi^{-1}(H') \trianglelefteq G$.

Finalmente, seja $H \leq G$ *tal que* $N \leq H$ *e* $\psi(H) = H'$*. Assim,* $\psi^{-1}(\psi(H)) = \psi^{-1}(H') \Longrightarrow H \subset \psi^{-1}(H')$*. Se* $a \in \psi^{-1}(H')$ *então* $\psi(a) \in H' = \psi(H) \Longrightarrow \exists h \in H$ tal que $\psi(ah^{-1}) = e \Longrightarrow ah^{-1} \in N \leq H \Longrightarrow a \in Hh = H$*. Logo,* $\psi^{-1}(H') \subset H$ *e conseqüentemente* $H = \psi^{-1}(H')$*.*

RESUMO

Nesta aula estabelecemos o conceito de homomorfismo de grupo onde inicialmente definimos, exemplificamos e apresentamos as propriedades imediatas. Terminamos a aula enunciando e demonstrando os 1º, 2º e 3º teoremas dos isomorfismos e o teorema da correspondência que são teoremas importantes na construção dos pré-requisitos de conteúdos futuros.

ATIVIDADES

1. Verifique em cada caso, se ψ é um homomorfismo de grupos.

a) $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\psi(a) = 2a$ onde aqui $\mathbb{Z}$ é o grupo aditivo.

b) $\psi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ dada por $\psi(x) = |x|$ onde $\mathbb{R}^*$ é o grupo multiplicativo dos reais não nulos.

c) $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada por $\psi(a) = 2^a$, onde $\mathbb{Z}$ é aditivo e $\mathbb{R}_+^*$, multiplicativo.

d) $\psi : G \longrightarrow G$ dada por $\psi(a) = b^{-1}ab$ onde b é um elemento de G pré-fixado.

2. Seja G um grupo abeliano finito de ordem m e seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $mdc(m,n) = 1$. Prove que a aplicação $\psi : G \longrightarrow G$ dada por $\psi(a) = a^n$ é um automorfismo de G.

3. Se $\psi : G \longrightarrow G'$ é um isomorfismo, provar que $\psi^{-1} : G' \longrightarrow G$ também o é.

4. Se $\psi : G \longrightarrow G'$ é um homomorfismo onde G é finito, prove que $|\psi(G)|$ divide $|G|$.

5. Se G é cíclico de ordem n provar que $G \cong \mathbb{Z}_n$.

6. Sejam G um grupo e $K, H \trianglelefteq G$ tais que $K \cap H = \{e\}$. Prove que $kh = hk \;\; \forall k \in K$ e $\forall h \in H$.

7. Se $H, K \trianglelefteq G$, $G = HK$ e $H \cap K = \{e\}$, prove que $\mathrm{G} \cong \mathrm{H}\, X\, K$.

COMENTÁRIO DAS ATIVIDADES

Na primeira atividade, se você entendeu a definição de homomorfismo, não deve ter tido problemas.

Na segunda, você deve ter notado que $a \in ker\, \psi \Leftrightarrow a^n = e \Longrightarrow \mathcal{O}(a)|n$. Como $\mathcal{O}(a)|m$ segue que $\mathcal{O}(a)|1$ ou seja $\mathcal{O}(a) = 1$ e $a = e$. Portanto, ψ é injetiva.

Na terceira atividade, você deve ter usado a definição de isomorfismo e concluído com facilidade.

Na quarta atividade, você deve ter usado o primeiro teorema do isomorfismo.

Na quinta atividade, para $G =< a >$, *a aplicação* $\psi : (\mathbb{Z}_n, +) \longrightarrow (G,\cdot)$ *dada por* $\psi(\overline{m}) = a^m$ *deve ser um isomorfismo de grupos!*

A sexta atividade, caro aluno, é um exercício que auxilia no desenvolvimento da sétima atividade. Para $h \in H$ *e* $k \in K$, *você deve ter notado que* $k^{-1}h^{-1}kh = (k^{-1}h^{-1}k).h = k^{-1}(h^{-1}kh) \in K \cap H = \{e\}$ *pois* H *e* K *são subgrupos normais.*

Na sétima atividade, se você conseguiu resolvê-la, deve ter percebido que a aplicação $\psi : H \times K \longrightarrow G$ *onde* $\psi(h,k) = hk$ *é um isomorfismo de grupos.*

REFERÊNCIAS

GONÇALVES, Adilson. Introdução à álgebra. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. 194 p. (Projeto Euclides) ISBN.

HUNGERFORD, Thomas W. Abstract algebra: an introduction. 2nd. ed. Austrália: Thomson Learning, ©1997.

GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. Elementos de algebra. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 326 p. (Série: Projeto Euclides).