AULA

Solubilidade por Radicais 15

META:

Apresentar o critério de solubilidade por radicais de Galois para equações algébricas.

OBJETIVOS:

Ao final da aula o aluno deverá ser capaz de:

Enunciar o critério de Galois.

Exibir uma quíntica não solúvel por radicais.

PRÉ-REQUISITOS

Aula 14, teorema de Cauchy sobre p-grupos, grupos de permutações e o uso de derivadas para construção de Gráficos de funções.

15.1 Introdução

A expressão

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

é bastante conhecida por você. É a fórmula para a solução da equação quadrática $ax^2+bx+c = 0$ sobre os reais (poderia ser sobre corpos de característica $\neq 2$). Embora muito menos conhecidas, existem fórmulas análogas para a solução de equações algébricas de grau 3 e 4. A analogia consiste em que tais fórmulas envolvem somente as operações definidas sobre um corpo (adição, subtração, multiplicação e divisão) e extração de raízes. Equações assim resolvidas (por meio de fórmulas envolvendo radicais e operações elementares no corpo) ficaram conhecidas por *equações solúveis por radicais* e o processo, bem como o problema de determinar tais soluções, foi chamado *solubilidade por radicais*.

A disparidade entre a simplicidade para obtenção da fórmula para equações quadráticas e a engenhosidade e complexidade para solubilidade das equações cúbicas e quárticas instigou matemáticos de várias gerações. De 1600 A.C. à 1771. O problema tornou-se ainda mais instigante quando Ruffini e Abel exibiram independentemente quínticas (equações algébricas de grau 5) não solúveis por radicais. Isto foi em torno de 1820. Extinguia-se o sonho de se obter fórmulas radicais para resolver uma equação algébrica geral de grau n.

O balde de água fria jogado por Abel e Ruffini no problema da solubilidade de equações algébricas não foi suficiente para fazer os matemáticos desistirem completamente do problema. Muito pelo contrário, apenas tornou o problema ainda mais desafiador: saber se uma dada equação algébrica de grau $n \geq 5$ seria ou não solúvel por radicais. Por volta de 1830, Évarist Galois(1811-1832) resolveu por completo o problema exibindo seu critério de solubilidade.

15.2 Grupos Solúveis

15.2.1 Definição

Um grupo G é dito solúvel se existe uma cadeia de subgrupos

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = \{e\}$$

na qual cada G_i é um subgrupo normal do grupo precedente G_{i-1} e o grupo quociente G_{i-1}/G_i é abeliano.

15.2.2 Exemplos

1. Todo grupo abeliano G é solúvel, pois $G \supseteq \{e\}$ satisfaz as condições requeridas.

2. S_3 é solúvel. De fato, $< (123) >$ é um subgrupo normal de G de ordem 3 (verifique!) e a cadeia

$$S_3 \supseteq < (123) > \supseteq \{e\}$$

é tal que $S_3/ < (123) >$ é abeliano (ordem 2) e $< (123) > /\{e\} =< (123) >$ é abeliano (grupo cíclico).

3. Seja F um corpo de característica zero e ω uma raiz primitiva da unidade. A extensão $K = F(\zeta)$ é o corpo de raízes do polinômio $x^n - 1$, logo normal. Desde que F tem característica zero, K é separável sobre F. Então, K é de Galois sobre F. O grupo de Galois $Gal_F K$ é solúvel. De fato, quaisquer que sejam $\sigma, \tau \in Gal_F K$, $\sigma(\zeta)$ e $\tau(\zeta)$ são raízes de $x^n - 1$, logo são potências de ζ (ζ é raiz primitiva!). Assim,

$$\sigma \circ \tau(\zeta) = \sigma(\tau(\zeta)) = \sigma(\zeta^r) = \sigma(\zeta)^r = (\zeta^s)^r = \zeta^{rs}$$

$$\tau \circ \sigma(\zeta) = \tau(\sigma(\zeta)) = \tau(\zeta^s) = \tau(\zeta)^s = (\zeta^r)^s = \zeta^{rs}$$

donde $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. Então, $Gal_F K$ é abeliano, logo solúvel.

15.2.3 Fatos

1. S_n não é solúvel para $n \geq 5$.

2. Imagem homomórfica de um grupo solúvel é solúvel.

15.3 Extensões Radicais

15.3.1 Definição

Um corpo K é dito ser uma extensão radical de um corpo F se existe uma cadeia de corpos

$$F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_r = K$$

na qual para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, tem-se $F_i = F_{i-1}(\alpha_i)$ com $\alpha_i^m \in F_{i-1}$ para algum inteiro m.

15.3.2 Exemplos

1. Toda extensão quadrática (grau dois) é radical. (Atividade)

2. $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt[7]{1-\sqrt{2}}, \sqrt[7]{1+\sqrt{2}})$ é extensão normal de $\mathbb{Q}$.

15.3.3 Fatos

1. Seja F, E, L corpos de característica zero com $F \subseteq E \subseteq L = E(\alpha)$ e $\alpha^k \in E$. Se L é finita sobre F e E é normal sobre F, então existe uma extensão M de L que é radical sobre E e normal sobre F.

2. Seja F um corpo de característica zero e $f(x) \in F[x]$. Se $f(x) = 0$ é solúvel por radicais, então existe uma extensão radical normal de F contendo um corpo de raízes de $f(x)$.

15.4 O Critério de Solubilidade de Galois

Seja F um corpo de característica zero e $f(x) \in F[x]$. Então, $f(x)$ é solúvel por radicais $\Longleftrightarrow$ o grupo de Galois de $f(x)$ é solúvel.

A prova deste resultado é parte de um curso de pós-graduação. Para o que precisaremos na próxima seção segue um esboço para a prova da condição necessária.

1. Existe uma extensão normal radical K de F contendo $SF_F(f(x))$ (Fato 2).

2. $SF_F(f(x))$ é normal sobre F. (Caracterização de extensões normais via corpos de raízes)

3. $Gal_F SF_E(f(x))$ é solúvel.

OBS 15.1. O último item no esboço da prova acima admite a seguinte generalização:

> Seja K uma extensão radical normal de F, ambos de característica zero. Então, $Gal_F E$ é solúvel para todo corpo intermediário E normal sobre F.

15.5 Uma quíntica não solúvel por radicais

O grupo de galois do polinômio $f(x) = 2x^5 - 10x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$ é isomorfo à S_5, não solúvel. Consequentemente, a equação

$$f(x) = 2x^5 - 10x + 5 = 0$$

não é solúvel por radicais. Deste modo,

Não existe uma fórmula envolvendo somente as operações definidas no corpo e extração de raízes para a solução de uma equação algébrica geral de grau 5.

Para ver que $Gal_F(f(x))$ é isomorfo à S_5 siga os seguintes passos:

1. Usando a técnica de derivadas aprendida no cálculo I, mostre que ± 1 são os pontos críticos (reais) de $f(x) = 0$.

2. Pelo uso da segunda derivada, mostre que $f(x) = 0$ admite um único máximo relativo em $x = -1$, um único mínimo relativo em $x = 1$ e um ponto de inflexão em $x = 0$. (Esboce o gráfico)

3. Conclua que a equação $f(x) = 0$ admite exatamente três raízes reais distintas. Use o teorema do valor médio para funções contínuas.

4. Mostre que $f(x)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

5. Sabemos que $Gal_{\mathbb{Q}} SF_{\mathbb{Q}}(f(x)) = [SF_{\mathbb{Q}}(f(x)) : \mathbb{Q}]$ (Teorema fundamental da teoria de Galois).

6. Se α é qualquer raiz de $f(x)$ então $m_{\alpha,\mathbb{Q}}(x) = f(x)$. Logo,

$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 5$. Assim,

$$\begin{aligned} Gal_{\mathbb{Q}} SF_{\mathbb{Q}}(f(x)) &= [SF_{\mathbb{Q}}(f(x)) : \mathbb{Q}] \\ &= [SF_{\mathbb{Q}}(f(x)) : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \\ &= 5[SF_{\mathbb{Q}}(f(x)) : \mathbb{Q}(\alpha)] \end{aligned}$$

Então, 5 é primo e divide a ordem do grupo $Gal_{\mathbb{Q}} SF_{\mathbb{Q}}(f(x))$. Pelo teorema de Cauchy, $Gal_{\mathbb{Q}} SF_{\mathbb{Q}}(f(x))$ admite um subgrupo cíclico de ordem 5 (ou elemento de ordem 5).

7. O grupo de Galois, considerado como um grupo de permutações das raízes de $f(x)$, é um subgrupo de S_5. Os único elementos de S_5 de ordem 5 são os 5-ciclos. Então, $Gal_{\mathbb{Q}} SF_{\mathbb{Q}}(f(x))$ é um subgrupo de S_5 contendo um 5-ciclo.

8. O isomorfismo conjugação em $\mathbb{C}$ induz um automorfismo em $SF_{\mathbb{Q}}(f(x))$ intercalando as duas únicas raízes complexas de $f(x)$ e fixando as outras três raízes reais. Este automorfismo como um elemento de $Gal_{\mathbb{Q}} SF_{\mathbb{Q}}(f(x))$ é uma transposição.

9. Deste modo, $Gal_{\mathbb{Q}} SF_{\mathbb{Q}}(f(x))$ é um subgrupo de S_5 contendo uma transposição e um 5-ciclo. Logo, $Gal_{\mathbb{Q}} SF_{\mathbb{Q}}(f(x)) = S_5$ (Atividade).

Prezado aluno, chegamos ao final do curso. É compreensível o cansaço ocasionado pelo enorme esforço dispendido para chegarmos até aqui. Mas, o deleite da aprendizagem na matemática é proporcional ao quanto não trivial for o que estivermos aprendendo. Fatos não triviais não são por acaso e sua compreensão requer dedicação e perseverança. Eis o que torna a matemática um conhecimento de poucos.

15.6 Conclusão

O critério de solubilidade de Galois resolveu um problema milenar. Somente isto já seria suficiente para tornar seu critério uma das soluções mais importantes da história da matemática. Mas, a maior importância deste critério consiste no uso de uma estrutura abstrata (grupos) para resolver um problema sem nenhuma conexão aparente. Isto não somente evidenciou o potencial da álgebra para solução de problemas mas iniciou uma nova era na matemática chamada moderna.

RESUMO

Grupos Solúveis Um grupo G é dito solúvel se existe uma cadeia de subgrupos

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = \{e\}$$

na qual cada G_i é um subgrupo normal do grupo precedente G_{i-1} e o grupo quociente G_{i-1}/G_i é abeliano.

Não existe uma fórmula envolvendo somente as operações definidas no corpo e extração de raízes para a solução de uma equação algébrica geral de grau 5

Extensões Radicais

Um corpo K é dito ser uma extensão radical de um corpo F se existe uma cadeia de corpos

$$F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_r = K$$

na qual para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, tem-se $F_i = F_{i-1}(\alpha_i)$ com $\alpha_i^m \in F_{i-1}$ para algum inteiro m.

Critério de Solubilidade de Galois

Seja F um corpo de característica zero e $f(x) \in F[x]$. Então, $f(x)$ é solúvel por radicais $\Longleftrightarrow$ o grupo de Galois de $f(x)$ é solúvel.

A quíntica $2x^5 - 10x + 5 \in \mathbb{Q}[x]$ não é solúvel por radicais.

ATIVIDADES

ATIV. 15.1. Faça uma pesquisa sobre as fórmulas envolvendo radicais para uma equação cúbica. Use seus resultados para determinar as raízes da equação $x^3 + 3x + 2 = 0$.

ATIV. 15.2. Mostre que toda extensão radical é finita.

ATIV. 15.3. Mostre que toda extensão quadrática é radical.

ATIV. 15.4. Mostre que o corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt[7]{1-\sqrt{2}}, \sqrt[7]{1+\sqrt{2}})$ é uma extensão radical de $\mathbb{Q}$.

ATIV. 15.5. Seja H um subgrupo de S_5. Se H contém um 5-ciclo e uma transposição então $H = S_5$.

ATIV. 15.6. Use os passos para mostrar a não solubilidade por radicais da quíntica exibida no texto e construa uma outra quíntica não solúvel por radicais.

LEITURA COMPLEMENTAR

DUMMIT, David S., FOOTE, Richard M. Abstract Algebra. John Wiley and Sons, 3.ed., USA, 2004.
GONÇALVES, Adilson, Introdução à álgebra, IMPA, Projeto Euclides, 5.ed., Rio de Janeiro, 2008.
HUNGERFORD, Thomas W., Abstract algebra: an introduction, Saunders College Publishing, 1990.
STEWART, Ian. Galois Theory, Chapman & Hall, 3.ed, 2004.