Aula 3

CINEMÁTICA. CONCEITOS BÁSICOS DO CÁLCULO INTEGRAL E DIFENRENCIAL

META

Situar a cinemática dentro das definições matemáticas do cálculo integral e diferencial. Mostrar a mútua interdependência dos dois assuntos; por um lado a cinemática tratada com o completo ferramental do cálculo diferencial e integral, por outro lado a cinemática como inspiradora da formulação do cálculo.

OBJETIVOS

Partindo da perspectiva histórica da questão do movimento, vista na 2ª aula, mostrar como foi constituída, já na modernidade com Newton, a formulação matemática de velocidade instantânea, que implicam na criação dos conceitos (através de definição matemática) de limite, derivada, integral indefinida e definida.

O objetivo maior desta terceira aula é explicar, muito mais do que a mera definição matemática, e os algoritmos do cálculo, como se vê nos cursos de matemática, mas sim a própria gênese destas definições e destes algoritmos e assim proporcionar ao aluno muito maior compreensão e segurança na aplicação do cálculo aos problemas de cinemática.

PRÉ-REQUESITO

O aluno deverá ter feito um semestre de Cálculo I.

É interessante, mas não indispensável, que esteja cursando, concomitantemente com Física A, Cálculo II.

INTRODUÇÃO

A Mecânica newtoniana, que estamos estudando neste curso de Física A, foi elaborada por Newton. Como já algumas vezes temos colocado, a Física é uma disciplina que consiste, basicamente, na matematização da natureza. Vimos que isto foi claramente colocado por Galileu quando afirmou que na construção de uma teoria física temos por um lado as deduções matemáticas e por outro as verificações experimentais. Ora, a matemática usada na disciplina mecânica é o cálculo diferencial e integral. Este cálculo foi inventado, ou melhor, chegou à sua formulação newtoniana exatamente pela necessidade que Newton sentiu de uma matemática capaz de resolver as questões que ele se propõe na sua Mecânica e Teoria da Gravitação Universal. Ele permeia assim toda a Mecânica, começando pela Cinemática.

Por isto nesta aula, que é o início da cinemática faremos um estudo aprofundado das noções básicas do cálculo diferencial e integral, que são as noções de limites derivada e integral. Mostraremos como foram elaboradas e chegaram à sua plena expressão matemática no esforço de uma compreensão e descrição axiomatizada da complexa questão do movimento.

3-1 A VELOCIDADE INSTANTÂNEA COMO DERIVADA

Voltemos ao problema da velocidade instantânea, e tomemos para situar o problema, o exemplo de uma bola em queda livre.

Problema:

"Seja uma bola, solta do alto de uma torre de *450 m* de altura. Encontre a velocidade da bola após *5 segundos*."

Solução:

Como já mencionamos foi Galileu que pela primeira vez estudou experimentalmente a queda livre de objetos, e equacionou, ou seja, deu a descrição matemática, deste movimento. Veremos em detalhe no próximo tópico, e na próxima aula este equacionamento, mas para o que no interessa agora, vamos somente mencionar que Galileu constatou que, desprezando a resistência do ar, a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo em que ele esteve caindo.

Chamando a distância percorrida após t segundo de $s(t)$ (medida em metros e t em segundos) então a Lei estabelecida por Galileu se traduz na seguinte equação (equação horária).

$$s(t) = 4{,}9t^2 \qquad [3\text{-}1]$$

que vem de $s(t) = \frac{1}{2}t^2$ onde $g = 9{,}8\,{}^{m}\!/_{s^2}$.

Como vimos, a dificuldade em encontrar a velocidade em um instante preciso (no caso, exatamente *5 segundos* após o lançamento da bola) está em lidarmos com um único instante de tempo ($t = 5seg$), ou seja, não temos um intervalo de tempo. Se calcularmos porém uma velocidade média usando um pequeno intervalo de tempo, digamos um décimo de segundo, a partir de 5 segundos teremos, uma velocidade média calculada no intervalo entre 5 seg e 5,1 seg que é

$$velocidade\ média = \frac{distância\ \ percorrida}{tempo\ \ decorrido} \text{ §2}$$

$$= \frac{s(5{,}1) - s(5)}{5{,}1 - 5{,}0}$$

$$\frac{(4{,}9)\ (5{,}1)^2 - (4{,}9)\ (5{,}0)^2}{0{,}1} = 49{,}99\,{}^{m}\!/_{s}$$

Esta velocidade, não é a velocidade em 5 segundos, mas é a velocidade média entre 5 seg e 5,1 segundos. Podemos ainda definir uma outra velocidade média: aquela entre 5 segundos e 5,01 segundos. Temos então:

$$velocidade\ média = \frac{s(5{,}01) - s(5)}{5{,}01 - 5{,}0}$$

$$velocidade\ média = \frac{(4{,}9)\ (5{,}01)^2 - (4{,}9)\ (5{,}0)^2}{0{,}01}$$

$$velocidade\ média = \frac{(4{,}9)\ (25{,}1001) - (4{,}5)\ (25{,}0)}{0{,}01}$$

---

§1 Vimos que no caso do movimento em uma dimensão, e em única direção, o espaço percorrido é o módulo do vetor deslocamento. Vimos também que como a direção está definida, podemos trabalhar com $|\vec{x}|$ (módulo do vetor $\vec{x}$).

$$velocidade\ média = \frac{122{,}99049 - 122{,}5}{0{,}01}$$

$$velocidade\ média = \frac{0{,}49049}{0{,}01} = 49{,}049$$

Calculando em seguida a velocidade média entre 5 segundos e 5,001 segundos vamos obter: $velocidade\ média = 49{,}0049$ (Todas estas velocidades estão dadas em m/s).

Podemos então construir a seguinte tabela:

Intervalo de tempo (em s)	**Velocidade média** (em m/s)
0,1	49,49
0,01	49,049
0,001	49,0049
0,0001	49,00049

Tabela [3-1]

Da tabela [6-1] fica claro que à medida que o intervalo de tempo Δt tende à zero, o valor da velocidade instantânea tende a *49 m/s*. Dizemos então que por definição a velocidade instantânea em *t = 5 segundos* é *49m/s*.

Vamos agora passar desta definição, dada examinando um problema particular, para a definição geral de velocidade instantânea (por enquanto ainda tratando com problemas unidimensionais de maneira a podermos trabalhar com os escalares que representam os módulos dos vetores).

Seja então $x = x(t)$ a equação horária de um movimento unidimensional. Queremos achar a velocidade instantânea em um determinado instante t. Como fizemos no caso da bola em queda livre, vamos considerar velocidades médias em intervalos de tempo cada vez menores, todos considerados a partir de t_1. Vamos então montar velocidades médias do tipo:

$$v_{méd} = \frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1} \qquad [3\text{-}2]$$

E vamos tomar a variável *t* cada vez mais próxima de t_1. Vamos, portanto ter uma sucessão de valores como os valores da tabela [6-1]. Examinando a tabela [3-1] tínhamos concluído que "era claro" que estes valores tendiam ao valor *49m/s*, e tínhamos definido *49m/s* com a velocidade instantânea e *t=5s*. Agora vamos chamar o valor para o qual tende a sucessão de quocientes da forma [3-2], quando tomamos quocientes com *t*, de limite da função $v_m(t)$ (função esta definida por [3-2]) quando t tende a t_1, e indicamos este limite como:

$$\lim_{t \to t_1} v_m(t) = \lim_{t \to t_1} \frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1}$$

Então, como a velocidade instantânea tinha sido definida, no problema da bola caindo, como o número para o qual tendia a sucessão de quocientes da tabela [3-1], chegamos agora à definição de velocidade instantânea dada por:

$$v = \lim_{t \to t_1} \frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1} \qquad [3\text{-}3]$$

A diferença $x(t) - x(t_1)$ é o que chamamos o incremento na posição (ou a variação da posição) quando o tempo passa de t_1 para t. E a diferença $t - t_1$ é o incremento no tempo. É costume designar estes incrementos por $\Delta x = x(t) - x(t_1)$ e $\Delta t = t - t_1$. Neste caso, podemos indicar:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad [3\text{-}4]$$

Este limite de incrementos é a derivada da função $x = x(t)$ em relação à variável x. Na notação de Newton esta derivada se indica por $f'(t)$ ou $x'(t)$ ou ainda $x'(t)$, e na notação de Leilurtz por $\frac{dx}{dt}$. Temos então:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t) \qquad [3\text{-}5]$$

Ou

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad [3\text{-}6]$$

Definimos, até aqui, o limite de quocientes construídos a partir do ponto $x(t_1)$. Quer dizer que definimos a derivada, e, portanto, a velocidade instantânea em $t = t_1$. Poderíamos ter feito as mesmas operações a partir de um outro t_2. Neste caso teríamos a derivada da função $x = x(t)$ em um outro ponto, no caso o ponto t_2, e teríamos a velocidade instantânea neste outro instante t_2.

Podíamos definir assim a velocidade instantânea em todos os pontos da trajetória. Então teríamos uma nova função da variável *t*, que é a função velocidade. A função velocidade associa à cada instante *t* do movimento, a velocidade instantânea neste instante. E temos uma nova relação ou função do tempo:

$$v = v(t) \qquad [3\text{-}7]$$

Quando escrevemos as fórmulas [3-4], [3-5] e [3-6] que se referiam à velocidade instantânea no instante *t*, poderíamos ter sido mais exatos e escrito.

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Big|_{t=t_1}$$

(que significa que a razão dos incrementos está sendo tomada a partir de um momento t_1).

E para as fórmulas [3-4] e [3-5] deveríamos escrever:

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Big|_{t=t_1} = x'(t) \Big|_{t=t_1} = x'(t_1) \qquad [3\text{-}7]$$

Ou

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Big|_{t=t_1} = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_1} \qquad [3\text{-}8]$$

Que significa a derivada calculada em $t = t_1$.

Reservamos então as notações:

$$v(f) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t) \qquad [3\text{-}9]$$

Para definir a função velocidade, que é a função derivada da função posição (ou seja, da equação horária), e que é a derivada e, portanto a velocidade instantânea, calculada em um instante *t* qualquer.

Limite

Vamos agora analisar com mais detalhe este conceito de limite. Examinando a tabela [3-1] concluímos que à medida que o intervalo de tempo vai se tornando cada vez menor, a velocidade média vai se aproximando cada vez mais de *49m/s*. Mas as expressões "tornar-se cada vez menor" ou se "aproximar cada vez mais", são expressões um tanto vagas. Pelo menos são vagas para a construção desta ciência tão precisa como é a matemática. Vamos então procurar uma definição mais exata e precisa de limite.

Observando a tabela [3-1] podemos ter certeza de que os números da segunda coluna (das velocidades médias) realmente vão se aproximar mais e mais do número *49*? Observando a correspondência entre os números das duas colunas, a resposta é que realmente podemos ter certeza. Antes de mais nada é preciso esclarecer que tomamos os números 0,1; 0,01; 0,001 da primeira coluna somente para tornar mais clara a relação entre os números das duas colunas. Poderíamos ter diminuído o intervalo de tempo de outra maneira. Por exemplo, 0,5; 0,1; 0,07; 0,02; 0,005 etc, e teríamos na segunda coluna também velocidades médias que se aproximaríamos de *49m/s*. Mas voltando a observação da tabela [3-1] vemos que na primeira linha, quando o intervalo de tempo é *0,1* a velocidade média é *49,49m/s*, ou seja, difere de *49m/s* por *0,49*. Vemos que para qualquer intervalo de tempo menor que *0,1* a diferença com relação a *49* seria então menor que *0,49*. Na segunda linha vemos que para qualquer intervalo de tempo menor que *0,01* a diferença com relação a *49* seria menor que *0,049*. Então se quisermos uma diferença com relação a *49*, menor que um número muito pequeno, digamos *0,00049*, basta escolher um intervalo de tempo menor que *0,0001*. Pois é exatamente este fato, de que dada uma diferença com relação ao número *49* tão pequena quanto se queira, ou arbitrariamente pequena, é possível determinar um intervalo de tempo, de tal ordem, que para qualquer intervalo de tempo menor que este, a diferença do valor da segunda coluna com relação no número *49* seja ainda menor que a primeira diferença dada, é precisamente este fato, que nos dá a certeza que quando o intervalo de tempo tende a zero o valor da segunda coluna tende a *49m/s*. E ao mesmo tempo, esta é definição de limite.

Recapitulando então. Dado um número tão pequeno quanto se queira, que geralmente indicamos pela letra grega ε (épslon), é possível determinar um outro número, que indicamos pela letra grega δ (delta), tal que se o intervalo de tempo for menor que δ, a velocidade média (o número da segunda coluna da tabela [3-1] vai diferir de 49, por um número menor que ε.

A velocidade média é uma função do tempo dado pela relação:

$$v_m = f(t) = \frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1} \qquad [3\text{-}10]$$

Escrevemos $\lim_{t \to t_1} f(t) = L$, e em palavras dizemos "o limite da função $f(t)$ para t tendendo à t_1 é o número L", se dado ε arbitrário (ou seja, tão pequeno quanto se queira) é possível determinar δ, tal que se $|\, t - t_1 \,| < \delta$ (e $t \neq t_1$, ou seja, t não coincide com t_1), então $|f(t) - L| < \varepsilon$.

Esta é a definição matemática de limite, que está na base de todo o Cálculo Integral e Diferencial.

Partimos então da equação formulada por Galileu para a queda livre dos corpos:

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

que, com $g = 9{,}8 \, {}^{m}\!/\!_{s^2}$ fica:

$$s(t) = 4{,}9 t^2$$

e definimos a velocidade instantânea em $t = t_1$ (no nosso problema inicial t_1 era $5s$), como sendo:

$$\lim_{t \leftarrow t_1} \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1} \qquad [3\text{-}11]$$

e vimos que [3-11] nada mais é que a derivada da função $s = s(t)$. Então

$$v(t_1) = \frac{ds}{dt}\Big|_{t=t_1}$$

Vejamos agora a interpretação geométrica desta derivada.

A função que estamos examinando é a equação horária de um corpo caindo com queda livre, dada por

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 = 4{,}9t^2$$

Consideramos então certo instante t_1 (no nosso caso 5seg), e passamos a considerar uma série de médias do tipo $\frac{s(t)-s(t_1)}{t-t_1}$ onde t é um instante posterior a t_1. Chamando $t-t_1$ de Δt, podemos escrever estes quocientes como:

$$\frac{s(t_1+\Delta t)-s(t_1)}{\Delta t}$$

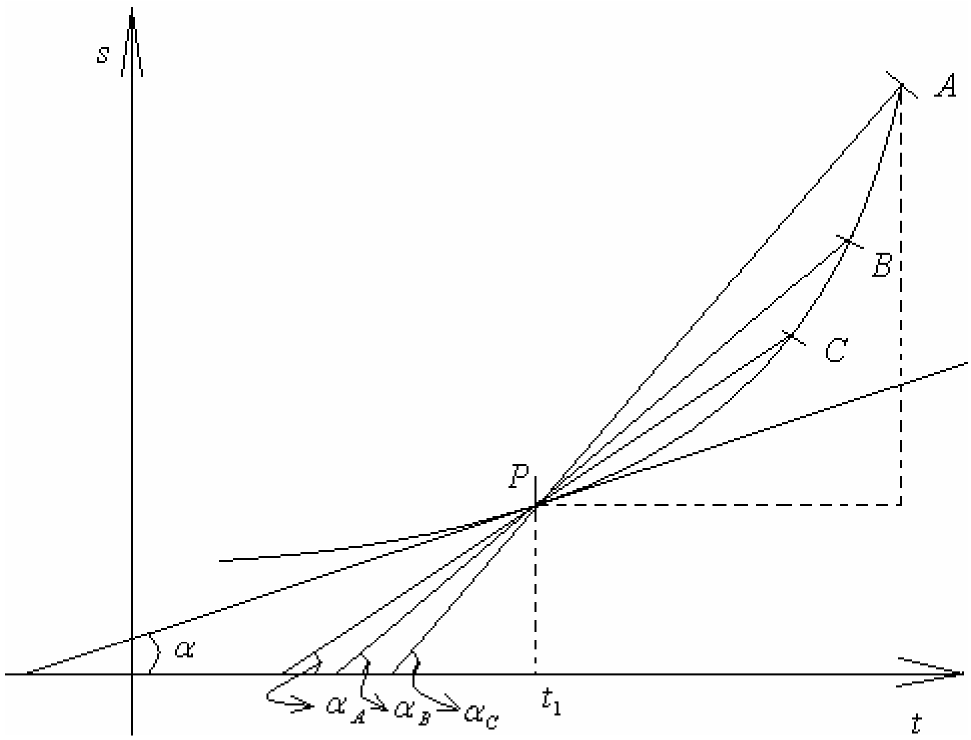

Fig. [3-1]

Seja na Fig. [3-1] o gráfico da equação horária $s = s(t)$. Vemos na figura que o quociente $\frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}$ é o coeficiente angular da reta que une *P* à *A*. Quando consideramos os outros quocientes, obtidos fazendo t se aproximar de t_1, ou seja, fazendo Δt tender a zero, vamos obter o coeficiente angular de outras secantes, obtidas por retas passando por *P* e por pontos da curva cada vez mais próximos de *P*. No limite, quando estes pontos tendem a *P* (que é o limite que definimos como $\left(\frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}\right)$ vamos obter o coeficiente angular da reta tangente à curva $s = s(t)$ no ponto *P*. Chamando $s(t_1 + \Delta t) - s(t)$ de Δs, o quociente pode ser escrito como $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, o que evidencia seu caráter de taxa de variação, ou seja, quanto varia a função $s(t)$ para uma variação Δt da variável independente (no ponto P_1). No limite para $\Delta t \to 0$ que é $\lim_{\Delta at \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \; |_{t=t}$, temos a taxa de variação instantânea da função $s(t)$ no instante t_1, que é também chamada de derivada da função $s(t)$,tomada no instante t_1. Vimos também que esta derivada é a velocidade instantânea em *t=t₁*. Newton indicou a derivada de $s(t)$ por $s'(t)$ e Leibuitz indicou por $\frac{ds}{dt}$. Temos então:

$$s'(t)\big|_{t=t_1} = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_1} = v(t)\big|_{t=t_1} = \lim_{\Delta t=0} \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=1}$$

A barra $| \; t = t_1$, indica que a operação é feita em $t = t_1$. Temos então a seguinte interpretação geométrica da derivada de uma função em um certo ponto: a derivada é o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto em questão.

Da mesma forma que vimos para velocidade instantânea, podemos calcular a derivada em outros pontos diferentes do instante t_1. Em cada instante (em cada ponto da variável t). Teremos um certo valor da derivada. Assim definimos uma outra função $s'(t)$ ou $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ que relaciona cada instante t com o valor da derivada de $s(t)$ neste instante. Definimos assim a função derivada, e vimos então no nosso exemplo que a função derivada da equação horária $s = s(t)$ é a função velocidade.

Usando as regras de derivação estudadas em Cálculo I. Temos no caso da equação horária $s(t)=4{,}9t^2$, que $v(t)=9{,}8t$ ou seja, recuperamos a conhecida fórmula $v(t)=gt$.

Vimos como na tentativa de definir de maneira precisa a noção de uma velocidade em um certo instante t_1, chegamos à noção de limite, pois definimos a velocidade em t_1, como o limite de uma série de velocidades médias calculadas entre t_1. A definição de limite está então na base da definição de derivada e consequentemente de velocidade instantânea. Chegamos à definição matemática de limite. Vamos agora examinar a noção de limite analisando o gráfico de funções, e ao mesmo tempo estudaremos um importante conceito correlato, o de continuidade de uma função. Seja então a função $y=f(t)$ dada pelo gráfico representando na Fig [3-2]. Vemos na figura, que quando a variável t vai se tornando próxima de t_1, a variável y vai se aproximando de L. Vemos ainda que dado um ε arbitrário, existe um correspondente δ tal que quando $|t-t_1|<\delta$ $(t\neq t_1)$ então $|f(t)-L|<\varepsilon$ ou ainda se $t_1-\delta<f<t_1+\delta$ então $L-\varepsilon<f(t)<L+\varepsilon$.

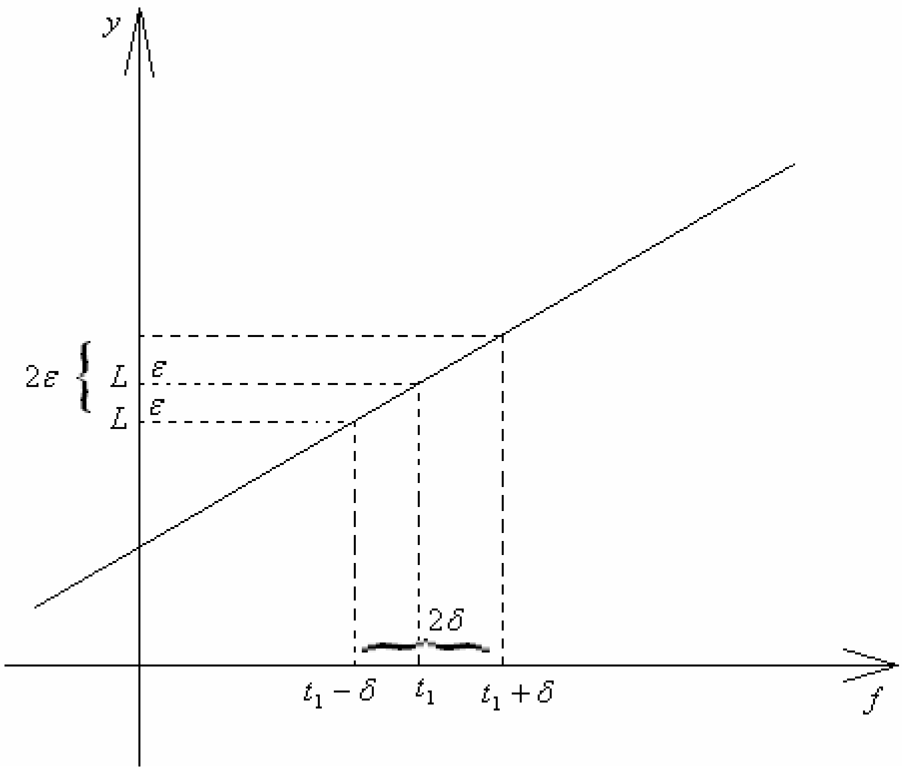

Fig. [3-2]

Pode acontecer que a função tenha limite em um ponto mas não seja definida neste ponto. Por exemplo mostrar que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

Solução: A função não está definida em $x = 1$ mas fazendo:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x + 1$$

Ficamos

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$$

Façamos o gráfico da função $y = x + 1$. Sabemos que esta é uma reta de coeficiente angular 1 e que intercepta o eixo y em 1 (basta fazer $x = 0$). Vemos que em $x = 1$ a função tem limite, e este limite é 2, que é o valor da função em $x = 1$.

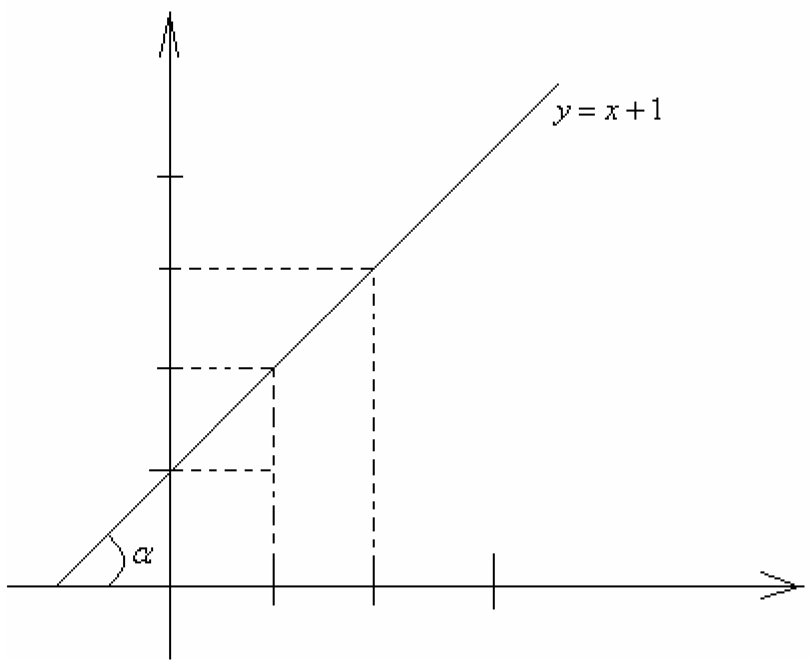

Fig. [3-3]

E quanto a função $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$?

Esta função coincide com a função $y = x + 1$ em todos os pontos, menos no ponto $x = 1$, onde ela não está definida. Mas ela tem limite (que é o mesmo 2) em $x = 1$, ou seja, a função $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ tem limite em $x = 1$.

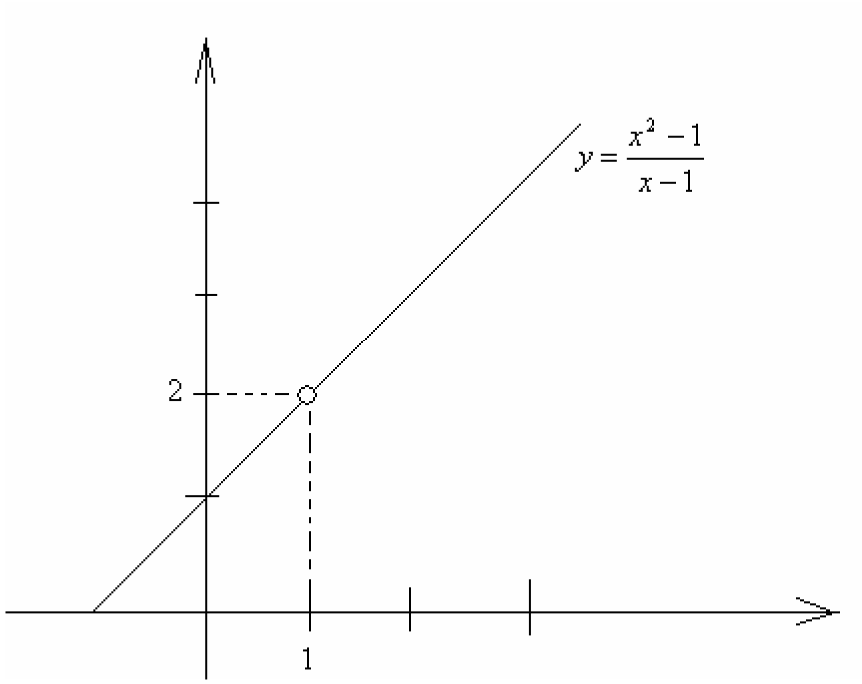

Fig. [3-4]

Mas não está definida em $x = 1$. (Indicamos esta não definição por um circulo vazio ○; e quando queremos explicitar que ela está definida em um certo ponto colocamos o círculo •.

Função contínua: "Uma função é contínua em um certo ponto, se seu limite quando a variável independente tende a este ponto, é o valor da função no ponto". Em outras palavras $y = f(x)$ é contínua em a se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Mas nossos exemplos acima vemos que $y = x + 1$ e contínua em 1; e $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ não é contínua em 1.

Análise de limite e continuidade pelo gráfico

Para terminar esta seção de limite, dentro da grande seção de velocidade instantânea e derivada, vamos mostrar graficamente algumas condições envolvendo limites e continuidade.

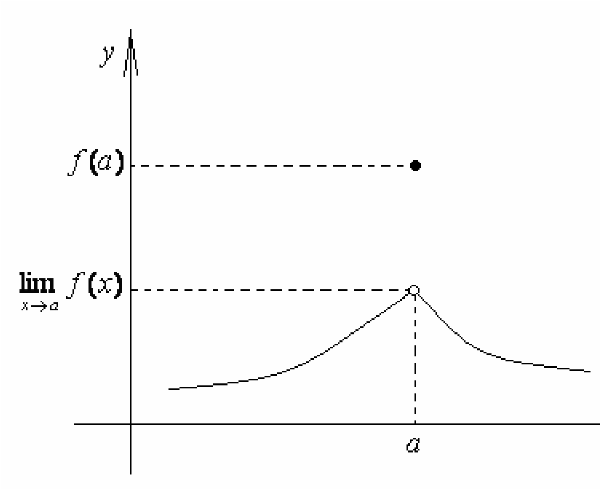

Fig. [3-5] a)

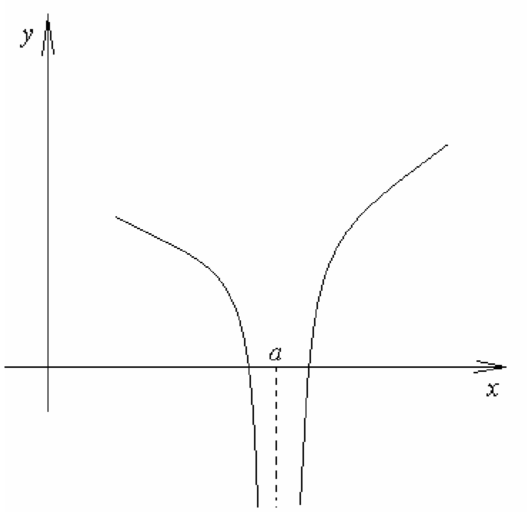

Fig. [3-5] c)

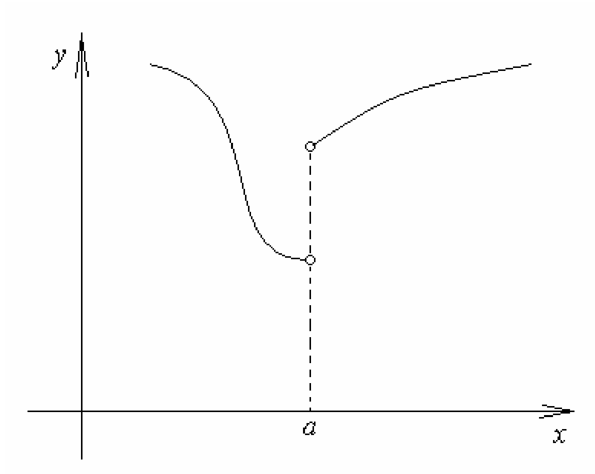

Fig. [3-5] d)

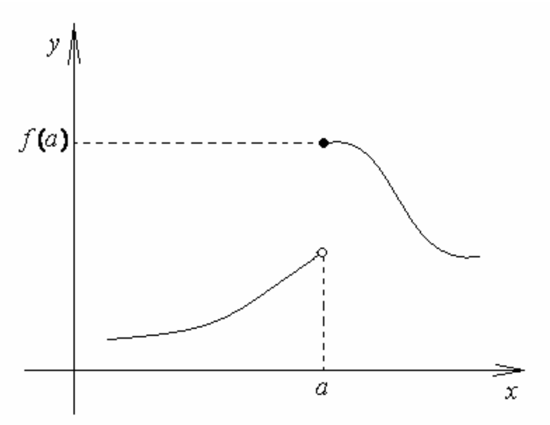

Fig. [3-5] b)

a) A função tem limite no ponto a (limite à direita e à esquerda são iguais), mas não é contínua em a pois $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

b) A função não é contínua em a, e não tem limite em a $\left(\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x) \right)$. Mas está definida com a.

c) A função não tem limite em a. (Porém escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$). Não está definida em a, e não é contínua em a.

d) A função não tem limite em a (limite à esquerda diferente do limite à distância), não é contínua em a e não está definida em a.

3.1 ACELERAÇÃO, MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Vimos como através da noção de limite, foi possível determinar a velocidade instantânea. Na verdade fizemos mais que isto – definimos velocidade instantânea dando um sentido matemático exato à esta noção da física. Então podemos saber em cada instante qual é o vetor velocidade instantânea, ou seja, sabemos o módulo e a direção do vetor velocidade. Temos então uma função do tempo – a velocidade como função do tempo. Quando associamos a cada instante um determinado vetor, estamos estabelecendo uma correspondência entre dois conjuntos de grandezas, os tempos e os respectivos vetores, e isto é uma função. Indicamos esta função por:

$$\vec{v} = \vec{v}(t) \qquad [3\text{-}12]$$

Aliás, quando nos referimos, de um modo geral, à velocidade, estamos nos referindo à velocidade instantânea, seja a velocidade em um dado instante, seja a função velocidade.

Como a velocidade pode variar de instante à instante, definimos o vetor aceleração média como:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad [3\text{-}13]$$

ou seja, a variação do vetor velocidade, pelo tempo em que se deu esta variação. Observamos que se trata da variação do vetor velocidade e não do módulo é um vetor; é o produto do escalar $\frac{1}{\Delta t}$ (onde $\Delta t = t_2 - t_1$) pelo vetor $\Delta\vec{v}$ (onde $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2(t_2) - \vec{v}(t_1)$).

Podemos agora definir aceleração instantânea. Estamos, ao tentar fazê-lo, diante do mesmo problema que tivemos para definir velocidade instantânea. Se a aceleração (média) é a variação do vetor velocidade pelo tempo em que ocorre esta variação, que sentido pode ter o quociente desta variação por um tempo zero? Ao mesmo tempo qual poderia ser esta variação, se variação é uma diferença da velocidade em dois instantes. Se só temos um instante só temos um valor da velocidade.

Mas agora já sabemos a solução para todos estes dilemas, e que é exatamente a mesma que usamos ao definir velocidade instantânea. Assim, aceleração instantânea é também o limite de uma seqüência de velocidades médias, quando fazemos a diferença de tempo em que são medidas estas velocidades médias, tender à zero. Escrevemos então:

$$\vec{a}(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_1)}{t - t_1} \qquad [3\text{-}14]$$

Exatamente como fizemos para a velocidade instantânea, depois de calcularmos este limite para um instante t_1, quer dizer, depois de definirmos a aceleração instantânea no instante t_1, podemos usar o mesmo procedimento, ou seja, tomar acelerações médias em intervalos de tempo cada vez menores, a partir de um outro instante, digamos t_2. Ou seja, a aceleração instantânea no instante t_2 é:

$$\vec{a}(t_2) = \lim_{t \to t_2} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_2)}{t - t_2} \qquad [3\text{-}15]$$

E novamente, quando falamos em aceleração, estamos nos referindo à aceleração em cada instante: à aceleração instantânea.

Pela definição de derivada, sabemos que limites como [3-14] ou [3-15] nada mais são que derivadas da função velocidade (velocidade instantânea) com relação ao tempo, tomadas em t_1 e t_2 respectivamente:

$$\vec{a}(t_1) = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{t=t} \qquad\qquad a\ (t_2) = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{t=t_2} \qquad\qquad [3\text{-}16]$$

Se considerarmos a função velocidade instantânea, $\vec{a} = \vec{a}(t)$, temos que ela é simplesmente a derivada da função velocidade, tomada em um tempo qualquer;

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad\qquad [3\text{-}17]$$

Mas vimos que a função velocidade instantânea é por sua vez derivada da função posição $\vec{r} = \vec{r}(t)$ §3

Ou seja:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ora, então como $\vec{a}(f) = \frac{d\vec{v}}{dt}$ temos que

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \qquad\qquad [3\text{-}18]$$

ou seja, a aceleração (função aceleração instantânea) é a derivada segunda da função posição com relação ao tempo.

Se a aceleração não for constante, podemos achar a variação da aceleração em um certo intervalo Δt de tempo que é a variação média da aceleração. (Não há um termo especial para esta grandeza). Podemos também calcular a taxa de variação instantânea da aceleração por tempo; definimos assim a derivada da aceleração com relação ao tempo, ou seja, $\frac{d\vec{a}}{dt}$

---

§2 Tínhamos usado $x = x(t)$, pois trabalhamos com o movimento unidimensional ao longo do eixo *x*.

Em geral o vetor posição é $\vec{r}$. Veremos adiante com mais cuidado a definição matemática de derivada de um vetor.

Vemos que sendo $\vec{a}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ então temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$$

ou seja podemos definir derivadas de ordem mais altas da equação horária. Se a equação horária for dada por um polinômio em *t*, é fácil ver que podemos ter derivadas de ordem igual ao grau do polinômio (as derivadas seguintes são nulas).

Historicamente tem grande importância o estudo de movimentos com aceleração constante, pois este é o movimento de queda livre estudando por Galileu e aí está um dos primórdios da mecânica. De fato Galileu foi o primeiro a perceber que desprezando a resistência do ar, todos os corpos na superfície da Terra caem com uma mesma aceleração constante. Vamos então examinar em maior detalhe o movimento retilíneo com aceleração constante, e vamos empregar nossos resultados a problemas de queda livre sem resistência do ar.

Movimento retilíneo uniformemente acelerado

No caso do movimento retilíneo tanto o vetor deslocamento, quanto o vetor velocidade e o vetor aceleração se encontram em um único eixo (que podemos chamar de eixo *x*) e tem somente duas possíveis direções: a do sentido positivo do eixo e a do sentido negativo. Então, como já observamos acima, podemos encontrar relações entre os escalares *x, v* e *a* direção é dada pelo sinal destes escalares (escalar = número): sinal positivo, direção positiva do eixo *x*, sinal negativo direção negativa deste eixo.

Se queremos tratar o movimento com aceleração constante, devermos notar que neste caso a aceleração instantânea é igual ao valor da aceleração média, qualquer que seja o intervalo de tempo considerado, e quaisquer que sejam os instantes tomados no cálculo desta aceleração media. Temos então:

$$a = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad [3\text{-}19]$$

onde *a* é a aceleração média tomada entre t_1 e t_2 (sendo no caso t_1 e t_2 dois instantes quaisquer), mas é ao mesmo tempo a aceleração instantânea em qualquer instante uma vez que esta aceleração instantânea é constante. Assim.

$a = constante = a_m = a(t)$

(onde a_m é aceleração média e *a(t)* é aceleração instantânea em um instante qualquer *t*). Como a relação [3-19] vale para quaisquer tempos, podemos tomar t_1 com sendo o instante zero (t_1=0) e t_2 é um instante qualquer arbitrário que chamaremos *t*. Seja v_o a velocidade em *t=0* e *v* a velocidade neste instante arbitrário (qualquer) que chamamos *t*. Então podemos escrever:

$$a = \frac{v - v_0}{t - 0},$$

donde então

$$v = v_0 + at \qquad [3\text{-}20]$$

Esta equação [3-20] nos diz que a velocidade *v* no tempo *t* é a soma da velocidade v_o (a velocidade que a partícula tinha quando se começou a contar o tempo, isto é, a velocidade inicial), mais o aumento da velocidade durante o tempo *t*. Nas figuras [3-6] a, b e c temos os gráficos da aceleração (a), da velocidade (b) e do deslocamento (c), como função do tempo.

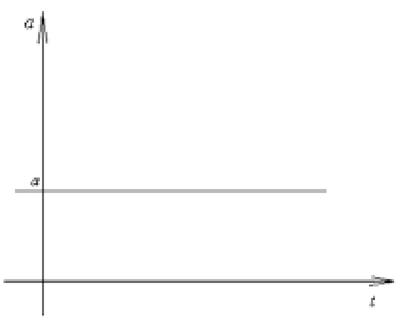

Fig [3-5] a)

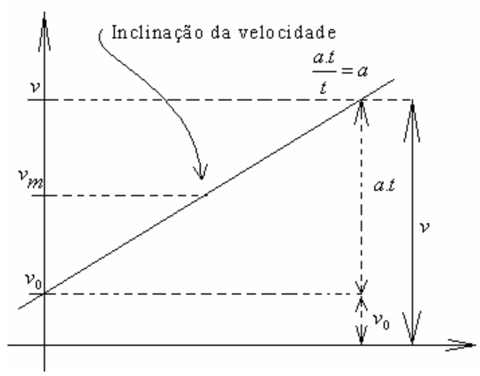

Fig [3-5] b)

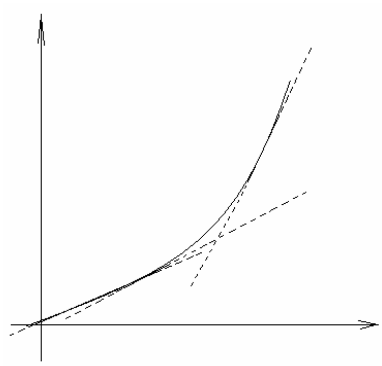

Fig [3-5] c)

Observamos que a inclinação da velocidade é constante. Este fato está de acordo com a equação $\frac{dv}{dt} = a$. De fato a derivada de uma função (em qualquer ponto) é a inclinação da reta tangente à curva neste ponto. Como no caso de $v = v(t)$ a curva é uma reta, a tangente em qualquer ponto é a própria reta e o coeficiente angular da reta é a derivada, ou seja, a aceleração, que é uma constante.

Quando a velocidade varia uniformemente com o tempo, como é o nosso caso, a velocidade média, tomada em qualquer intervalo de tempo é a metade da soma da velocidade no inicio mais a velocidade no final. Quer dizer, a velocidade média é sempre (neste caso) a média da velocidade inicial e final, assim a velocidade média entre $t = 0$ e $t = t$ é:

$$v_m = \frac{v_o + v}{2}, \qquad [3\text{-}21]$$

como se pode ver no gráfico. Note que [3-6]c) não seria verdade se a aceleração não fosse constante, pois neste caso, o gráfico de $v = v(t)$ não seria uma linha reta. No gráfico [3-7], podemos ver que quando *t=0,* o deslocamento *x* também é nulo (Isto é um caso específico, poderíamos também ter um valor v_o em *t=0*, o que significaria que teríamos passado a contar o tempo quando a partícula já teria percorrido a distância x_o). Por outro lado, sendo a velocidade média a razão entre o deslocamento e o tempo, vimos no gráfico da Fig. [3-6]c) que:

$$v_m = \frac{x - 0}{t - 0} = \frac{x}{t},$$

(pois em *t=0 temos x=0).* Então

$$x = v_m t \qquad [3\text{-}22]$$

Substituindo nesta equação [3-22] o valor de v_m calculado [3-21] temos

$$x = \frac{v_0 + v}{2} t \qquad [3\text{-}23]$$

Se em seguida substituirmos, nesta equação [3-23] o valor de *v* que tínhamos chegado em [3-20], a saber:

$$v = v_o + at$$

Ficamos com

$$x = \frac{v_o + v_o + at}{2} t$$

ou seja a conhecida equação

$$x = v_o t + \frac{1}{2} at^2 \qquad [3\text{-}24]$$

A condição v_o, que é a velocidade no instante zero, é chamada de condição inicial. Temos outra condição inicial que é a posição no instante zero. Na nossa dedução, feita a partir do gráfico da Fig. [3-6]c) admitimos x_o em *t=0.* então, no caso mais geral a equação [3-24] tem a forma

$$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2 \qquad [3\text{-}25]$$

É importante notar a consistência dimensional da equação [3-25]. À esquerda (no membro da esquerda) temos *x*, portanto, uma grandeza de dimensão [L]. O primeiro termo do membro direito é x_o, portanto de dimensão [L]. O segundo termo é $v_o t$, portanto, de dimensão $\frac{[L]}{[T]}[T] = [L]$. E o terceiro termo é $\frac{1}{2} at^2$. A constante $\frac{1}{2}$ é uma constante adimensional. Então:

$$\left[\frac{1}{2} at^2\right] = \frac{[L]}{[T]^2}[T]^2 = [L]$$

Finalmente uma última relação muito útil na solução de problemas de cinemática envolvendo aceleração constante é a equação de Torricelli que passamos a deduzir. Para tanto partimos de $v = v_o + at$ e isolamos *t*, ficamos com

$$t = \frac{v - v_o}{a} \qquad [3\text{-}26]$$

Em seguida substituímos este vetor de *t* na equação [3-23], a saber, $x = \frac{v_o + v}{2} t$, e com isto ficamos com:

$$x = \frac{v + v_o}{2} \frac{v - v_o}{a},$$

Donde

$$x = \frac{v^2 - v_o^2}{2a}$$

E então

$$2ax = v^2 - v_o^2$$

Ou seja, rearranjando os termos

$$v^2 = v_o^2 + 2ax \qquad [3\text{-}27]$$

Exemplo 1: Seja a equação horária do movimento de uma partícula dada por $x(t) = 3t^2 + 2t + 1$, onde *x* é dado em metros e *t* em segundos. Encontre:

a) As condições iniciais e v_o (quer dizer, o valor do deslocamento *x* em *t=0*, e a velocidade em *t=0).*

b) A aceleração do movimento

Solução: Fazendo *t=0* obtemos *x(0)=1*, então $x_o = 1m$. Temos então $v(t) = \frac{dx}{dt} = 6t + 2$, então em *t=0* temos *v(0) = 2*. Logo $v_o = 2 {m}/{s}$. Finalmente.

$a = \frac{dv}{dt}$. Então *a=b*, ou seja, a aceleração pedida é $a = 6 {m}/{s^2}$.

Observar que se a equação horária fosse dada por um polinômio de grau maior que o segundo, a aceleração não seria uma constante, mas uma função de *t* (verificar isto!) Se fosse um polinômio de primeiro grau em *t* a aceleração seria nula Verificar a equação horária não precisa ser necessariamente um polinômio em *t*. Mas precisa ser uma função que tenha derivada em toda parte (Procure explicar porque!)

Exemplo 2: A velocidade de um automóvel viajando em direção oeste (leste para oeste) é reduzida uniformemente de 45 km/hora para 30km/hora em uma distância de 264m. Pede-se: a) qual o módulo e a direção da aceleração? (assumida como constante)

b) Quanto tempo se passou durante esta desaceleração?

c) Assumindo que o carro continuou se deslocando à mesma taxa, quanto tempo se passará até que ele passe da velocidade de 45km/h até o repouso?

Solução: a) Usando Torricelli temos

$$a = \frac{v^2 - v_o^2}{2x}$$

$$a = \frac{\left(30\,{}^{km}\!/\!_{h}\right)^2 - \left(45\,{}^{km}\!/\!_{h}\right)^2}{2(264m)} = -0{,}164 m/s^2$$

Obteremos *a* negativo e que implica que o vetor aceleração tem direção oeste-leste.

b) Como $x = \frac{v_0 + v}{2} t$ (aceleração constante)

$$t = \frac{2x}{v + v_o} = \frac{2(0{,}264m)}{(45 + 30)\,{}^{km}\!/\!_{hora}} = \frac{0{,}528}{20{,}83} = 25{,}35s$$

c) De $v = v_o + at$ temos $t = \frac{v - v_0}{a}$ então

$$t = \frac{(0 - 45)\,{}^{km}\!/\!_{h}}{a\,{}^{km}\!/\!_{h^2}} = 76{,}22$$

Calculada na parte *a t=0*

3.3 INTEGRAL DEFINIDA. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Integral definida

Nas seções anteriores vimos como é possível, dada a equação horária, obter por derivação as funções $\vec{v} = \vec{v}(t)$ e $\vec{a} = \vec{a}(t)$, bem como, se pudermos ter derivadas de maior ordem não nulas, a taxa de variação instantânea da aceleração, a taxa de variação instantânea, da função variação instantânea da aceleração, e assim por diante.

Vamos agora considerar o problema inverso. Dada a equação da aceleração $\vec{a} = \vec{a}(t)$ achar $\vec{v} = \vec{v}(t)$ e em seguida $\vec{x} = \vec{x}(t)$. Trabalharemos ainda em uma dimensão, deixando para a próxima aula o movimento em duas dimensões. Recordemos para tanto, alguns elementos de cálculo integral.

O cálculo integral e o cálculo diferencial vinham se desenvolvendo como disciplinas separadas, desde a antiguidade Grega. O cálculo diferencial se inspirava em problemas como a tangente e a velocidade instantânea, e o cálculo integral se preocupava com problemas como a área das figuras.

Um dos mais antigos e famosos problemas de cálculo integral é o problema da "quadratura do círculo", ou seja, do cálculo da área de um círculo dado o seu raio. Este problema foi resolvido por Eudoxo (300 A.C) (trezentos anos antes de Cristo), da seguinte maneira. Considerou uma seqüência de polígonos inscritos em uma circunferência (polígonos regulares).

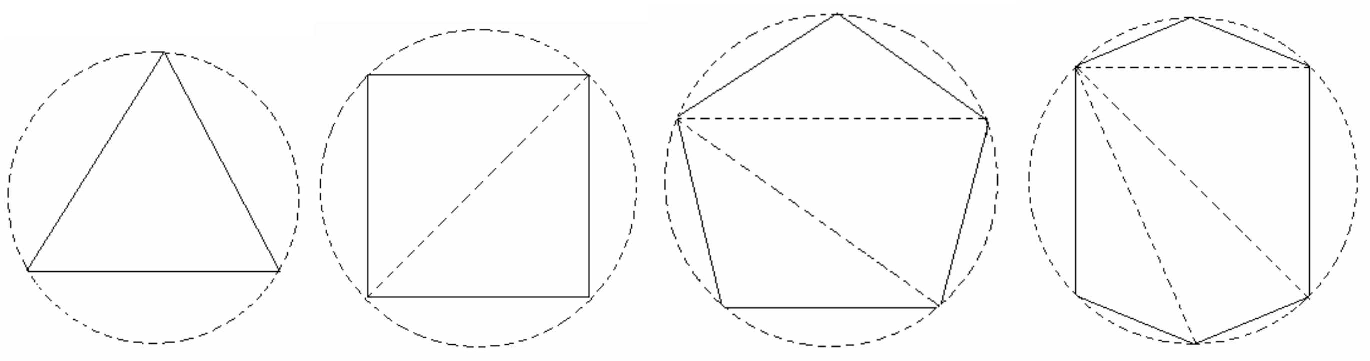

Fig [3-6]

É muito fácil calcular a área de qualquer polígono: basta subdividi-lo em triângulos (Pois sabemos a área do triângulo $\dfrac{bh}{2}$.

É fácil ver que a medida que aumentamos o números de lados dos polígonos, a área dos mesmos se aproxima cada vez mais da área do círculo, Endoxo "postulou" então que a área do círculo seria precisamente o número ao qual tenderia a sequência de áreas dos polígonos, quando o número de lados tendesse à infinito. Mas ele não postulou isto baseado apenas na intuição. Na verdade, sem usar esta linguagem moderna Eudoxo definiu o limite. Seu raciocínio foi o seguinte. Seja *A* a área do círculo. Consideremos um número *A'*, tão próximo de *A* quanto se queira, isto é, tal que a diferença *A-A'* seja menor que um número ε arbitrário tão pequeno quanto se queira. Em equação colocaríamos, $A - A' < \varepsilon$. Então existe um número *N*, tal que para todo polígono com número de lados *n*, sendo *n*>*N*, a área deste polígono vai ser tal, que a diferença entre a área do círculo e a área deste polígono é menor que ε. Em equação teríamos $A - P_n < \varepsilon$ onde P_n é a área de um polígono de *n* lados. Mas isto é precisamente o que depois de Leibniz e Newton entendemos por limite. Em equação isto é

$$\lim_{n \to \infty} P_n = A$$

Onde *A* é a área do círculo e P_n a área de um polígono de *n* lados. Então na base da definição de integral, está a noção de limite, da mesma forma que na base da definição de derivada também está a noção de limite. Mas foi somente com Newton e Leibniz que estes dois cálculos, o diferencial e o integral, foram vistos como dois aspectos complementares de um mesmo problema. Isto fica claro com o Teorema Fundamental do Cálculo, que iremos recordar, e para o qual o professor de Newton, Isaac Barrow também deu importante contribuição.

Recordemos inicialmente o conceito integral definida. Seja Fig. [3-7] o gráfico da equação $v = v(t)$ como $\vec{v}$ constante.

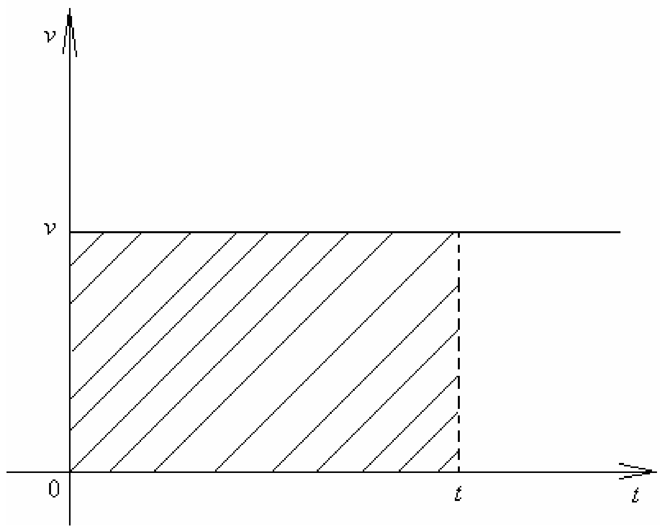

Fig [3-7]

Trabalhando em uma dimensão vamos abolir a indicação de vetor (embora saibamos que se trata sempre de grandezas vetoriais). Na Fig [3-7], vemos que a área sombreada é inumericamente igual ao espaço percorrido pela partícula a partir do instante zero até o instante t. De fato $x = vt$. Se porém *v* não for uma função constante de *t*, como poderíamos calcular o deslocamento *x* desde o instante zero até o instante *t*?

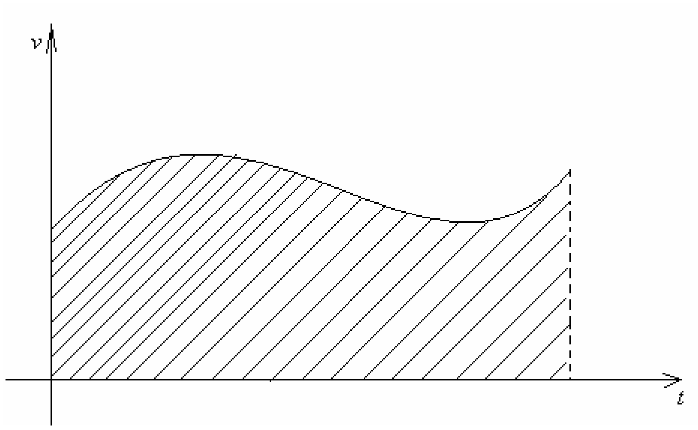

Fig [3-8]

Na Fig. [3-8] está representado o gráfico da função $v = v(t)$. É razoável supor, por analogia com nosso raciocínio fundamentado no gráfico da função $v = v(t)$ quando $v(t)$ era constante, que o espaço percorrido também vai ser a área compreendida entre o gráfico da função e o eixo *t* (área sombreada na Fig. [3-8]. Mas como calcular agora esta área? A solução é dividir o intervalo [0,*t*] no eixo *t* em inúmeros intervalos e, tomando em cada intervalo um ponto qualquer (ponto amostral) construir retângulos cuja largura é a largura do intervalo e cuja altura é a altura do valor de *v*, tomado no ponto amostral.

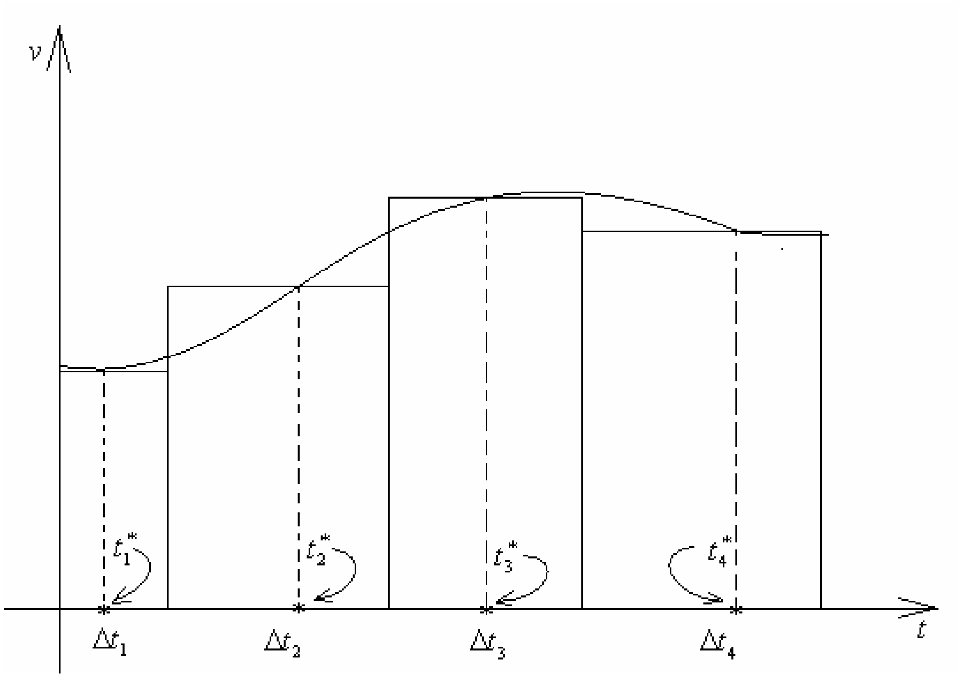

Fig [3-9]

Na Fig. [3-9] dividimos o espaço [0, *t*] em quatro intervalos: $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \Delta t_4$. Cada um destes intervalos contém um ponto amostral respectivamente $t_1^*, t_2^*, t_3^*, t_4^*$. Construímos então os 4 retângulos mostrados na Fig [3-9]. Vemos que se a velocidade no intervalo Δt_1 fosse constante e igual ao valor $v(t_1^*)$, então a área deste primeiro retângulo que é $v(t_1^*)\Delta t_1$ representaria o espaço percorrido no intervalo de tempo Δt_1. O mesmo aconteceria para os retângulos de base Δt_2 ,Δt_3 e Δt_4. Então (sempre no caso da velocidade ter estes valores constantes $v(t_1^*)$, $v(t_2^*)$, $v(t_3^*)$, $v(t_4^*)$ em cada um destes retângulos) a soma $v(t_1^*)\Delta t_1 + v(t_2^*)\Delta t_2 + v(t_3^*)\Delta t_3 + v(t_4^*)\Delta t4$ seria o deslocamento da partícula no intervalo *0* |——| *t.* Ao mesmo tempo vemos que esta soma de áreas dos retângulos, *n* aproxima um pouco da área sob a curva $v(t)$ mostrada na Fig. [3-9].

Podemos ver que se dividirmos o intervalo *0* |——| *t* em um número maior de partes, e construido nossos retângulos desta maneira que acabamos de descrever, a área obtida somando estes retângulos vai se aproximar mais da área sob a curva $v(t)$. Isto pode ser visto de forma muito clara, examinando as figuras [3-10] e [3-11].

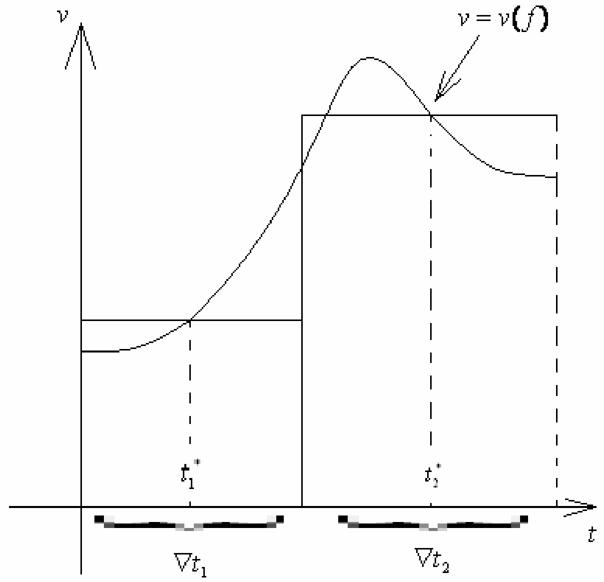

Fig. [3-10]

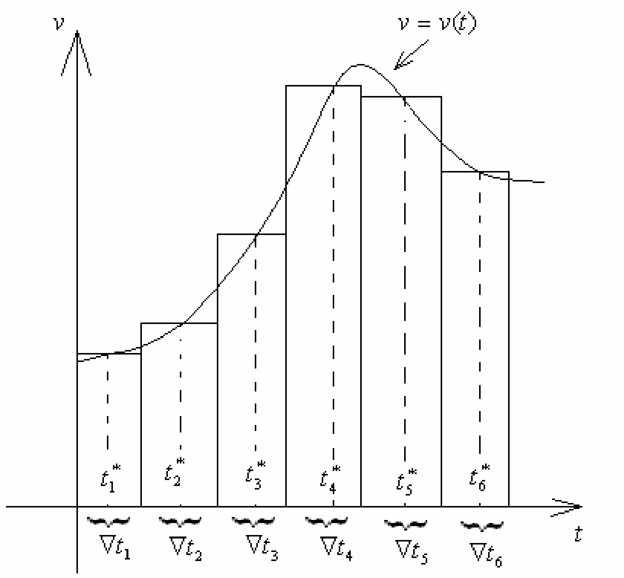

Fig. [3-10]

Podemos ver que a soma das áreas dos retângulos da Fig. [3-11] se aproximam muito mais da área sob a curva $v = v(t)$ que a soma dos dois retângulos da Fig. [3-10]. Indicamos esta soma, para o caso de *n* divisões do intervalo *0* |——| *t,* como:

$$\sum_{i-1}^{n} v(t_i^*)\Delta t_i \qquad [3\text{-}28]$$

A soma [3-28] é chamada Soma de Reimann, em homenagem ao grande matemático alemão Bernhard Reimann (1826-1866). Reimann foi quem construiu a noção de integral definida desta maneira, que estamos colocando. Vimos que quanto maior for o número de divisões, e, portanto, quanto menor foi a largura de cada intervalo Δt_i da divisão, mais a soma da área dos retângulos se aproxima da área do gráfico da função. E no nosso caso, que tomamos a função $v = v(t)$, mais a soma destas áreas se aproxima do deslocamento total *t* entre os instantes zero e *t*. Definimos então:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i-1}^{n} v(t_i^*)\Delta t_i = A, \qquad [3\text{-}29]$$

onde A é a área sob a curva. (Melhor explicando a área compreendida entre a curva e o eixo *t*, e pelo eixo *v*, e o segmento que uma o ponto *t* ao valor $v(t)$ – a figura sombreada em [101-1. Ao mesmo tempo este limite é a definição da integral definida da função $v(t)$ entre os extremos de integração *0* e *t*, que indicamos por:

$$\int_o^t v(t)dt \qquad [3\text{-}30]$$

Temos então

$$\int v(t)dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v(t_1^*)\Delta t_1 = A \quad [3\text{-}31]$$

Onde *A* é a área sob a curva $v(t)$ e é (neste caso) o espaço percorrido pela partícula entre o instante *0* e o instante *t*.

Observações: i) Tal como acontecia no caso da derivada, é o próprio conceito de limite que nos faz acreditar, com certeza matemática, que a área sob a figura (sob a curva) $v(t)$ é realmente o número A, e ao mesmo tempo que este é o espaço percorrido pela partícula entre os instantes *t=0* e *t*. Porque quando dizemos que quando o limite para *n* tendendo a infinito da soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} v\left(t_i^*\right)\Delta t_1$ é o número *A*, estamos dizendo que dado um ε arbitrário é possível encontrar um *N* tal que para *n*>*N* a diferença entre a soma $\sum_{i=1}^{n} v\left(t_i^*\right)\Delta t_i$ e o número *A* é menor que ε.

ii) A escolha dos pontos amostrais t_i^* dentro de cada intervalo Δt_i é arbitrário. Podemos ver isto, lembrendo que estamos tomando o limite quando $n \to \infty$ e neste caso $\Delta t_i \to 0$. Poderíamos definir a soma de Riemann de maneiras diferentes: tomando o ponto amostral como a fronteira esquerda, ou a fronteira direita do intervalo Δt_i. Novamente, como $\Delta t_i \to 0$ os resultados, no cálculo do limite seriam os mesmos.

iii) É interessante notar que esta definição de Integral Definida como colocada por Riemann, é muito parecida com a formulação de Eudoxo sobre a "quadratura do circulo". Mas Eudoxo formulou o problema específico do círculo. Embora a noção mesma de limite seja exatamente a mesma, a formulação de Riemann, com o desenvolvimento posterior, estende a solução para qualquer área e qualquer volume.

Teorema Fundamental do Cálculo

Um dos maiores feitos dos construtores do Cálculo Integral e Diferencial moderno (Leibniz e Newton foi o de terem entendido a unidade entre estes dois conceitos, o de derivada e o de integral que vinham até então sendo trabalhados como dois problemas de natureza diversa. Mais que isto – como duas áreas diferentes da matemática.

O Teorema Fundamental de Cálculo estabelece que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad [3\text{-}32]$$

onde a função $F(x)$ é tal que $\frac{dF}{dx} = f(x)$. A função $F(x)$ é chamada de função primitiva da função $f(x)$, ou também de antiderivada. É a função cuja derivada é $f(x)$. Os dois conceitos, de derivada e de integral estão unidos, na medida que a integral definida da função $f(x)$ entre os extremos de integração *a* e *b*, nada mais é que a diferença dos valores em *a* e em *b*, de uma função cuja derivada é $f(x)$.

Convem recordar a demonstração deste Teorema. Para tanto recomendamos o livro, Cálculo de James Stewart (Vol. I – tem tradução em português).

A função cuja derivada é $f(x)$ e que como vimos é chamada de primitiva, ou antiderivada de $f(x)$, tem também o nome de integral de $f(x)$, ou integral indefinida e indica-se por $\int f(x)dx$ (sem os extremos de integração). Como a derivada de uma constante é *0*, se $F(x)$ é uma primitiva (antiderivada) de $f(x)$, ou seja, uma função cuja derivada com relação a *x* é $f(x)$, então $F(x)+C$ onde *C* é uma constante qualquer, também é uma primitiva. Vale então para a integral indefinida:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad [3\text{-}33]$$

onde novamente $F(x)$ é a antiderivada (ou primitiva) e *C* é uma constante arbitrária.

Aplicando estes resultados para a função velocidade temos:

$$\int_{1}^{t_2} v(t)dt = x(t_2) - x(t_i) \qquad [3\text{-}34]$$

Pois sabemos que $\frac{dx}{dt} = v$.

Tínhamos trabalhado em $t_1 = 0$. Então:

$$\int_0^t v(t)df = x(t) - x_0 \qquad [3\text{-}35]$$

onde x_0 é o valor do deslocamento em $t = 0$, ou seja, $x_0 = x(0)$.

Como a derivada da velocidade é a aceleração, temos fórmulas análogas para obter a equação $v = v(t)$ (a equação da velocidade) a partir da equação da aceleração $a = a(t)$.

São elas:

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = v(t_2) - v(t_1) \qquad [3\text{-}36]$$

Pois $\frac{dv}{dt} = a$

Tanto no caso da velocidade quanto no da aceleração podemos trabalhar com a integral indefinida. Temos assim:

$$\int v(t)dt = x(t) + C \qquad [3\text{-}37]$$

$$\int a(t)dt = v(t) + C \qquad [3\text{-}38]$$

A constante C de integração aparece no problema como condição inicial: x_o, que é o valor da velocidade em $t = 0$, ou v_0, que é o valor da velocidade em *t=0*, ou ambas se o problema envolver duas integrações. As condições iniciais não precisam necessariamente ser em $t = 0$: podemos dar o valor do deslocamento, por exemplo em $t = 6s$, ou seja podemos dizer que $t(6s) = 30m$.

As condições iniciais podem entrar em um problema tanto em forma de uma constante de integração, quanto como um extremo de integração segundo se usa a integral indefinida ou a integral definida. Tudo isto ficará mais claro nos exemplos.

Exemplo 1

"Seja a equação da velocidade de uma partícula dada por $v(t) = 2t + 5$. E suponhamos que em $t = 0$ o deslocamento da partícula seja 6m. Encontre o deslocamento da partícula em *t=7s*. Escreva a equação horária da partícula.

Solução: A condição inicial é $x(0) = x_0 = 6m$. Temos duas formas de solução:

a) Por integral indefinida

Partindo da definição de velocidade instantânea, $v = \frac{dx}{dt}$,

Fazemos $dx = vdt$.

Tomando a integral indefinida de ambos os membros

$$\int dx = \int v dt + C \qquad [3\text{-}39]$$

onde reunimos a constante de integração de cada uma das duas integrais no segundo membro, temos que

$$\int dx = x + C' \qquad [3\text{-}40]$$

De fato

$$\int dx = \int 1 dx$$

(Estamos integrando a função constante igual a 1) Ora, a derivada de *x*+*C* com relação à *dx* é

$$\frac{d}{dx}(x + C') = 1,$$

E que explica [3-40]. Levando em conta [3-39] e a função $v(t)$ dada ficamos:

$$x(t) = \int (2t + 5) dt + C$$

$$x(t) = \frac{2t^2}{2} + 5t + C \qquad [3\text{-}40]$$

$$x(t) = t^2 + 5t + C \qquad [3\text{-}41]$$

Vamos agora introduzir a condição inicial que é

$$x(0) = x_0 = 6m$$

Colocando este valor em [3-41],

$$x(0) = x_0 = 6m = 0 + 0 + C$$

Ou seja

$C=6m$

Substituindo em [112-3] ficamos com,

$$x(t) = t^2 + 5t + 6 \qquad [3\text{-}42]$$

Que é a equação horária, com a condição inicial dada.

Para encontrar o deslocamento da partícula em $t = 7s$, basta fazer:

$$x(7) = 7^2 + 5 \times 7 + 6$$
$$x(7) = 49 + 35 + 6 \qquad [3\text{-}43]$$
$$x(7) = 90m$$

b) Solução por integral definida

Vamos inicialmente calcular a equação horária. Para tanto partimos novamente da definição de velocidade instantânea.

$$v = \frac{dx}{dt},$$

e fazemos novamente

$$dx = vdt \qquad [3\text{-}44]$$

Tomemos novamente a integral de ambos os membros, mas desta vez tomemos a integral definida, colocando a condição inicial nos limites de integração. Ficamos com:

$$\int_6^x dx' = \int_0^t (2t'+5)dt' \qquad [3\text{-}45]$$

Os limites foram colocados da seguinte maneira: em $t = 0$ sabemos que *x* vale $6m$ $(x(t = 0) = 6m)$

Então os limites inferiores das integrais dos dois membros são 6 para a integral em *dx* e *0* para a integral em *dt*. Os limites superiores significam que para um tempo genérico *t*, temos um valor genérico *x*, que é função de *t* (portanto $x(t)$ e esta função é exatamente a equação horária que estamos procurando). Colocamos uma linha nas variáveis de integração (que ficaram *dx* e *dt*) para distinguir limite de integração de variável de integração. Vamos resolver as integrais de [3-45], e voltaremos a este ponto. Integrando [3-45] ficamos com:

$$x'|_6^x = t'^2|_0^t + 5t'|_0^t \qquad [3\text{-}46]$$

Lembrando que $x'|_6^x$ significa atribuir à variável *x'* o valor *x*, em seguida atribuir à variável *x'* o valor 6, e diminuir do primeiro o segundo (de acordo com o Teorema Fundamental do Cálculo). Ou seja temos

$$x'|_6^x = x - 6$$

O mesmo vale para o segundo membro de [3-46] e assim ficamos com:

$$x - 6 = (t^2 - 0) + (5t - 0)$$

Ou seja:

$$x = t^2 + 5t + 6 \,, \quad [3\text{-}47]$$

que é o que havíamos obtido em [3-42]. Para obter agora $x(7)$, fazemos como anteriormente. Basta colocar em [3-47] o valor 7 onde temos a variável *t*.

Vamos examinar, em maior detalhe, como foram colocados os limites de integração em [3-45].

Uma integral definida é como vimos um número que representa uma área sob o gráfico da função que está sendo integrada. Assim na Fig. [3-12], a integral definida $\int_a^{t_1} v(t)dt$, quer dizer, a integral definida de $v(t)$, de a até t_1, é um valor que representa a área hachurada na Fig.[3-12].

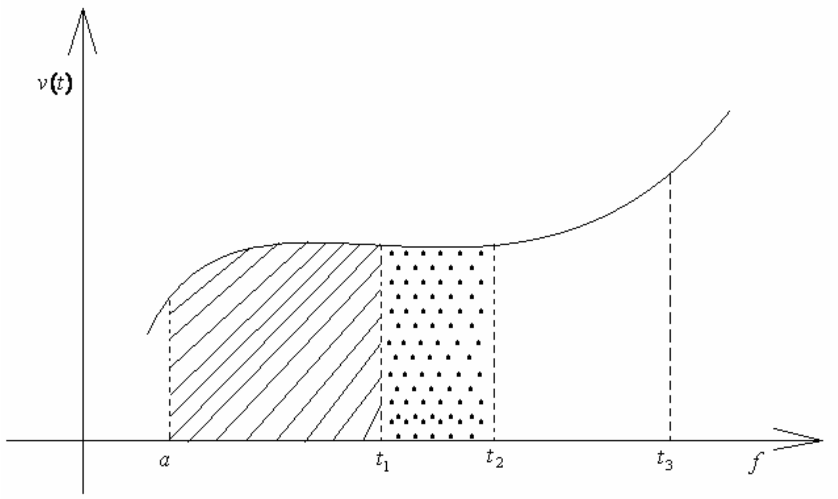

Fig.[3-12].

Se considerarmos agora a integral definida da mesma função de *a* até t_2, ou seja $\int_a^{t_2} v(t)dt$, teremos outro número que representa outra área na Fig [3-12], a área hachurada mais a área com pontos. Tomando outro ponto t_3, teríamos um outro valor. Assim para cada valor da variável *t*, temos um valor da área compreendida pelo gráfico de $v(t)$ e o eixo t. Ora se temos uma correspondência entre um conjunto de valores no eixo *t*, e um conjunto de outros valores obtidos pela integração definida de $v(t)$ de *a* até *t*, temos uma função. No nosso problema o *a* era o ponto zero, e a função é a equação horária [3-47].

Vemos então, que o limite superior de integração passou a ser uma variável, a variável *t*. Mas esta não é a variável de integração da integral definida, pois é uma variável que surgiu fazendo variar o limite de integração da integral definida. Por isto chamamos a variável de integração de *t'*. Devemos fazê-lo para distinguir variável de integração, e podemos fazê-lo, sem susto, porquanto uma integral definida é em si um número que não depende da letra que se usa para caracterizar a função que está sendo integrada. Por exemplo, seja a integral de $\int_0^2 3zdz$. Temos:

$$3\frac{z^2}{2}\Big|_0^2 = 6$$

Consideramos agora

$$\int_0^2 3xdx = 3\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 6\,.$$

Nem a letra *x* nem a *z* aparecem no resultado final que é o mesmo (no caso *b*).

No problema em questão, podíamos achar o espaço percorrido em $t = 7s$, trabalhando com uma integral definida de limites de integração fixas, sem ter necessidade de achar a equação horária. Para tanto bastava fazer:

$$\int_6^{x(7)} dx = \int_0^7 (2t+5)dt \qquad [3\text{-}48]$$

$$x\Big|_6^{x(7)} = t^2\Big|_0^7 + 5t\Big|_0^7$$
$$x(7) - 6 = 49 + 35$$
$$x(7) = 90m$$

Que é o que havíamos obtido em [3-43]. Observemos que agora todos nossos limites de integração são números fixos, a saber, *0, 7, 6, e x(7)*. E não tivemos necessidade de usar o apóstrofo linha.

Exemplo 2

"Seja um movimento retilíneo com uma aceleração constante dada por $a = 3 \, m/s^2$.

Sejam as condições iniciais $x_0 = 30m$ e $v_0 = 72 \, m/s$

a) Escreva a equação horária do movimento

b) Encontre a velocidade em *t=10s*

c) Encontre o deslocamento em *t=20s*

Solução:

Por integral indefinida

Partindo de

$$a = \frac{dv}{dt}$$

colocamos

$$dv = adt$$

e vamos efetuar uma primeira integração para achar *v(t)*

$$\int dv = \int adt + C_1$$

Sabemos que *a* é uma constante igual a $3 \, m/s^2$, então

$$\int dv = \int 3dt + C_1 = 3\int dt + C_1$$

$$v(t) = 3t + C_1 \qquad [3\text{-}49]$$

Introduzindo a condição inicial a saber $v(o) = v_0 = 72 \, m/s$

$$72 = 0 + c_1$$

$$C_1 = 72 \, m/s$$

e a equação [3-49] fica:

$$v(t) = 3t + 72 \qquad [3\text{-}50]$$

que é a velocidade como função do tempo.

Para achar a velocidade em *t=10s* (que é a questão b) basta colocar, na equação da velocidade como função do tempo [3-50], *t=10s*. Com isto temos:

$$v(10) = 3 \times 10 + 72$$
$$v(10) = 30 + 72 = 102 \, {}^{m}\!/_{2}$$

A resposta à questão b é portanto $v(10) = 102 \, {}^{m}\!/_{s}$

Para achar a equação horária, ainda trabalhando com integral indefinida, partimos de

$$v = \frac{dx}{dt},$$

com o que

$$dx = vdt \qquad [3\text{-}51]$$

Integrando ambos os membros de [3-51]

$$\int dx = \int vdt + C_2 \quad [3\text{-}52]$$

onde C_2 é uma outra constante, por enquanto arbitrária, mas que vai ser determinada pela outra condição de contorno, a saber $x(o) = x_0 = 30m$. Substituindo em [3-52] a expressão da função *v(t)* [3-50] obtemos:

$$\int dx = \int (3t + 72)dt + c_2$$
$$x(t) = \frac{3t^2}{2} + 72t + C_2$$

Utilizando agora a segunda condição inicial, a saber,

$x(o) = x_0 = 30m,$ temos

$$30 = 0 + 0 + C_2$$

Ou seja $C_2 = 30m$ e temos

$$x(t) = \frac{3t^2}{2} + 42t + 30 \qquad [3\text{-}53]$$

A equação [3-53] é a resposta à questão a). Para encontrar o deslocamento em *t=20s*, basta substituir em [3-53], *t* por *20s* e obtemos

$$x(20) = 2.070m \qquad [3\text{-}54]$$

A equação [3-54] é a resposta ao item c)

Solução por integral definida

Partimos novamente de $a = \frac{dv}{dt}$, e fazemos $dv = vdt$. Integrando ambos os membros desta última igualdade

$$\int_{72}^{v(t)} dv' = \int_0^t adt',$$

onde, como no exemplo 1, colocamos os limites inferiores seguindo a condição inicial, a saber, quando $t = 0 \quad v = 72 \, {}^{m}\!/_{s}$. Os limites superiores agora são as variáveis. À um tempo genérico *t*, corresponde um valor *v* (portanto, *v* é função de *t*). Substituindo *a* por $3 \, {}^{m}\!/_{s^2}$ ficamos:

$$\int_{72}^{v(t)} dv' = \int_0^t 3dt'$$

$$v'\big|_{72}^{v(t)} = 3t'\big|_0^t$$

$$v(t) - 72 = 3t$$

$$v(t) = 3t + 72 \qquad [3\text{-}54]$$

E, como era de ser esperar [3-54], obtida por integral definida é idêntico a [3-50] obtida por indefinida. Notemos mais uma vez que no caso de uma integral definida, a condição de contorno, é colocada como uma correspondência entre os limites inferiores das integrais definidas.

De posse da função $v = v(t)$ é claro que podemos achar a velocidade em *t=10s* simplesmente substituindo *t* por *10s* na função $v = v(t)$, como fizemos no caso da integral indefinido. Mas usando integral definida, temos uma outra possibilidade que nos permite calcular *v(10)* diretamente, sem precisar achar a função $v = v(t)$. Basta fazermos:

$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$dv = adt$$
$$\int_{72}^{v(10)} dv = \int_0^{10} 3dt$$
$$v \,|_{72}^{v(10)} = 3t \,|_0^{10}$$
$$v(10) - 72 = 3 \times 10$$
$$v(10) = 30 + 72$$
$$v(10) = 102 \, {}^{m}\!/_{s}$$

Finalmente, para achar a equação horária, com as condições iniciais dadas fazemos

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt$$
$$\int_{30}^{x(t)} dx' = \int_0^t (3t + 72) dt'$$
$$x' \,|_{30}^{x(t)} = \frac{3t'^2}{2} \,|_0^t \, + 72 \,|_0^t \qquad [3\text{-}55]$$
$$x(t) - 30 = \frac{3t^2}{2} + 72t$$

E obtemos com [3-55] a mesma resposta para o item a). Para calcular diretamente o deslocamento em *t=20s*, fazemos

$$\int_{30}^{x(20)} dx = \int_0^{20} (3t + 72) dt$$
$$x(20) - 30 = \frac{3t^2}{2} \,|_0^{20} \, + 72t \,|_0^{20}$$
$$x(20) = 2.070m$$

$$x(t) = \frac{3t^2}{2} + 72t + 30$$

Esta é a resposta para o ítem c).

REDEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO RETILÍNEO USANDO INTEGRAÇÃO.

1. Movimento retilíneo uniforme

Partindo da definição de velocidade instantânea $v = \frac{dx}{dt}$, fazemos $dx = vdt$. Integramos cada membro desta equação do instante zero até o instante *t*, colocando como condição inicial que em *t=0*, o deslocamento tenha o valor x_0. Temos então:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} vdt' \qquad [3\text{-}56]$$

Notamos que a condição inicial está colocada na correspondência entre o limite inferior da integral em *t*, que é zero, e o limite inferior da integral em *x* que é x_0. Desta maneira estamos exprimindo a condição inicial que é em *t=0*, *x*= x_0. Como *v* é constante temos:

$$x'\big|_{x_0}^{x} = vt'\big|_{0}^{t},$$

ou seja,

$$x - x_0 = vt$$

donde

$$x = x_0 + vt \qquad [3\text{-}57]$$

2. Movimento retilíneo uniformemente acelerado

Tínhamos deduzido três relações para este tipo de movimento: a equação horária $x = x(t)$, a equação da velocidade $v = v(t)$, e a equação de Torricelli[§4].

Inicialmente façamos a dedução da equação da velocidade. Para tanto vamos partir da definição de aceleração instantânea, $a = \frac{dv}{dt}$, e tirar $dv = adt$.

Vamos integrar os dois membros desta equação, colocando ao mesmo tempo a condição inicial que em *t=0* a velocidade é v_0. Então temos:

$$\int_{v_0}^{v} dv' = \int_{0}^{t} adt'$$

Como a aceleração é constante, podemos fazer

---

§3 Torricelli discípulo de Galileu. Estudou a pressão. Inventou o Barômetro

$$\int_{v_0}^{v} dv' = a\int_0^t dt'$$

$$v'|_{v_0}^{v} = at'|_0^t \qquad [3\text{-}58]$$

$$v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at$$

Passemos em seguida à equação horária. Tomando

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$dx = vdt \qquad [3\text{-}59]$$

$$\int_{x_0}^{x} dx' = \int_0^t vdt'$$

onde os limites de integração em [3-59] exprimem o fato de que em *t=0* $x = x_0$.

A velocidade *v* que aparece na integral do segundo membro de [3-59] é aquela obtida em [3-58]. Então:

$$\int_{x_0}^{x} dx' = \int_0^t (v_0 + at')dt'$$

$$\int_{x_0}^{x} dx' = \int_0^t v.dt' + \int_0^t at'dt'$$

Lembrando que v_0 é uma constante, e que *a* também é constante pois, estamos tratando do movimento uniformemente acelerado,

$$\int_{x_0}^{x} dx' = v_0\int_0^t dt' + a\int_0^t tdt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx' = v_0 t'|_0^t + a\frac{t'^2}{2}|_0^t$$

$$x'|_{x_0}^{x} = v_0 t'|_0^t + \frac{1}{2}at'^2|_0^t$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad [3\text{-}60]$$

Esta é a equação horária do movimento retilíneo uniformemente. Para fazermos a dedução da equação de Torricelli vamos partir novamente de $a = \frac{dv}{dt}$ e fazer $dv = adt$.

Lembrando que $v = \frac{dx}{dt}$, vamos multiplicar o primeiro membro da equação $dv = adt$ por *v* e o segundo membro por $\frac{dx}{dt}$,. Com isto ficamos com:

$$vdv = adt\frac{dx}{dt} \qquad [3\text{-}61]$$

Em seguida vamos integrar [3-61], levando em consideração a condição inicial de que em *t=0* $v = v_0$.

$$\int_{v_0}^{v} v'dv' = \int_{0}^{t} a\frac{dx}{dt'}dt' \qquad [3\text{-}62]$$

Lembrando agora que dada a função *x=x(t)*, a diferencial *dx*, se escreve:

$$dx = \frac{dx}{dt}dt,$$

podemos fazer uma mudança de variável na integral do 2º membro de [3-62] passando da variável *t'* para a variável *x'*, e ao mesmo tempo lembrando que condição inicial é que *t=0* $x = x_0$.

$$\int_{v_0}^{v} v^2 dv' = \int_{x_0}^{x} adx'$$

Como *a* é constante

$$\int_{v_0}^{v} v'dv' = a\int_{x_0}^{x} dx'$$

$$\frac{1}{2}v'^2 \Big|_{v_0}^{v} = ax'\Big|_{x_0}^{x}$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = a(x - x_0).$$ Chamando $x - x_0 = \Delta x$.

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \qquad [3\text{-}63]$$

O movimento vertical de queda livre Espaço físico. Espaço de configuração

O movimento de queda livre de um objeto com velocidade inicial nula, ou cujo vetor velocidade inicial tem direção vertical, é um exemplo de movimento unidimensional. Como mostrou Galileu, é um movimento uniformemente acelerado, e a sua aceleração na superfície da Terra é $9{,}8 \, m/s^2$. Chamando de *g* esta aceleração constante ($g = 9{,}8 \, m/s^2$.) e chamando *y* o eixo que representa a posição do corpo (ou como estamos tratando, a posição da partícula e usando a equação que já deduzimos sobre o movimento retilíneo uniformemente acelerado temos:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad [3\text{-}64]$$

Em um gráfico de *y* por *t*, ou seja, *y* o eixo das ordenadas e *t* o eixo das abisissas, este gráfico é o gráfico de uma parábola.

Convém aqui esclarecer um ponto que as vezes causa confusão. O movimento de que estamos tratando é um movimento unidimensional. Mais do que isto: é um movimento vertical. Quer dizer: no espaço físico em que se realiza o movimento, temos um movimento unidimensional de direção vertical. Quando representamos a equação horária deste movimento em um gráfico de eixos cartesianos em que a posição é representada por um eixo Y e o tempo é indicado em um eixo *t*, temos a representação do movimento, naquilo que os matemáticos chamou o espaço de configuração. Este espaço, neste caso, é o espaço cujos pontos são dados por dois números, *y* e *t* (Ver Fig. [3-13])

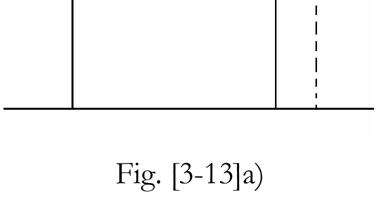

Fig. [3-13]a)

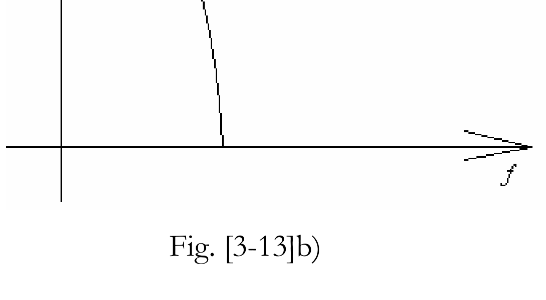

Fig. [3-13]b)

Na Fig [3-13] temos o desenho de uma bola sendo abandonada em queda livre do topo de um edifício. A trajetória da bola no espaço físico (que é o espaço do mundo real em que acontece o movimento) é a reta vertical pontilhada da figura. Na Fig. [3-14] temos a representação do movimento no espaço de configuração. Esta representação do movimento, que é o gráfico da equação horária do tipo da equação [3-64], é uma parábola, este espaço é um espaço bidimensional, pois relaciona duas variáveis: a posição *y* e o *t*.

Exemplo: Seja uma bola lançada verticalmente com velocidade $v_0 = 40 \, {}^{m}\!/_{s}$. Assumindo a aceleração da gravidade como sendo $g = 10 \, {}^{m}\!/_{s^2}$ §5, calcule:

a) a altura da bola transcorridos *5s;*

b) a altura máxima atingida pela bola;

c) depois de quantos segundos a bola atinge a altura de 75m, e qual a velocidade da bola nesta altura?

d) Desenhe o gráfico da equação horária no espaço de configuração;

e) Desenhe a trajetória da bola no espaço físico.

Solução: a) assumindo um eixo coordenado vertical *y* com direção positiva para cima, e com o ponto zero coincidindo com o ponto de lançamento da bola, temos a equação.

$$y = v_o t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad [3\text{-}65]$$

Observar que ao fazer o zero do eixo vertical *g*, coincidir com o ponto do lançamento da bola, e ao mesmo tempo tomamos este instante como o instante *t=0* (inicio da contagem do tempo) estamos introduzindo a condição iniciai $y_0 = 0$, ou seja, $y_0 = y(0) = 0$. Daí a forma da equação [3-65].

Observe que não estamos escrevendo o deslocamento, a velocidade e a aceleração como vetores, porque estamos trabalhando com um movimento unidimensional. Porém, estas grandezas são grandezas vetoriais, e em um eixo vertical podem assumir duas direções: a direção para cima (que no caso convencionamos ser a direção positiva) e a

---

§4 Na solução dos problemas assumir $g = 9{,}8 \, {}^{m}\!/_{s^2}$.

direção para baixo (que é então no caso, uma direção negativa). Por isso o sinal negativo em [3-65]. Então:

$$y = 40\left(\frac{m}{s}\right)\ t\ \left(s\right) - \frac{1}{2}10\left(\frac{m}{s^2}\right)t\left(s^2\right) \qquad [3\text{-}66]$$

Em t=5s

$$y = 200m - 125m$$

$$y = 75m$$

b) A altura máxima é a altura em que $\frac{dy}{dt} = 0$. Ou seja, é a altura em que a velocidade é nula. Sendo:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 - gt$$

Temos que fazer então:

$$v_0 - gt = 0$$

$$gt = v_0$$

$$t = \frac{v_0}{g}$$

Como $v_0 = 40 \frac{m}{s}$ e $g = 10 \frac{m}{s^2}$, obtemos $t = 4s$

c) Sabemos, pelo nosso cálculo no item a) que depois de 5 seg a bola está em uma altura de 75 m. Resolvendo porém a equação [3-65] para *t*, como esta é uma equação do segundo grau, vemos que existe um outro tempo *t*, em que a bola também está na altura de 75m. De fato:

$$75 = 40t - \frac{1}{2}10t^2 \qquad [3\text{-}67]$$

$$-5t^2 + 40t - 75 = 0$$

Pondo em evidência (-5) temos:

$$-5\left(t^2 - 8t + 15\right) = 0 \qquad [3\text{-}68]$$

As equações [3-67] e [3-68] são idênticas, portanto, têm as mesmas raízes. Tomemos:

$$t^2 - 8t + 15 = 0$$
$$t = \frac{+8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2}$$
$$t_1 = \frac{8+2}{2} = 5$$
$$t_2 = \frac{8-2}{2} = 3$$

Quer dizer que além do instante *t=5s*, a bola também está à uma altura de 75m, no instante *t=3s*. Vamos calcular a velocidade da bola em *t=3s* e em *t=5s*. Como:

$$v(t) = v_0 - gt$$

Temos para *t=3s*

$$v(3) = 40 - (10 \times 3)$$
$$v(3) = 40 - 30 = 10 \, {}^{m}\!/_{s}$$

Enquanto para *t=5s*

$$v(5) = 40 - (10 \times 5)$$
$$v(5) = 40 - 50$$
$$v(5) = -10 \, {}^{m}\!/_{s}$$

Vemos assim que a bola atinge a altura de 75m em 3s , e tem neste momento a velocidade de $v = 10 \, {}^{m}\!/_{s}$. Ou seja, a bola está subindo (o sentido do vetor velocidade coincide com a direção positiva do eixo y). Ela continua subindo até que em *t=4s* atinge a altura máxima e neste instante sua velocidade é nula. Em *t=5s*, a bola tem velocidade $-10 \, {}^{m}\!/_{s}$, quer dizer, está descendo. Notar a adequação do tratamento matemático à descrição exata de um fenômeno físico.

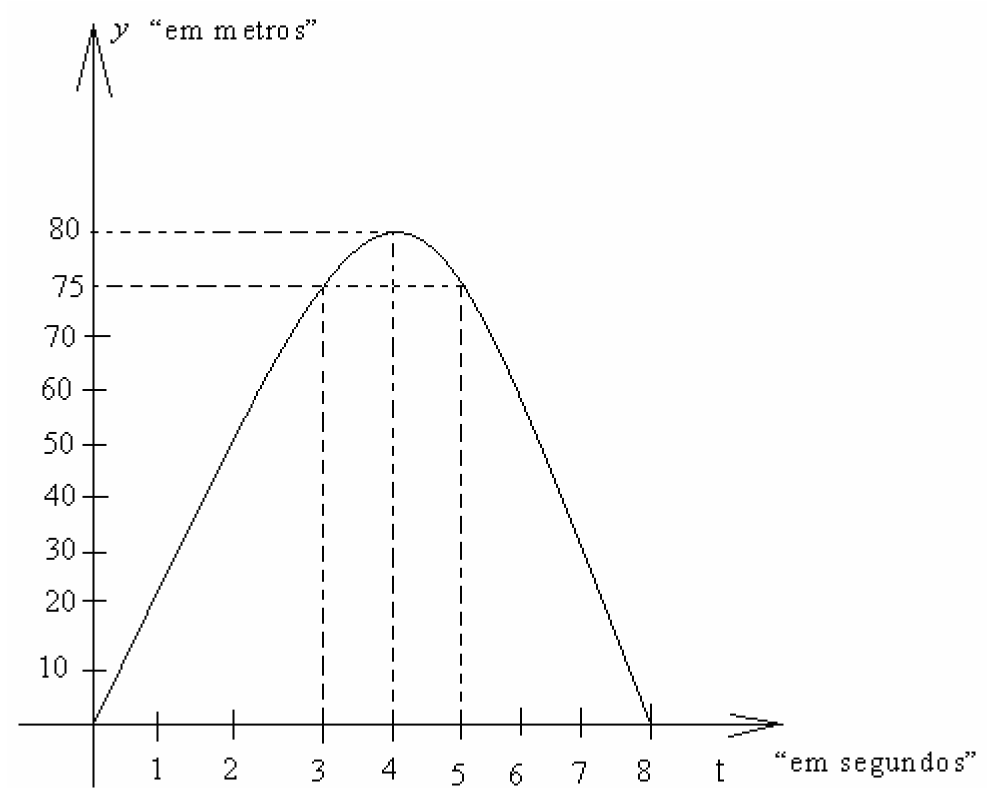

Fig. [3-15]

Representação da equação horária no espaço de configuração.

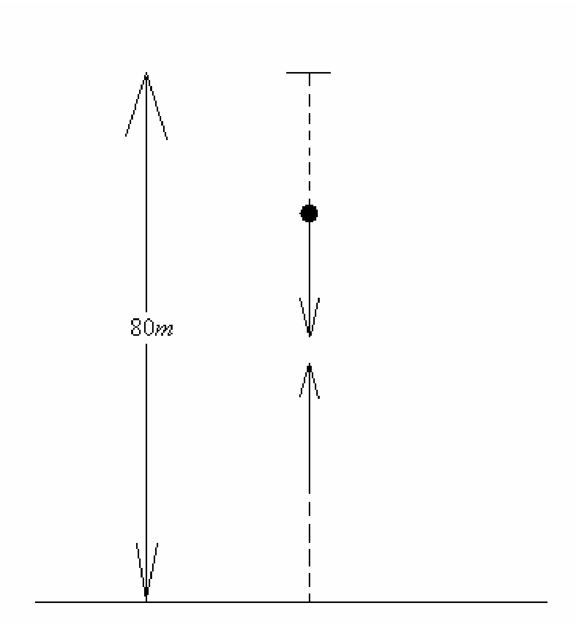

Fig. [3-16]

Desenho do movimento da bola no espaço físico.

Observações: i) Ao resolvermos este problema usamos as equações já deduzidas, a saber, a equação horária e a equação da velocidade para o movimento uniformemente acelerado. É como normalmente resolvemos problemas em Física. No caso particular destas equações de movimento que podem ser escritas integrando as equações diferenciais, que são a definição de aceleração ($a = \frac{dv}{dt}$ donde $adt = dv$) e da velocidade ($v = \frac{dy}{dt}$ donde $dy = vdt$) é útil, diríamos mais do que útil, necessário, saber resolver estes problemas integrando as equações diferenciais. Isto significa repetir em cada problema o raciocínio da dedução das fórmulas. Mas a utilidade é sabermos montar, em cada problema específico, as integrais, e saber colocar corretamente, usando integrais, as condições iniciais.

Mostraremos isto no caso do presente problema. Temos:

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad\qquad dv = adt$$

Integrando, usando integral definida, temos que colocar corretamente os extremos de integração. Sabemos que no nosso caso $a = -g = -10 \, {}^{m}\!/_{s^2}$ e que em $t = 0$, $v(o) = v_0 = 40 \, {}^{m}\!/_{s^2}$. Então:

$$\int_{40}^{v} dv' = -10 \int_{0}^{t} dt'$$

Donde

$$v'\Big|_{40}^{v} = -10t'\Big|_{0}^{t}$$
$$v = 40 = -10t$$

Ou seja

$$v = -10t + 40 \qquad [3\text{-}69]$$

que é a equação que tínhamos obtido.

Integrando agora

$$v = \frac{dy}{dt} \therefore dy = vdt$$

e levando em conta que quando $t = 0$, $y(0) = y_0 = 0$, e ainda usando a expressão de v dada pela equação [3-69], ficamos

$$\int_0^y dy = \int_0^t (-10t' + 40)dt'$$

$$y'|_o^y = -10\frac{t'^2}{2}|_0^t + 40t'|_0^t$$

$$y = -5t^2 + 40t \qquad [3\text{-}70]$$

Esta é a equação que tínhamos obtido em [3-66]

Trabalhando com a integral indefinida, chegamos aos mesmos resultados.

$$a = \frac{dv}{dt} \therefore dv = adt$$

$$\int dv = g\int dt + C_1$$

Onde C_1 é uma constante de integração que devemos determinar pelas condições iniciais. Ficamos com:

$$v = -10t + C_1 \qquad [3\text{-}71]$$

Sabemos que quando $t = 0$ $v(o) = v_0 = 40\,{}^{m}\!/\!{}_{s}$. Então:

$$40 = C_1$$

Substituindo o valor encontrado de C_1 em [3-71] ficamos:

$$v = -10t + 40 \qquad [3\text{-}72]$$

que havíamos deduzido utilizando-nos da Integral Definida.

Para chegar à equação horária, partimos de:

$$v = \frac{dy}{dt} \therefore dy = vdt,$$

integrando ficamos

$$\int dy = \int vdt + C_2$$

Usando v obtida em [3-72]

$$\int dy = \int(-10t + 40)dt + C_2$$
$$y = 10\frac{t^2}{2} + 40t + C_2 \qquad [3\text{-}73]$$

Com a condição inicial de que em $t=0$ $y=0$ ficamos

$$0 = C_2$$

Substituindo este valor de C_2 em [3-73] obtemos finalmente

$$y = -5t^2 + 40t$$

que é a expressão que tínhamos obtido [3-70].

ATIVIDADES

3.1 VELOCIDADE INSTANTÂNEA COMO DERIVADA

1) Admitindo a fórmula de Galileu $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ e usando o exemplo do texto de uma bola lançada de 450m de altura, como foi calculada a velocidade instantânea após 5s (exatamente a 5s) do lançamento?

Observação: explique com suas palavras resumidamente o que está no texto.

2) Construa uma tabela semelhante à tabela [6-1], mas diminuindo os intervalos de tempo de maneira diferente. Em vez de tomar 0,1; 0,01; 0,001; etc ... tome por exemplo 0,1; 0,03; 0,007; 0,001; 0,0004 etc ... e assim sucessivamente. Calcule então as velocidades médias. Você acha que o resultado destas médias vai tender ainda à 49m/s?

3) Explique com suas palavras, como foi definido a velocidade instantânea em 5s. Depois generalize para a definição de velocidade instantânea em um instante t.

4) Definindo velocidade instantânea em diferentes instantes t_1, t_2, t_3, etc... , mostre como se constroe a função velocidade (ou seja, a velocidade como função do tempo: $v = v(t)$).

5) Porque observando a tabela [6-1] podemos ter certeza que diminuindo cada vez mais o intervalo de tempo da primeira coluna, a segunda coluna vai tender a 49m/s?

6) Mostre que aquilo que tomamos como uma prova de nossa certeza na pergunta 5), se exprime na definição (definição matemática) de limite.

7) Mostre, geometricamente, qual é o valor da derivada de uma função em um ponto, a partir de seu gráfico.

8) Tomando a equação de uma reta, mostre graficamente o que são as desigualdades definidoras de limite.

Observação: para mostrar que $|t - t_1| < \delta$ é equivalente a $t_1 - \delta < t < t_1 + \delta$, lembre-se que o módulo de um número (|b|) é igual a *b* se *b>0*

Ou é igual a *–b* se *b<0*. Ou seja,

$$|b| = \begin{cases} b \quad se \quad b > 0 \\ -b \; se \quad b < 0 \end{cases}$$

Então:

$$|t - t_1| = \begin{cases} t - t_1 \; se \; t > t_1 \; (ou \; seja \; t - t_1 > 0) \\ t_1 - t \; se \; t < t_1 \; (\; (ou \; seja \; t - t_1 < 0) \end{cases}$$

Quando dizemos então que $|t - t_1| < \delta$, isto significa duas equações

$t - t_1 < \delta$ [3-74]

$t_1 - t < \delta$ [3-75]

Como podemos somar um número aos dois membros de uma desigualdade, mantendo a desigualdade, se somarmos à desigualdade [3-74] o número t_1 (aos dois membros) obteremos

$t < t_1 + \delta$ [3-76]

Sabemos também que podemos multiplicar uma desigualdade por -1 invertendo o sentido da desigualdade. Então de [3-75], multiplicada por -1 obtemos:

$t - t_1 < -\delta$ [3-77]

Somando aos dois de [3-77] o número t_1, ficamos

$t > t_1 - \delta$ [3-78]

Combinando [3-76] e [3-78] temos

$t \;\; -\delta < t < t_1 + \delta$ [3-79]

Podemos entender [3-79] de uma maneira intuitiva. Observando a Fig [3-2], vemos que quando escrevemos $|t - t_1| < \delta$, estamos dizendo que a distância entre *t* e t_1 é menor que δ. Distância é sempre um número positivo, por isto o módulo. Podemos ter $t > t_1$ (ou seja, *t* à direita de t_1 no nosso eixo orientado *t*), ou $t < t_1$ (ou seja, *t* a esquerda de t_1). Mas se a distância entre *t* e t_1 é menor que δ, então (ver fig [3-2] *t* tem que estar entre $t_1 - \delta$ e $t_1 + \delta$, o que se exprime pelas desigualdades [3-79] que demonstramos algebricamente.

9) Defina função contínua. Dê um outro exemplo (diferente do exemplo do texto) de uma função cujo gráfico é um reta, mas que é descontínua em um ponto desta reta (porque não está definida neste ponto)

9) Refute, matematicamente, o sofisma de Zenon sobre a corrida de Achiles e a Tartaruga.

Sugestão: partindo das hipóteses de Zenon, mostre que há sim um ponto em que Achiles aliança a tartaruga.

10) Dado o seguinte gráfico de uma função,

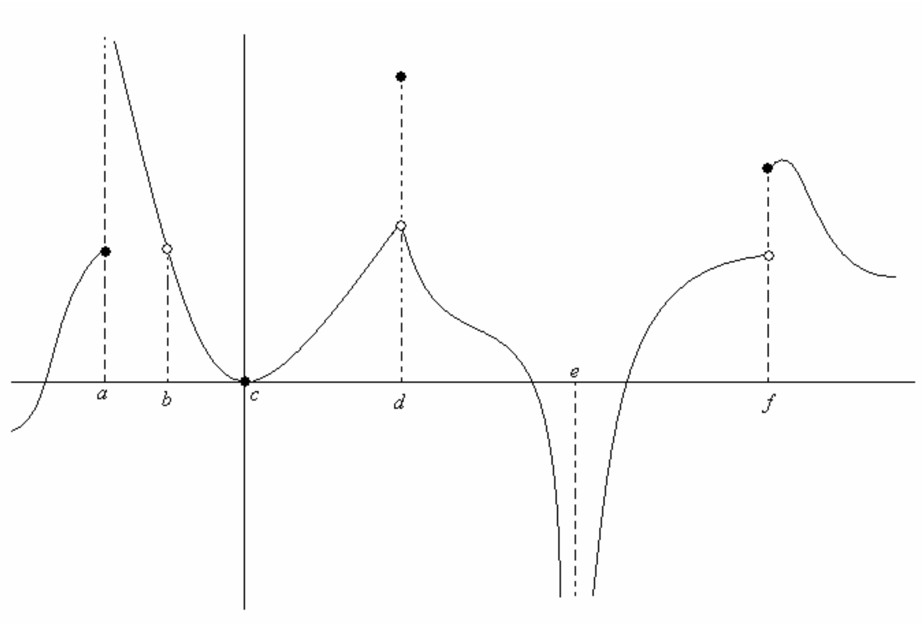

Fig. [3-17]

para cada um dos pontos a, b, c, d, e, f, responda as seguintes questões:

1- a função tem limite à direita?

2- A função tem limite à esquerda?

3- A função tem limite?

4- A função está definida?

5- A função é contínua?

11) A equação horária de uma bola atirada para cima é:

$y = 40t - 16t^2$,

e o movimento é na vertical. Qual sua velocidade instantânea em *t=2s*?

12 Uma flecha é atirada para cima, verticalmente, na superfície da lua, com a velocidade de 58m/s sua equação horária é $h(t) = 58t - 0{,}83t^2$. Encontre:

a) a velocidade da flecha após 1s.

b) a velocidade da flecha em *t=a(s)*

c) em que instante *t*, a flecha volta para a lua.

d) com que velocidade ela atinge a Lua?

13 O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dada pela equação: $s = 4t^3 + 6t + 2$ onde *t* é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos seguintes instantes: *t=a (segundos); t=1s; t=2s; t=3s.*

QUESTIONÁRIO

3.2 ACELERAÇÃO, MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

14 O que significa e como se determina a função $\vec{v} = \vec{v}(t)$?

15 Como se define a aceleração instantânea em um instante t_1? (ou seja $\vec{a}(t_1)$)

16 O que significa, e como se define a função aceleração instantânea $\vec{a} = \vec{a}(t)$?

17 Mostre que $\vec{a}(t) = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

18) Tem sentido um fazer $\dfrac{d^3\vec{r}}{dt^3}$?

19) Explique porque, se o movimento se dá em um único eixo, podemos trabalhar com *x*, *v* e *a* (escalares) e mostre como simplesmente o sinal destas grandezas dá a direção do vetor.

20) Deduza para o caso de uma aceleração constante a fórmula $v = v_0 + at$.

21) Desenhe o gráfico da aceleração da velocidade e do deslocamento em função do tempo, no caso do movimento uniformemente acelerado, e mostre que

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2}.$$

22 Examinando o gráfico de *x=x(t)* mostre que $x = v_m t$ e portanto que $x = \frac{v + v_0}{2} t$

23 Deduza a equação: $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$. Mostre que poderíamos também ter $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

24 Mostre que a equação $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ é dimensionalmente correta. Uma equação horária do tipo $x(t+4) = 3t^2 + 5t$ é dimensionalmente correta?

25 Deduza a equação de Torricelli.

26 Problema:

Dada a equação horária:

$x(t) = 10t^2 + 5t + 4$ (*x* em metros; *t* em seg)

Calcule: a) o espaço percorrido em *t=2seg*;

b) a velocidade em *t=3s*;

c) a velocidade inicial v_0;

d) o espaço inicial x_0;

e) a aceleração.

3.3 INTEGRAL DEFINIDA. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

27 Como vinham se desenvolvendo as idéias que levaram ao cálculo diferencial e as que levaram ao cálculo integral desde a antiguidade grega? Quais as preocupações e problema típicos de um e de outro?

28 Explique como Eudoxo abordou o problema da área do círculo, e como deu uma definição de área que coincide exatamente com a noção moderna do limite.

29 Usando a função velocidade *v=v(t)*, mostre como se define integral definida.

30 Na definição de integral definida, mostre como entra a noção de limite. Explique esta noção para o caso da soma de Riemann e o que ela significa (explique o significa em palavras).

31 Porque a escolha dos pontos amostrais é irrelevante?

Explique a semelhança e a diferença entre o método de Eudoxo, para o círculo e a soma de Riemann.

32 Enuncie o Teorema Fundamental do Cálculo e comente sobre sua importância

33 Explique no exemplo 1 os dois métodos de solução

34 Seja um corpo um movimento retilíneo com aceleração dada por:

$a(t)=4t+32$

Encontre v com função de t (ou seja $v=v(t)$) e x como função t ($x=x(t)$). As condições iniciais são: em $t=0$; $x_0=0$ e $v_0=4$. (As unidades são metro e segundo). Resolva por integral definida e por integral indefinida.

35 Uma pedra cai de um balão que desce em movimento uniforme com velocidade $v=12m/s$. Calcular a velocidade da pedra após 10s, o espaço percorrido nestes 10s e o deslocamento da pedra nestes 10s.

Responda as mesmas perguntas para o caso do balão estar subindo com velocidade 12m/s. (Faça inicialmente usando as fórmulas e em seguida usando a integral definida)

36 Uma pedra é lançada verticalmente para cima com a velocidade de 20m/s. Em que instante sua velocidade é 6m/s e qual sua altitude neste instante?

37 Uma pedra é lançada verticalmente de um poço (do fundo do poço) cuja profundidade é 30m, com velocidade 80m/s. Em que instante ela está na altura da borda do poço e quais suas velocidades nestes instantes?

RESUMO

Iniciamos este capítulo da adequação da Cinemática e do Cálculo Diferencial e Integral, definindo matematicamente o conceito de velocidade instantânea, cuja problemática filosófica já havia sido colocada na aula anterior.

Para tanto tomamos uma sequência de velocidades médias, com limite inferior no tempo *t* em que queremos definir a velocidade instantânea, e em intervalos de tempos cada vez menores. Verificamos, inicialmente apenas intuitivamente, que estas médias tendem à um certo valor, e definimos este valor com a velocidade instantânea.

Em seguida procuramos justificar esta intuição com rigor matemático. Ao tentarmos responder à pergunta, de se poderíamos ter certeza de que a sequência tende realmente a este valor, fomos levados à definição matemática de limite.

Mostramos que o limite da sequência de velocidades médias que tomamos é a definição matemática de derivada da equação horária tomada em um certo instante, ou seja, é o valor da derivada neste instante. Vimos que o conjunto destes limites tomados em todos os instantes, é um outra função de *t*, que é a velocidade instantânea como função de *t* ($v=v(t)$). Mostramos assim que a função velocidade (instantânea) como função do tempo, é a derivada da equação horária.

Por outro lado, enfocamos um outro problema matemático que havia sido abordado desde a antiguidade grega: o problema das áreas.

Mostramos com Eudoxo (300 A. C) resolveu o problema da área de um círculo, chegando para tanto à uma noção matemática que é idêntica à nossa noção de limite.

Enfocamos depois a solução do problema das áreas e a definição de integral definida, já no âmbito do Cálculo Integral de Newton. Enunciamos como com ele Newton e Leibniz unificaram estas duas áreas que desde a antiguidade vinham se desenvolvendo como áreas distintas: uma o Cálculo Diferencial (o problema da velocidade instantânea, por exemplo) outra o Cálculo Integral (o problema das áreas)

Reconhecemos que a noção e a definição precisa de limite estão na base de ambos. Estudamos por isto, em maior detalhe a noção de limite examinando também sua interpretação geométrica. Demos também a interpretação geométrica de derivada.

Passamos à exemplos de solução de problemas de cinemática por integração, usando, seja a integral definida, seja a definida e vimos que a diferença entre ambas, no contexto destas aplicações, está na maneira de introduzir as condições inciais.

Resolvendo o problema clássico da queda dos corpos, problema cujo sentido histórico decorre do fato de ter sido o problema resolvido por Galileu nos albores do estabelecimento da Mecânica, mostramos o quanto é mais fácil equacionar este problema usando o Cálculo Integral, do que, como também havíamos apresentado antes, sem a sistematização que é o Cálculo Integral, mas sim usando algumas particularidades deste movimento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERTRAND, R. **História da Civilização Ocidental**

RESMICH, R. e Halliday, D. **Plysics** (1963). John Wiley & Sons, Inc.

CHAUI, M. **Introdução à História da Filosofia.** 5. Ed. (1997). Ed. Brasiliense

TIPLER, P. A. **Física** 4. ed. 1999. Livros Técnicos e Científicos S. A.