Aula 2

ESPAÇO LINEAR. VELOCIDADE MÉDIA E VELOCIDADE INSTANTÂNEA

META

Dar ao aluno a definição matemática de espaço linear (ou vetorial), e partindo da definição de velocidade média, fazer a revisão histórica da elaboração do conceito de velocidade instantânea.

OBJETIVOS

Capacitar o aluno, por meio da introdução matemática precisa de espaço linear, a usá-lo com liberdade e eficiência. Ou seja, o aluno vai saber como e quando utilizar a ferramenta matemática que é o vetor, que operações podem realizar com o vetor e quais suas propriedades.

Despertar o aluno, por meio de uma revisão histórica, para a importante e difícil problemática subjacente ao conceito de velocidade instantânea, e prepará-lo para a definição matemática deste conceito.

PRÉ-REQUISITO

Alguma familiaridade do aluno com os vetores. Conhecimento, dos estudos de Física no curso secundário, da definição de velocidade média.

INTRODUÇÃO

Vamos nesta segunda aula, começar dando a vocês a definição matemática de espaço linear. (Espaço linear é sinônimo de espaço vetorial). É uma definição comprida, pois envolve duas operações essenciais e muitas propriedades destas operações.

Vocês podem se perguntar, estamos estudando Física e não matemática? Será tão fundamental saber todas estas propriedades? É fundamental, porque conhecendo com exatidão as operações e suas propriedades, e não tendo apenas uma vaga noção, vocês vão saber, sem ficar em dúvida, como aplicá-los. Vão saber o que se pode fazer com os vetores, o que não se pode fazer.

A matemática é a linguagem da Física e não é possível fazer Física corretamente sem conhecer sua linguagem. Além do mais, vocês vão ver que estas propriedades, embora sendo muitas, são bastante intuitivas e é possível mostrá-las graficamente. Faremos isto com algumas e deixaremos outras para que vocês o façam. É preciso saber estas definições. Mas isto não se consegue simplesmente memorizando-as, mas sim, examinando-as, verificando-as quanto são plausíveis, e procurando aplicá-las.

Plausível - com grande possibilidade de ser verdadeira. Esta possibilidade se nota, mais inteiramente pela simples observação, que por uma demonstração.

Também veremos nesta segunda aula o conceito de velocidade instantânea, mostrando o quanto este conceito, que vocês talvez já tenham visto no secundário, suscitou polêmicas, desde a mais remota antiguidade na Grécia antiga, e trouxe avanços matemáticos extraordinários que culminaram com a invenção do Cálculo Diferencial e Integral na segunda metade do século XVII.

2.1 ESPAÇOS LINEARES E ANÁLISE DIMENSIONAL

Espaços Lineares

Em Física temos dois tipos de grandezas. Grandezas escalares e grandezas vetoriais. Grandezas escalares são aquelas que ficam perfeitamente caracterizadas por um número (e naturalmente uma unidade de medida). Por exemplo: temperatura, tempo, energia. Já as grandezas vetoriais ficam caracterizadas por um número (que é o módulo do vetor) e uma direção. Temos como exemplos de grandezas vetoriais: o deslocamento, velocidade, aceleração, momento linear. Costuma-se, em Física, designar os vetores por uma seta (Ver Fig. [2.1]).

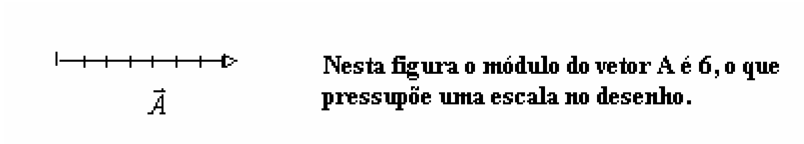

Fig. [2-1]

O comprimento da seta é o módulo do vetor, e indica a magnitude da grandeza Física. A representação dos vetores com setas é útil para entendermos e lembrarmos muitas propriedades dos vetores. Estas propriedades, porém, são aquelas dadas pela definição de espaço vetorial, e as que decorrem da definição.

Em matemática, a palavra espaço é empregada como sinônimo de conjunto. Conjunto é uma noção primitiva (sem definição). O conjunto de carteiras de uma sala de aula, ou o conjunto de alunos de uma turma, são exemplos de conjuntos. Podemos ter também conjuntos de objetos matemáticos e então em geral damos o nome de espaço. Este espaço pode ter uma estrutura matemática que são as regras com as quais realizamos operações entre os elementos do conjunto. O conjunto dos vetores constitui um espaço vetorial, também chamado de espaço linear.

Como os vetores são usados na representação de muitas grandezas da Física, é muito importante conhecer a estrutura do espaço vetorial, para poder ter clareza das operações que vamos poder realizar com os vetores.

Por isto vamos começar nosso curso, dando a definição de Espaço Vetorial. Vamos mostrar o significado de algumas propriedades do espaço vetorial (ou linear) usando a representação de vetores como setas. Veremos então que estas propriedades são bastante intuitivas e evidentes. Outras então deixaremos para serem explicadas intuitivamente nos questionários. Queremos esclarecer que a definição que vamos dar de espaço vetorial, é mais genérica que os vetores da Física (representados por setas). Isto quer dizer que todos os vetores da Física cabem na nossa definição, mas ela abrange outros entes matemáticos além dos vetores da Física. Assim por exemplo, podemos ter o espaço vetorial (ou linear) das matrizes quadradas, de funções, e muitos outros espaços.

Definição

Espaço Linear

Um espaço linear é um conjunto de objetos (que indicaremos por $\vec{A}$, $\vec{B}$ etc.) e que chamaremos de vetores, sobre os quais é possível fazer as seguintes operações:

1 – Soma de vetores;

2 – Multiplicação de um vetor por um escalar.

A soma de vetores consiste em associar a dois vetores do espaço, um terceiro vetor (também do espaço). No caso dos vetores designados por setas (os vetores da física) esta soma pode ser feita, pela lei do paralelogramo, ou colocando a cauda de um vetor na ponta do outro. (Ver Fig. [2-2]).

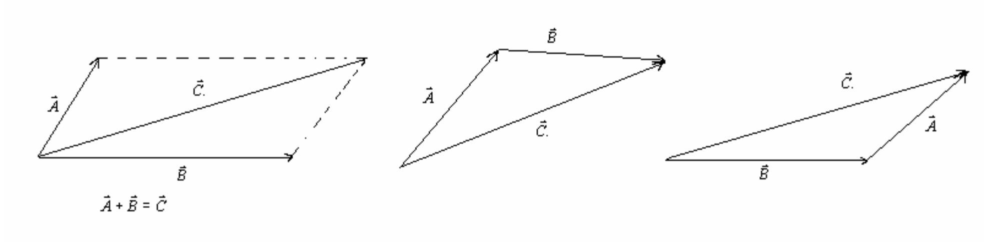

Fig. [2-2]

Em:

a) somamos os vetores pela regra do paralelogramo;

b) colocamos $\vec{B}$ na ponta de $\vec{A}$;

c) colocamos $\vec{A}$ na ponta de $\vec{B}$; Pode-se ver que em todos os casos o resultado é o mesmo.

A multiplicação por um escalar está ilustrada na Fig. [2-3].

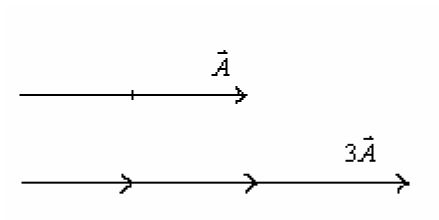

Fig. [2-3]

Vemos que, multiplicar um vetor por um escalar, consiste em associar ao escalar e ao vetor, um outro vetor, cuja direção é a mesma (se o escalar for um número positivo) e cujo módulo é o produto do módulo do vetor pelo escalar. Se o escalar for um número negativo, o vetor terá sua direção modificada de 180º.

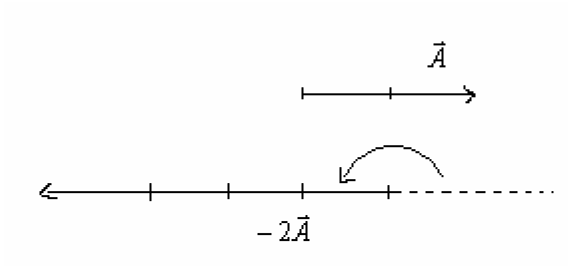

Fig. [2-4] – Ilustrando o produto de $\vec{A}$ pelo número negativo -2.

Quando dizemos produto de uma escalar por um vetor, a palavra escalar é sinônima da palavra número. No caso dos vetores flexas da Física, este número é sempre um número real. Mas um outro tipo de espaço linear, pode ter, na definição de sua segunda operação que é produto de um escalar por um vetor, que o escalar seja um número complexo. Se o escalar for um número real dizemos que:

“O espaço vetorial está definido sobre o campo dos reais.”

Se o escalar em questão for um número complexo temos:

“Um espaço vetorial definido sobre o campo dos complexos.”

Vejamos agora as propriedades destas duas operações, e que, portanto, fazem parte da definição de espaço linear (ou vetorial).

1. A soma de vetores é comutativa:

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}.$$

2. A soma de vetores é associativa:

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}).$$

3. O produto de um escalar por um vetor é associativo:

$$\alpha\left(\beta\vec{A}\right)=(\alpha\beta)\vec{A}.$$

(Onde α e β são os escalares, ou seja, números reais ou complexos).

4. O produto de um escalar por um vetor é distributivo com relação à soma dos escalares:

$$(\alpha+\beta)\vec{A}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{A}$$

5. O produto de um escalar por um vetor é distributivo com relação à soma dos vetores:

$$\alpha(\vec{A}+\vec{B})=\alpha\vec{A}+\alpha\vec{B}$$

6. Existe entre os elementos do espaço linear um vetor nulo, que indicamos por $\vec{O}$, e que somado à qualquer vetor dá este mesmo vetor:

$$\vec{A}+\vec{O}=\vec{A}$$

7. O número tem a propriedade: $1\vec{A}=\vec{A}$.

8. Cada vetor do espaço tem um vetor oposto (indicaremos por $\vec{A}^{op}$) tal que:

$$\vec{A}+\vec{A}^{op}=\vec{O}$$

Destas propriedades decorrem ainda as seguintes, que é preciso saber:

. O vetor $\vec{O}$ é único;

. O $\vec{A}$ = $\vec{O}$ (o produto do número O por um vetor qualquer é igual ao vetor nulo);

. O oposto de um vetor é único;

. O oposto de um vetor é o número -1 multiplicado pelo vetor $\vec{A}^{op} = -\vec{A}$.

Dado um vetor (um vetor flecha da Física) podemos achar suas componentes em um sistema de eixos cartesianos. Para tanto vamos inicialmente definir o versor de um vetor:

Dado um vetor $\vec{A}$ definimos o versor de $\vec{A}$ (que indicamos por â, ou $ê_A$) pelo vetor de mesma direção de $\vec{A}$ mas de módulo um (1).

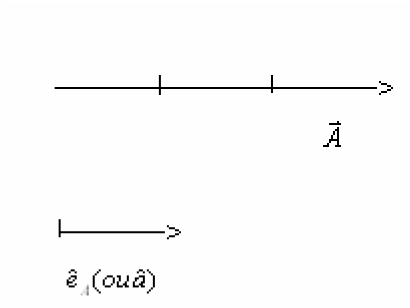

Figura: [2-5]

Na Fig. [2-5] o vetor $\vec{A}$ tem módulo 3 (Indicamos módulo de $\vec{A}$ por $|\vec{A}|$ ou A. Então $\hat{a} = \frac{1}{3}\vec{A}$.

Projetando o vetor A do plano, nos eixos das abscissas e no eixo das ordenadas (Ver Fig. [2-6]),

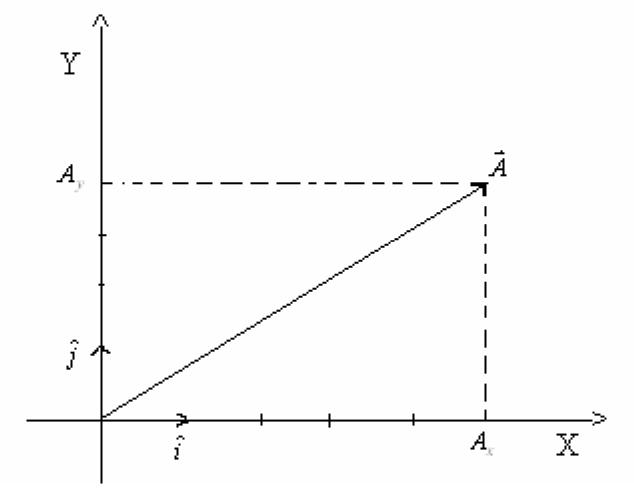

Figura: [2-6]

temos a distância A_x no eixo X e a distância A_y no eixo Y. A distância A_x multiplicada pelo versor î (vetor unitário na direção do eixo X) fornece o vetor A_x î. Analogamente, projetando o ponto de $\vec{A}$ no eixo y, obtemos a distância A_y multiplicada pelo versor $\hat{j}$ fornece A_y $\hat{j}$. Vemos então da Fig. [2-6] que:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

(Usando a regra de soma de vetores), Analogamente, se tivermos um sistema tridimensional (Ver Fig. [2-7]), podemos escrever:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{h}$$

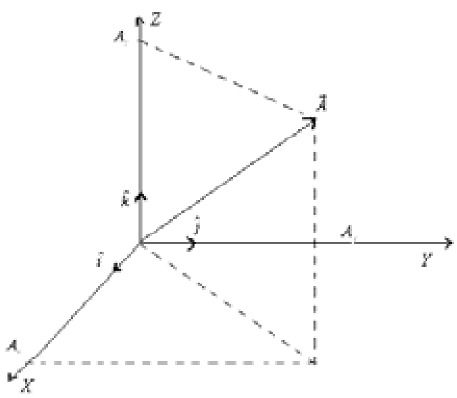

Fig. [2-7]

Da Fig. [2-8] que reproduzimos abaixo, podemos tirar:

$$A_x = A\cos\theta$$

$$A_y = A\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Das fórmulas [2-1] tiramos:

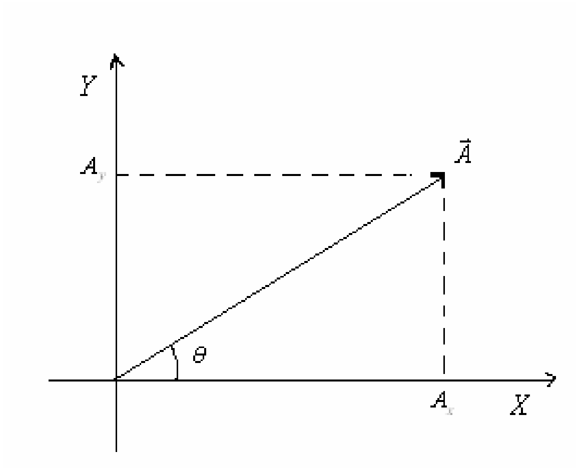

Fig. [2-8]

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$tg\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

A decomposição de um vetor nos eixos cartesianos fornece uma maneira simples de somar vetores, que passamos à mostrar, examinando a Fig. [2-9].

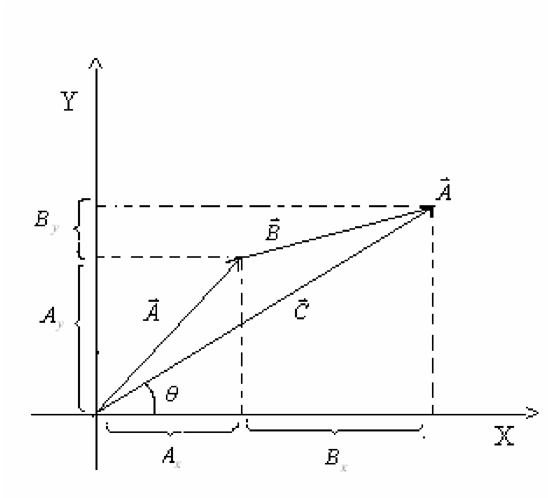

Fig. [2-9]

Na Fig. [2-9] vemos que:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

Ao mesmo tempo é evidente, na figura, que:

$$C_x = A_x + B_X$$
$$C_y = A_y + B_y$$

Conhecendo C_x e C_y sabemos C $\left(C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}\right)$ e também o ângulo θ $\left(tg\theta = \frac{C_x}{C_y}\right)$.

Vejamos a aplicação destes resultados na solução de um problema de física.

Exemplo 1

"Um automóvel percorre *30 km* em uma direção para leste. Em seguida vira perpendicularmente e percorre *40 km* para o norte. Encontre o deslocamento total do automóvel."

Solução:

Para usar o método da soma de vetores mediante decomposição em eixos cartesianos, é importante promover uma escolha adequada de eixos. Tomemos o eixo do *X* na direção leste, e o do *Y* na direção norte. Então:

$$C_x = A_x + B_x = 30km + 0 = 30km$$
$$C_y = A_y + B_y = 0 + 40km = 40km$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{(30km)^2 + (40km)^2} = 50km$$
$$tg\theta = \frac{C_y}{C_x} = \frac{40km}{30km} = 1{,}33$$
$$\theta = arctg(1{,}33) = 53^{\circ}$$

Resposta: o vetor deslocamento tem o módulo de *50 km* e faz um ângulo de *53°* com o eixo para leste (ângulo tomado em sentido anti-horário).

Observação:

É importante distinguir entre módulo do vetor deslocamento, para o qual obtivemos *50 km*, com o espaço total percorrido que é evidentemente *70 km*.

Há ainda uma operação que pode ser definida em espaços lineares, embora não seja necessária sua existência para caracterizar um espaço linear. É o produto escalar. (Quer dizer, nem todo espaço linear tem produto escalar). O espaço linear dos vetores da Física tem produto escalar e sua definição é a seguinte. Seja um vetor $\vec{A}$ e um vetor $\vec{B}$. O seu produto escalar indica-se por $\vec{A}$, $\vec{B}$ e é definido pela fórmula.

$$\vec{A},\vec{B} = AB\cos\beta \qquad [2\text{-}2]$$

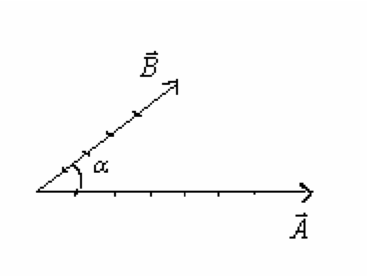

Fig. [2-10]

Onde o ângulo α é o ângulo entre as direções de $\vec{A}$ e de $\vec{B}$ (Ver Fig. [2-10]). Então o produto escalar de $\vec{A}$ por $\vec{B}$, quer dizer $\vec{A}$, $\vec{B}$ é um escalar (ou seja, um número) obtido multiplicando o módulo de $\vec{A}$ pelo módulo de $\vec{B}$ pelo coseno do ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Na Fig. [2-10] se A=7, B=4 e α=30° então $\vec{A}$, $\vec{B}$= 7 x 4 x cós 30°. $\vec{A}.\vec{B} = 28x\frac{\sqrt{3}}{2} = 14x\sqrt{3}$.

Vemos que se o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$ estiver entre *90*° e *270*°, o coseno é negativo. Então o produto escalar pode ser um número positivo ou negativo (Pode ser também nulo se o ângulo for *90*° ou *270*°).

Podemos expressar o produto escalar por meio das componentes dos vetores em um sistema de eixos cartesianos. Vejamos como se pode fazer isto em duas dimensões.

Seja o vetor $\vec{A}$ dado por:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

E o vetor $\vec{B}$ dado por:

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

O produto escalar $\vec{A}\,.\,\vec{B}$ é então:

$$\vec{A}.\vec{B} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j}\right)\ .\ \left(B_x\hat{i} + B_{\hat{y}}\hat{j}\right)$$

Vamos agora admitir (sem provar) duas propriedades do produto escalar:

1º O produto escalar é distributivo, ou seja:

$$\vec{A}\ .\ \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C} \qquad \text{Fig. [2-3]}$$

2º Dados dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e um escalar b, temos:

$$\vec{A}.\ b\vec{B} = b\ \vec{A}\ \vec{B} \qquad \text{Fig. [2-4]}$$

(Deixaremos a prova destas duas propriedades, partindo da definição de produto escalar, como um exercício especial, não obrigatório). Admitidos [2-3] e [2-4] temos:

$$\vec{A}.\vec{B} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j}\right)\ .\ \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j}\right) = A_x i.B_x\hat{i} + A_x\hat{i}.B_y\hat{j} + A_y\hat{j}.B_x\hat{i} + A_y\hat{j}.B_y\hat{j}$$
$$= A_xB_x\hat{i}.\hat{i} + A_xB_y\hat{i}.\hat{j} + A_yB_x\hat{j}.\hat{j}$$

Mas,

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = 1 \qquad [2\text{-}5]\ (a)$$

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = 0 \qquad [2\text{-}5]\ (b)$$

Demonstrar [2-5] (a) e [2-5] (b) partindo da definição de produto escalar e do fato de $\hat{i}$ e $\hat{j}$ serem versores respectivamente do eixo X e do eixo Y levando em conta [19-3a] e [19-3b] o produto escalar $\vec{A}$ e $\vec{B}$ fica:

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y \qquad [2\text{-}6]$$

Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ forem vetores no espaço tridimensional, com suas decomposições em três eixos cartesianos mutuamente ortogonais X, Y e Z dadas por:

$$\vec{A} = A\ \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z b\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

A fórmula [2-6] se generaliza ficando:

$$\vec{A}.\underset{\rightarrow}{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad [2\text{-}7]$$

Análise dimensional

A palavra dimensão tem várias acepções.

Acepção – sentido, significado de uma palavra.

Podemos dizer, por exemplo, uma casa de grandes dimensões.

Nesta frase a palavra dimensão tem o significado do tamanho. Em Física dimensão indica o tipo de grandeza física. Uma massa é uma grandeza física. Falamos de dimensão de massa. Uma força é uma grandeza física. Falamos de dimensão de força. O importante da análise dimensional é que podemos ter uma fórmula que é um conjunto de operações com diferentes tipos de grandezas em um membro, igualada a uma outra grandeza no segundo membro da equação. Então a combinação das grandezas com as grandezas do primeiro membro deve resultar em uma dimensão igual à dimensão do segundo membro. Isto porque não podemos igualar grandezas de diferentes tipos ou dimensões. Não tem sentido, por exemplo, dizer que *30 metros* são iguais a *10 kilogramas*.

Indica-se a dimensão de uma grandeza, colocando a letra que representa a grandeza entre colchetes. Por exemplo, dimensão de força [F]. Em mecânica temos três dimensões fundamentais que são: massa [M]; comprimento [L], tempo [T]. A dimensão das demais grandezas podem ser obtidas pelas fórmulas definidoras destas grandezas. Assim por exemplo, velocidade é espaço (comprimento) sobre tempo. Então:

$$[V] = \frac{[L]}{[T]} \text{ ou } [V] = [L]\,[T]^{-1}$$

A aceleração é a variação da velocidade pela variação do tempo. Como veremos, mas que vocês do primeiro ano da Física certamente já sabem de seus estudos secundários:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Então:

$$[a] = [L]\,[T]^{-2}$$

Força, pela segunda lei de Newton é:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Então:

$$[F] = [M]\,[L]\,[T]^{-2}$$

Trabalho é força por deslocamento. Então, chamando [W] a dimensão de trabalho,

$$[W] = [M]\,[L]^2\,[T]^{-2}.$$

Há grandezas que são adimensionais, quer dizer, não tem dimensão. Vejamos porque e o que isto significa. Um ângulo é uma grandeza adimensional. Isto fica claro quando medimos um ângulo em radianos. O radiano é uma medida angular expressa por uma razão entre o comprimento medido em uma determinada circunferência e o raio desta circunferência. Assim por exemplo o ângulo de 360° que em radianos é 2π, é a razão entre o comprimento de uma circunferência de raio R, e o próprio raio R, ou seja $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$. O ângulo de 180° é a razão entre uma semicircunferência e o raio $180° = \frac{\pi R}{R} = \pi$. Então dimensionalmente:

$$[\alpha] = \frac{[L]}{[L]} = 1,$$

e o ângulo é uma grandeza adimensional.

Tomemos a lei de Newton da atração entre as massas (escrita somente como módulo da força *F*).

$$F = G\ \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad [2\text{-}8]$$

A força de atração entre as massas m_1 e m_2 é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. *G* é a constante de proporcionalidade. Qual é a dimensão desta constante de proporcionalidade? Para responder lembre-se do que dissemos acima. A dimensão do segundo membro da equação [2-8] tem que ser dimensão de força. Já calculamos a dimensão de força. Então temos que encontrar uma dimensão para G, tal que o segundo membro de [2-8] tenha dimensão de força. Isto quer dizer que a dimensão de G, multiplicada pela dimensão de $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ (que sabemos calcular com facilidade) deve resultar na dimensão de força. (Ver problema no fim do capítulo).

Esperamos que esteja claro, para os alunos da UAB, a diferença entre dimensão e unidade de medida. A dimensão exprime a qualidade de uma grandeza (o tipo de grandeza). Já através da unidade de medida, podemos indicar a quantidade de uma certa grandeza. A unidade de medida da grandeza massa, no SI (Sistema Internacional) é o kg (kilogramas). A unidade de comprimento é o metro (m), e a unidade de tempo é o segundo (s). As outras unidades são também derivadas. Por exemplo, a unidade de velocidade é o $\frac{m}{s}$ (metro por segundo), de aceleração é $\frac{m}{s^2}$, de força é o abandono *N* (Newton) que é a força capaz de proporcionar uma aceleração de 1 metro por segundo elevado a menos dois, $m.s^{-2}$ a uma massa de *1 kg*.

2.2 CONCEITO DE PONTO MATERIAL VELOCIDADE MÉDIA

Conceito de ponto material

A cinemática, que é a parte da mecânica que estuda o movimento, é talvez a mais velha área da Física. O estudo do movimento, já de uma maneira racional, tem sua origem na Grécia antiga. No contexto da mecânica newtoniana, a cinemática se utiliza de um conceito que passaremos a analisar, e que é o conceito de *ponto material.* Se atirarmos um corpo ao espaço, o seu movimento é um geral, bastante complicado. Ao mesmo tempo em que ele se desloca como um todo, ele também pode girar, e suas partes podem também ter um movimento de oscilação (vibração). Seguindo a proposta de Descartes, que, como vimos consistia em separar um problema em suas diferentes partes, vamos nos propor estudar inicialmente, e separadamente, o movimento do corpo como um todo. Este é o chamado movimento de translação. Este movimento está ilustrado na Fig. [2-11]:

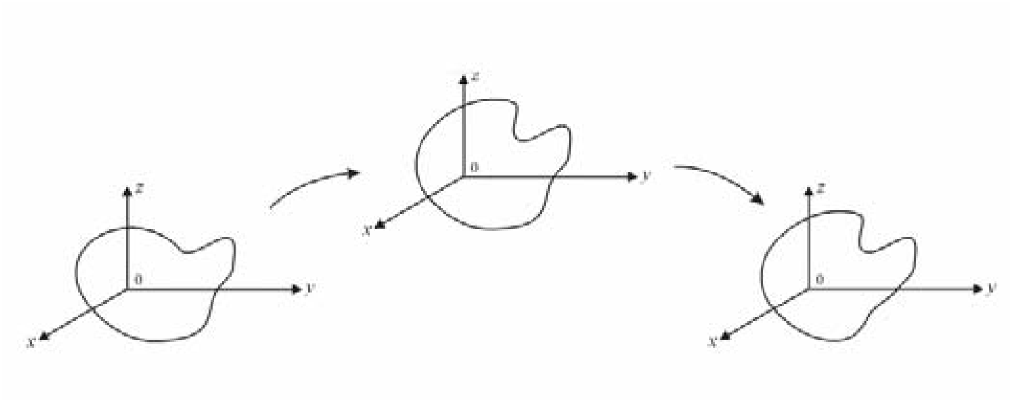

Fig. [2-11]

Se tivermos um sistema de eixos XYZ, fixos em um ponto O de um corpo em um movimento puramente de translação, a media que o corpo, e o ponto O se deslocam no espaço, o sistema de eixos permanece com os três eixos sempre na mesma direção. É fácil intuir que em geral todo movimento, é muito complexos: o corpo em geral vai rodar. Mas para iniciarmos nosso estudo podemos abstrair do movimento de rotação, e nos concentrarmos somente no de translação. Podemos tentar descrever (usando equações) o movimento do ponto O, por exemplo. Mas o movimento como um todo, vai depender também da massa do corpo, e das forças que atuam sobre ele. Podemos então supor que no ponto O, está concentrada a massa do corpo. Daí o conceito de ponto material, – um ponto que contém matéria[1]. Em um segundo momento, podemos estudar separadamente a

[1] É conveniente escolher o ponto O como o centro de massa do corpo. Veremos adiante este conceito.

rotação do corpo, para depois seguindo o preceito cartesiano, reunir os dois estudos em uma compreensão do movimento na sua totalidade.

Desta maneira é comum em Cinemática, tratarmos como ponto material, qualquer corpo cujo movimento pretendemos estudar. Uma pessoa, um automóvel e até mesmo um astro pode ser tratado como um ponto. A abstração ponto material, se justifica também pela relação entre as dimensões espaciais do movimento e as dimensões do corpo. Assim se estudarmos o percurso de um automóvel de Aracaju à Lagarto, as dimensões do automóvel são desprezíveis diante da dimensão do percurso. Mesmo um corpo como o Sol, tem dimensões desprezíveis quando comparadas à do percurso que o Sol executa na galáxia, somado ao movimento da própria galáxia. (Aliás, a própria galáxia pode ser tratada como um ponto material, quando estudamos a recessão das galáxias).

Velocidade média

Seja um ponto material (que podemos também chamar de partícula) que se desloca de um ponto A até o ponto B em um intervalo de tempo ΔT. Seja $\vec{d}$, o vetor deslocamento unindo A e B (ou seja, com a cauda em A e a ponta em B) (ver Fig. [2-12]). A velocidade média da partícula, durante este intervalo de tempo é dada por:

$$\overrightarrow{v_m} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

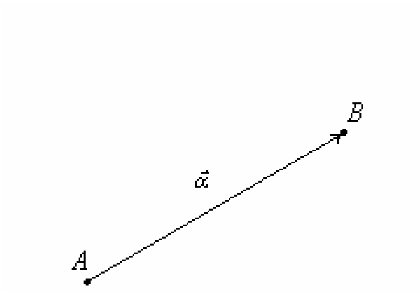

Fig. [2-12]

O vetor deslocamento $\vec{d}$ representa o percurso de uma partícula que gastou o tempo Δt, para se deslocar de A até B.

Vemos então que velocidade média é um vetor; ela é obtida do produto do escalar $\frac{1}{\Delta t}$ pelo vetor $\vec{d}$. Então o vetor $\overrightarrow{v_m}$, na qualidade de vetor, tem módulo e tem direção. O módulo é dado pelo módulo de $\vec{d}$, expresso em uma escala de comprimento (por exemplo, metros, centímetros ou kilometros), pelo tempo, expresso em uma escala de tempo (segundo, hora). A dimensão de $\overrightarrow{v_m}$ é $[L]\,[T]^{-1}$, como já vimos, ainda na qualidade de vetor, $\overrightarrow{v_m}$, tem direção. A velocidade média é uma medida do deslocamento líquido pelo tempo gasto, mas não nos diz nada sobre o que acontece, e como é o movimento entre A e B. O caminho pode ser uma curva ou uma reta. A velocidade pode ser constante ou não. A velocidade média envolve somente o deslocamento total e o tempo total decorrido. Por exemplo, suponhamos que uma pessoa saia de sua casa para um passeio, voltando à sua casa depois de decorrido um intervalo de tempo ΔT. A velocidade média (tal como definimos em Física) neste passeio é zero, pois o vetor deslocamento é zero (o ponto inicial – a casa – coincide com o ponto final).

Exemplo 1 - Suponhamos que um automóvel se desloque à distância de *50 km* na direção leste em *2 horas*. Em seguida durante *1 hora* percorra *30 km* na direção norte. Qual é sua velocidade média durante este percurso?

Solução: O deslocamento de O a A é dado pelo vetor $\vec{a}$, e o deslocamento de A te B pelo vetor $\vec{b}$. O deslocamento total é a soma vetorial de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

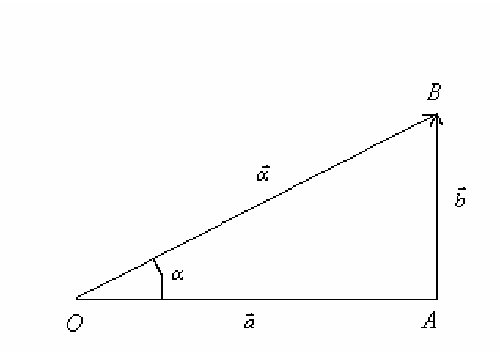

Fig. [2-13]

Então:

$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$

Devemos achar o módulo de $\vec{d}$ (ou seja, $|\vec{d}| = d$). Como o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de 90°, podemos neste caso, com facilidade aplicar o Teorema de Pitágoras, sem precisar utilizar o recurso de projetar os vetores em dois eixos ortogonais para somá-las. Temos então:

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

$d = \sqrt{2.500km^2 + 900km^2}$

$d = \sqrt{3.400km^2} = 58{,}31km$

O percurso total de *O* à *B* é realizado em 3 horas, pois:

$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2h + 1h = 3h$

Onde Δt_1 é o percurso de *O* a *A* que é de *2 horas* e Δt_2 de *A* à *B* que é de *1 hora.*

Então pela definição de velocidade média temos:

$$\left| \overrightarrow{v} \right| = v_m = \frac{58{,}31}{3}\frac{km}{k} = 19{,}44\frac{km}{h}$$

Mostramos que o vetor velocidade média tem módulo *19,44* na escala $\frac{km}{h}$. Como vetor é um ente matemático que tem módulo e direção, temos que determinar ainda a direção de $\overrightarrow{v_m}$ para especificarmos completamente este vetor.

Na Fig. [2-13], vemos que:

$$tg\alpha = \frac{30}{50}km$$

$$tg\alpha = \frac{30}{50} = 0{,}6$$

Então:

$\alpha = arctg\ 0{,}6 = 30{,}96°$

Assim a resposta ao problema é:

Resposta: a velocidade média do automóvel no percurso *OAB* é um vetor de módulo *19,44 km/h* e que faz um ângulo de (*30,96*)° com a direção leste.

Observe que a velocidade média, como é definida em Física, é muito diferente da noção "espaço percorrido por tempo". Poderíamos, é claro, nos perguntar sobre esta relação (espaço percorrido por tempo). No caso do presente problema ela seria $\frac{80km}{3h}$ ou seja, *26,66 km/h*. É importante ressaltar que este valor não é a velocidade média tal como a definimos em Física. Aliás, este valor, embora de mesma dimensão e que, portanto é dado na mesma escala, da velocidade média, não é sequer um vetor. A menos de expressa menção em contrário, sempre que nos referimos à velocidade média, estamos entendendo sua definição na Física, ou seja, $\overrightarrow{v_m} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$.

2.3 REVISÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE VELOCIDADE INSTANTÂNEA

O problema da velocidade instantânea foi um dos problemas que mais preocuparam os filósofos gregos. Suas observações a respeito foram discutidas durante a Idade Média, e os progressos neste sentido é que possibilitaram já com Newton e Leibreiz a noção de derivada (suportada pela noção de limite e que é uma das pedras fundamentais do Cálculo Diferencial).

Houve uma importante escola filosófica grega, os sofistas, que sustentavam que a cada instante uma flecha, arremessada por um arqueiro, estava parada. O raciocínio é o seguinte: um instante é um momento único no fluxo do tempo, sem nenhuma duração. Mas se no instante, não há duração e não há fluxo de tempo, como pode a flecha se deslocar?

Raciocinando hoje, diríamos, confirmando este pensamento dos Sofistas, que uma fotografia capta o instante, e assim nos apresenta um objeto, que está em movimento, como parado. Por outro lado, se o objeto está parado em um dado instante, então como explicar que em um outro instante seguinte ele possa estar em outra posição? Alguns filósofos, mantendo a coerência, chegaram a negar o movimento afirmando que o movimento não passava de uma ilusão e que nossa razão pode nos convencer que a idéia do movimento é uma idéia contraditória em si mesmo.

Neste sentido o filósofo Zenon elaborou seu célebre sofisma sobre Achiles e a Tartaruga. Este sofisma é o seguinte: o herói Achiles (herói da guerra de Tróia) é capaz de correr 10 vezes mais depressa que uma tartaruga. Ele aposta uma corrida com a tartaruga na qual ele dá uma vantagem à tartaruga, digamos 10m. Zenon mostra então que Achiles jamais alcançará a tartaruga mesmo correndo 10 vezes mais rápido que ela. Por quê? Porque quando Achiles percorrer os 10 metros que o separam da tartaruga, esta, andando 10 vezes mais devagar que Achiles, percorre 1m, assim ainda se encontra 1m na frente. Quando Achiles percorrer este metro a tartaruga já se distanciou 1 decímetro e continua na frente. Quando Achiles percorrer este decímetro a tartaruga percorreu um cm (centímetro) e encontra-se ainda na frente. E assim sucessivamente *ad infinitum* (indefinidamente). Em resumo, cada vez que Achiles percorre a distância que o separa da tartaruga, esta percorre um décimo desta distância e assim continua indefinidamente na frente.

Embora o sofisma de Zenon possa ser hoje refutado matematicamente com facilidade (ver problema) a questão da definição de uma velocidade instantânea continua problemática. Para medir uma velocidade, precisamos de um deslocamento realizado em um certo tempo. Precisamos, portanto, necessariamente de dois momentos, um momento final, e um momento inicial. É a diferença entre esta posição no momento final e no momento inicial, ou seja, o deslocamento, dividido pelo tempo gasto entre estes dois momentos, que pode nos dar uma velocidade. Como calcular uma velocidade se só dispomos de um momento?

Continuaremos esta discussão na próxima aula, mas antes temos que abordar alguns conceitos.

Conceito de função

Os alunos da Universidade Aberta, que seguramente fizeram um semestre de Cálculo I, seguramente sabem o que é uma função. Vamos aqui, antes de estudarmos o que é na cinemática a equação horária, recordar brevemente o conceito de função.

Vimos, na primeira aula, que quando os pitagóricos reconheceram que a diagonal de um quadrado não poderia ser expressa por um número (hoje diríamos um número racional) se o lado do quadrado fosse a unidade. Para eles o irracional $\sqrt{2}$ não era um número. Este problema foi de outra maneira, superado na própria Grécia antiga. Descobriram como se aproximar, tanto quanto se queira de um número irracional por meio de racionais (Eudoxo, Arquinedes).

No século XIX os matemáticos Cantor e Dedeking, postularam a correspondência entre uma reta e os números reais (racionais e irracionais). O que significa isto? Significa que se estabelecermos uma certa distância em uma reta, como unidade de medida e fixemos um ponto como o número zero (Ver Fig. [2-14]), então cada ponto da reta corresponde à um número real (racional ou irracional). Existe assim um ponto da reta correspondente ao número $\sqrt{2}$. Outro ponto correspondente ao número π.

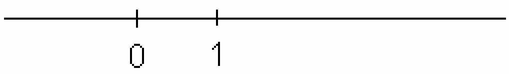

Fig. [2-14]

Posto isto, uma função é uma correspondência entre dois conjuntos de valores. Vejamos alguns exemplos.

1. $y = x^2$. Temos um conjunto de valores x aos quais corresponde um conjunto de valores y. Façamos uma tabela: Para $x = 0$ temos $y = 0$.

Para $x = 1$, temos $y = 1$.

Para $x = 2$, temos $y = 4$

Para $x = 3$, temos $y = 9$

Para $x = 4$, temos $y = 16$

Podemos tomar x assumindo qualquer número real.

Colocando os valores de x em uma reta numerada x e os valores de y em uma reta numerada y perpendicular a x, podemos traçar o gráfico desta função (vimos que este procedimento se deve à Descartes) (Ver Fig. [2-15]. O gráfico da função $y = x^2$ é uma parábola. O que chamamos de função é a correspondência, ou melhor, como se organiza esta correspondência entre o conjunto dos pontos em x e o conjunto dos pontos em y.

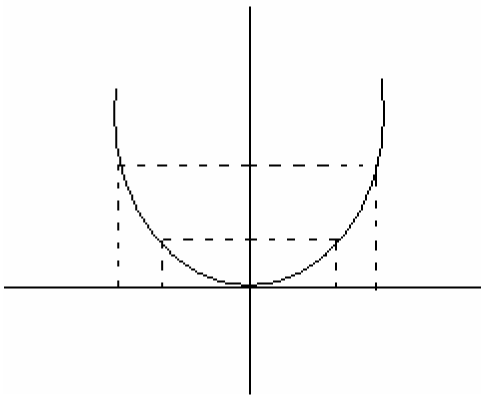

Fig. [2-15]

Equação horária

Voltaremos ao problema da velocidade instantânea, mas antes devemos nos instrumentalizar com alguns conceitos da cinemática. Vamos definir a equação horária.

Vimos que depois de Descartes e Galileu, todas as equações da Física são escritas em um sistema de referência. Em uma dimensão, basta um eixo orientado, com um escala, para localizar um ponto. Em duas dimensões um sistema de 2 eixos perpendiculares e em três dimensões um sistema de três eixos perpendiculares.

Para descrever o movimento devemos ter uma equação que relacione a posição do corpo com a variável tempo, ou seja, que dê em cada instante qual a posição do corpo (ou partícula) em questão. Estabelece-se assim uma função, a posição como função do tempo. Em uma dimensão esta função é:

$$\vec{x} = \vec{x}(f)$$

Esta função é a chamada "equação horária" ou "equação do movimento". Em uma dimensão só existem duas direções possíveis; a direção do eixo *X*, que é a direção positiva, e a direção contrária à do eixo *X* (lembrar que o eixo *X* é um eixo orientado). Então a equação vetorial $\vec{x} = \vec{x}(t)$ pode ser substituída por uma única equação escalar $x = x(t)$ que relaciona o módulo de vetor $\vec{x}$ com o tempo, uma vez que para determinar a direção basta o sinal: sinal + direção do eixo *X* (ou seja, direção positiva do eixo orientado *X*); sinal –, direção negativa do eixo orientado *X*.

É importante tomar consciência aqui, de que toda a discussão que fizemos sobre a distinção entre o vetor deslocamento e o espaço percorrido (que é uma grandeza escalar), ganha uma nova colocação, se temos um movimento retilíneo em uma única direção. Neste caso podemos ver que o espaço percorrido nada mais é que o módulo do vetor deslocamento. Para vermos isto, tomemos a Fig. [2-16]. O ponto x_1 no eixo X é localizado pelo $\overrightarrow{x_1}$ e o ponto x_2 é localizado pelo vetor $\overrightarrow{x_2}$.

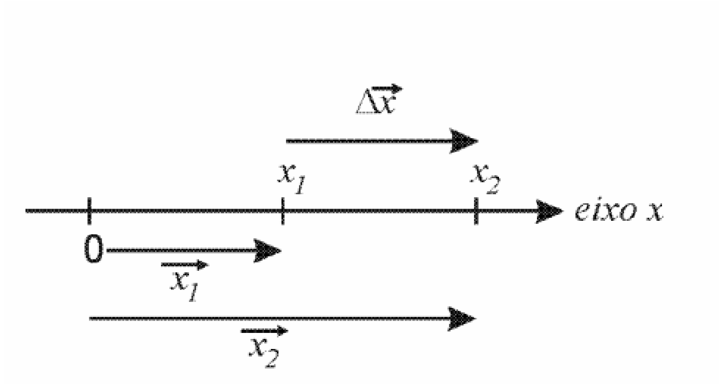

Fig. [2-16]

O vetor que localiza um ponto, seja na reta seja no plano, seja no espaço, é chamado vetor posição. O deslocamento do ponto x_1 ao ponto x_2 é dado pelo vetor deslocamento $\overrightarrow{\Delta x} = \overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}$. Vimos que o módulo de $\Delta\vec{x}$, ou seja, $|\,\Delta\vec{x}\,|$, é simplesmente a diferença entre vetores $\vec{x}_2$ e $\vec{x}_1$, no eixo X, ou seja, ainda $\Delta x = |\overrightarrow{\Delta x}| = x_2 - x_1$. Assim o espaço percorrido é o módulo do vetor deslocamento, o que como vimos não acontece em duas ou três dimensões. (É claro que espaço percorrido é um escalar e vetor deslocamento é um vetor).

Em uma dimensão, mesmo quando a direção do movimento varia, há ainda uma relação muito simples entre o deslocamento (vetor) e o espaço percorrido (escalar). Seja por exemplo (Fig. [2-17]) um corpo que sai de x_1, vai até x_2 e em seguida volta até x_3. O vetor deslocamento neste percurso é o que está mostrando na Fig. [2-17].

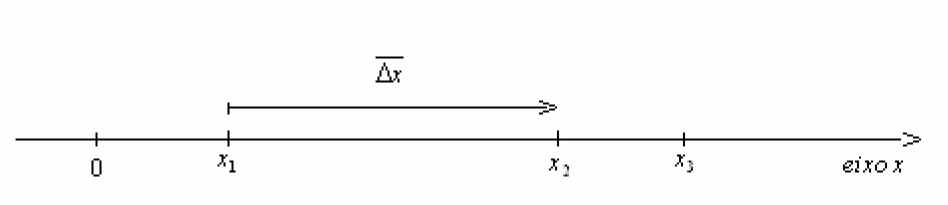

Fig. [2-17]

O seu módulo é:

$$\Delta x = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = x_3 - x_1$$

Para acharmos o espaço percorrido no percurso x_1, x_2, x_3, basta somarmos as distâncias, todas com sinal positivo. Assim em vez de somarmos $x_3 - x_2$ que é um valor negativo, somaríamos $x_2 - x_3$.

Então:

$$\Delta_1 = x_2 - x_1 + x_2 - x_3$$

Dado a clareza da direção dos vetores nos deslocamento unidimensionais, usa-se e trabalha-se frequentemente com a equação de movimento dada na sua forma escalar, a saber: $x = x(t)$.

No caso bidimensional a equação de movimento tem a forma:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad [2\text{-}9],$$

Onde $\vec{r}$ é o vetor posição que localiza um ponto no plano (Ver Fig. [2-18]).

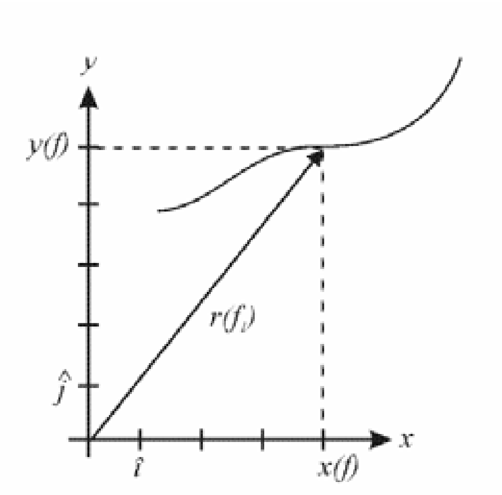

Fig. [2-18]

A equação pode também ser traduzida por duas equações escalares:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = x(t) \end{cases}$$

Temos:

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$

Em três dimensões a equação horária, em generalização óbvia fica:

$\vec{r} = \vec{r}(t)$

Onde:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \qquad [2\text{-}10]$$

E a equação vetorial [2-10] corresponde a três equações escalares:

$$\begin{cases} x = x(f) \\ y = y(f) \\ z = z(f) \end{cases}$$

RESUMO

Iniciamos esta segunda aula com a definição matemática de espaço linear (ou vetorial). Enfatizamos a importância desta definição porquanto os vetores usados em Física são um caso particular desta definição que é mais geral, ou seja, engloba também os vetores da Física, mas também vale para outros tipos de vetores.

Demos em seguida o conceito de dimensão em Física e mostramos a importância da análise dimensional.

Na segunda parte desta aula examinamos o conceito do ponto material e em seguida passamos à definição de velocidade média, vista como um vetor e mostrando que se distingue da fórmula "espaço percorrido por tempo".

Finalmente começamos a discutir a questão da definição de velocidade instantânea, mostrando como este problema preocupou a humanidade desde a Grécia antiga, e como os sofistas chegaram a negar a existência do movimento.

ATIVIDADES

Questionário e problemas

2.1 Espaços lineares e análise dimensional

1 - Quais são os dois tipos de grandezas da Física?Defina cada uma delas e dê exemplos

2 - O que se entende por espaço em matemática?
O que é um espaço dotado de uma estrutura matemática? O conjunto de vetores da Física é um espaço matemático? Como se chama este espaço matemático?

3 - Explique em que consiste dizer que a estrutura matemática de espaço vetorial é mais genérico que o conjunto de vetores da Física. Dê exemplos de outros espaços vetoriais que não sejam os vetores da Física.

4 - Quais são as duas operações que definem o espaço vetorial? Explique (inclusive traçando gráficos) em que consiste cada uma delas.

5 - A palavra escalar é sinônima de que? Explique o que é um espaço vetorial definido sobre o campo dos reais, e um espaço vetorial definido sobre o campo dos complexos.

6 - Mostre graficamente as propriedades 1, 2 e 3.

7 - Mostre graficamente as propriedades 4 e 5.

8 - O que é o vetor nulo? O que é o oposto?

9 - Quais as outras propriedades que decorrem da definição de espaço vetorial?

Vimos que além das oito propriedades definidas de um espaço vetorial, existem outras quatro que se deduzem destas, quer dizer, podem ser provadas a partir destas.

10 - Mostre o vetor $\vec{O}$ é único.

Sugestão: esta propriedade pode ser demonstrada por absurdo. Uma demonstração por absurdo começa admitindo a afirmação contrária à tese, e mostra que chegamos à uma contradição. No nosso caso começamos admitindo que existam dois vetores nulos $\vec{O}$ e $\vec{O}'$. Somamos o vetor $\vec{O}'$ ao vetor nulo $\vec{O}$ obtendo então $\vec{O}'$. Depois somamos o vetor $\vec{O}$ com o vetor $\vec{O}'$ obtendo então $\vec{O}$. Deixamos ao aluno a conclusão do raciocínio que é: o vetor $\vec{O}$ é único.

11 - Mostre que o $\overrightarrow{0A} = \vec{0}$, ou seja, o produto do número 0 por um vetor qualquer é o vetor nulo.

Sugestão: Tomamos o vetor $1\vec{A}$ e escrevemos $1\vec{A} = (1+O)\vec{A}$

Podemos escrever isto porque sabemos que 1+0 =1, ou seja, além das oito propriedades que se referem às duas operações definidoras do espaço linear, podemos também admitir as propriedades conhecidas dos números. Em seguida usamos a propriedade 4 (distributiva com relação à soma dos escalares). Deixamos ao aluno a conclusão a partir deste ponto.

12 - O oposto de um vetor é único

Sugestão: também provamos por absurdo. Sejam $\overrightarrow{A^{op}}$ e $\vec{A}'^{op}$ dois vetores diferentes ambos opostos de $\vec{A}$.

Escrevemos a soma

$\vec{A}'^{op} + \vec{A} + \overrightarrow{A^{op}}$

Se associarmos esta soma como: $\vec{A}'^{op} + \left(\vec{A} + \vec{A}^{op}\right)$ obtemos, como resultado da soma $\vec{A}'^{op}$ pois é oposto de $\vec{A}$. Em seguida associamos como $\left(\vec{A}'^{op} + \vec{A}\right) + \vec{A}^{op}$. Deixamos ao aluno a tarefa de concluir a demonstração

13 - O posto de $\vec{A}$ é -$\vec{A}$?

14) O que é o versor de um vetor?

15 - Dado um vetor $\vec{A}$, considere um sistema de eixos *X, Y* e os versores $\hat{i}$ e $\hat{j}$. Mostre como é possível decompor $\vec{A}$ segundo os eixos *X* e *Y*. Generalize para três dimensões.

16 - Mostre (em duas dimensões), como é possível somar dois vetores usando sua decomposição em um sistema de eixos *X, Y*.

2.2 CONCEITO DE PONTO MATERIAL E VELOCIDADE MÉDIA

17 - Explique o conceito de ponto material

18 - Dê a definição de velocidade média. É a velocidade média o "espaço percorrido pelo tempo gasto *m* recorre-lo"? Dê um exemplo.

2.3 REVISÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE VELOCIDADE

19 - Explique, com suas palavras, o raciocínio dos sofistas gregos, quando tentavam argumentar que o movimento é uma ilusão.

20 - Qual o sofisma da corrida de Achiles e a Tartaruga?

21 - Como você refutaria este sofisma?

22 - Em sua opinião, faz sentido dizer que existe uma velocidade instantânea? Qual o problema em definir uma velocidade instantânea?

23 - O que é a equação horária?

24 - Porque, trabalhando com o movimento unidimensional, podemos substituir a equação vetorial $\vec{x}(t)$, ou melhor, $\vec{x} = \vec{x}(t)$ pela equação escalar $x = x(t)$?

25 - A quantas equações escalares corresponde a equação horária em 2 dimensões (mostre quais são) e em três dimensões (mostre).

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SHANKAR, R. Principles of Quantum Mechanics. Segund edition (1994) Plenum Piess.

HALLIDAY, D.; RESMICK, R. Physics: Third Printing (1963). John Wiley & Sons, Inc.

CHAUÍ, M. Introdução à História da Filosofia. 5. reimpressão. Editora Brasiliense. 1977.

TIPLES, P. A. Física, 4. Ed. 1999. Livros Técnicos e Científicos S. A.