Aula 4

TRATAMENTO VETORIAL

RELATIVIDADE DE GALILEU E DE EINSTEIN

METAS

Analisar a Cinemática em duas e três dimensões, e para tanto incluir o ferramental do Cálculo Vetorial.

Introduzir a Relatividade de Galileu e compará-la com a de Einstein.

OBJETIVOS

Proporcionar aos alunos os meios de se utilizar do cálculo vetorial na abordagem dos problemas de cinemática.

Descortinar ao alunado a perspectiva de que a moderna Teoria da Relatividade de Einstein tem um antecedente em alguns aspectos conceitualmente análogos na relatividade de Galileu.

PRÉ-REQUISITOS

Ter feito um semestre de Cálculo Vetorial.

INTRODUÇÃO

Na terceira aula, trabalhamos com o ferramental do Cálculo Integral, mas estudamos somente movimentos unidimensionais. Vamos agora estender nosso estudo aos movimentos bi e tri dimensional. Para tanto vamos nos utilizar das propriedades dos vetores, que vocês conhecem do curso de Geometria e Vetores, e que foram recordadas, e talvez em alguns pontos aprofundadas na nossa aula dois.

Vamos mostrar também, que quando Galileu concebe que a Terra não é imóvel e que não há nenhum referencial absoluto imóvel no Universo, mas sim que todo movimento é relativo a algum corpo ou sistema que escolhemos arbitrariamente como referencial, está estabelecendo uma das bases conceituais que foram incorporadas pela moderna Teoria da Relatividade de Einstein.

4.1 TRATAMENTO VETORIAL. PROJÉTEIS

Tratamento vetorial da velocidade e aceleração instantâneas

Tendo, nas seções anteriores, trabalhado em detalhe o cálculo diferencial e integral aplicado ao movimento retilíneo, vejamos agora como este ferramental se aplica no caso de movimentos no plano ou no espaço. Temos então que usar, na sua plenitude, o conceito de vetor. Seja então uma partícula descrevendo uma trajetória curvilínea *C* como mostra a Fig. [4.1].

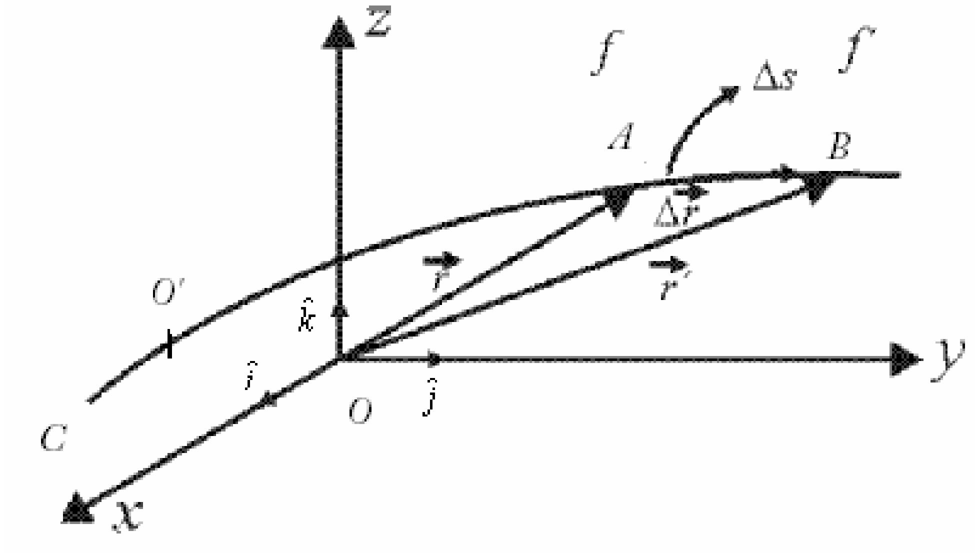

Fig. [4.1]

No instante *t* a partícula está no ponto *A* dado pelo vetor posição:

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, onde $\hat{i}$, $\hat{j}$ *e* $\hat{k}$, são os vetores dos eixos *X, Y e Z*. Em um instante posterior *t'*, a partícula está no ponto *B* dado pelo vetor posição:

$$\vec{r} = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'k$$

Embora o movimento da partícula seja ao longo do arco $AB = \Delta s$, o deslocamento é o vetor $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$. Vemos da Fig. [4.1] que $\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$. Temos então:

$$\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = (x'-x)\hat{i} + (y'-y)\hat{j} + (z'-z)\hat{k}$$

[4-2]

$$\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$$

onde indicamos por $\Delta x = x' - x;\ \Delta y' = y' - y;\ \Delta z = z' - z$

O vetor velocidade média é então:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad [4\text{-}3]$$

E então vemos de [4-2] que:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} \qquad [4\text{-}4]$$

Vemos também de [4-4] que a velocidade média, medida entre os instantes *t* e *t'*, ou seja, entre os pontos *A* e *B* é um vetor paralelo ao deslocamento $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$.

Exatamente como fizemos em uma dimensão, definimos velocidade instantânea em *t*, como o limite de uma série de velocidades médias, obtidas fazendo Δt cada vez menor, ou seja, fazendo *B* se aproximar de *A*, o que quer dizer tomando a velocidade média entre *A* e uma sucessão de ponto *B', B''*,... cada vez mais próximos de *A*. Isto equivale também a fazer *t'* tender a *t*, ou seja Δt tender a *0*.

Ver Fig. [4-2]. Podemos escrever então, como fizemos em uma dimensão:

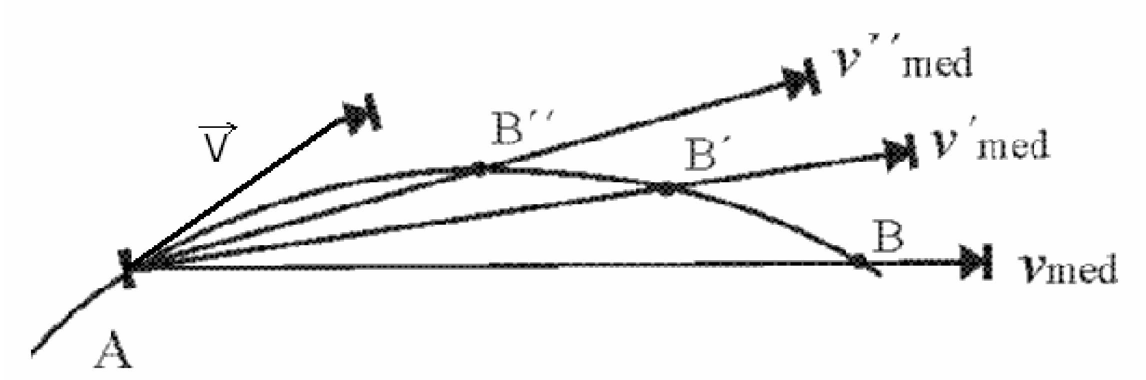

Fig. [4-2]

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad [4\text{-}6]$$

Nestas sucessivas médias cujo limite é $\vec{v}(t)$ ($\vec{v}$ no instante *t*), ou seja, a velocidade instantânea em *t*, o vetor $\Delta\vec{r}$ que inicialmente é $\overrightarrow{AB}$, vai se modificando e tomando os seguintes vetores= $\overrightarrow{AB}'$, $\overrightarrow{AB}''$... No limite quando *B* se aproxima infinitamente de *A*, o deslocamento $\Delta\hat{r}$ tem a direção da tangente à curva. A velocidade instantânea que é:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad [4\text{-}6]$$

É então um vetor paralelo à trajetória da partícula em *A*. Calculamos a velocidade instantânea em *A*, e supusemos que a partícula está em *A* no instante *t*. Da mesma forma que fizemos no caso unidimensional, também neste caso, podemos formar a função velocidade instantânea. Esta é a função que faz corresponder a cada instante, a velocidade da partícula neste instante (temos a sucessão de médias, e, portanto o limite, para cada instante). Indicamos igualmente como:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad [4\text{-}7]$$

Mas agora o *t* de $\vec{v}(t)$ é um instante *t* genérico (qualquer).

Vimos então que o vetor velocidade é em cada instante, paralelo à trajetória da curva. Então ele pode ser colocado na forma:

$$\vec{v} = \hat{u}_t v \qquad [4\text{-}8]$$

Onde *v* é o módulo do vetor velocidade e $\hat{u}_t$ é um vetor unitário na direção de $\vec{v}$ (lembrar que qualquer vetor pode ser escrito como o produto de seu módulo pelo seu versor, que é o vetor unitário na mesma direção).

Vamos mostrar [4-8] partindo de uma perspectiva diferente. Seja O_0 na Fig. [4-1] um ponto de referência (qualquer) na trajetória *C*. O comprimento $s = O_0 A$ dá a posição da partícula medida pela trajetória percorrida, a partir de O_0, ao longo da curva até o ponto *A*. Quando a partícula vai de *A* e *B* a trajetória percorrida Δs ao longo da curva, é dada pelo comprimento ao longo do arco *AB*. Tomemos a equação [4-6], a saber, $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$ e vamos multiplicar e dividir o segundo membro por Δs. Com isto,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \frac{\Delta s}{\Delta s}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

Onde pela propriedade do limite:

$$\vec{v} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) \qquad [4\text{-}9]$$

Colocamos no primeiro fator $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$, pois quando $\Delta t \to 0$ também $\Delta s \to 0$. Da Fig. [4-1] podemos ver que o módulo de $\Delta \vec{r}$ é aproximadamente o valor Δs, e esta aproximação é tanto melhor quanto mais próximo *A* estiver de *B*. Ou seja, na medida em que *B* de aproxima *A*, o módulo de vetor deslocamento vai se tornando igual ao espaço percorrido ao longo da trajetória. Portanto $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$ representa um vetor unitário, porque $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = 1$, na direção de $\Delta \vec{r}$, ou seja, na direção da tangente à curva. Por sua vez o

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ é a velocidade escalar da partícula (velocidade escalar instantânea) porquanto é o espaço percorrido pelo tempo. Então de [4-9] chegamos à:

$$\vec{v} = v\hat{u}_t$$

que é [4-7].

Aceleraçao

No movimento curvilíneo, a velocidade pode variar tanto em módulo quanto em direção. Em módulo porque podemos ter variação da velocidade escalar e em direção porque o vetor velocidade (estamos sempre submetendo velocidade instantânea) é sempre tangente à trajetória e esta tem, ou pode ter direção variável. A aceleração média no trecho *AB* é definida como $\vec{a}_{med} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$.

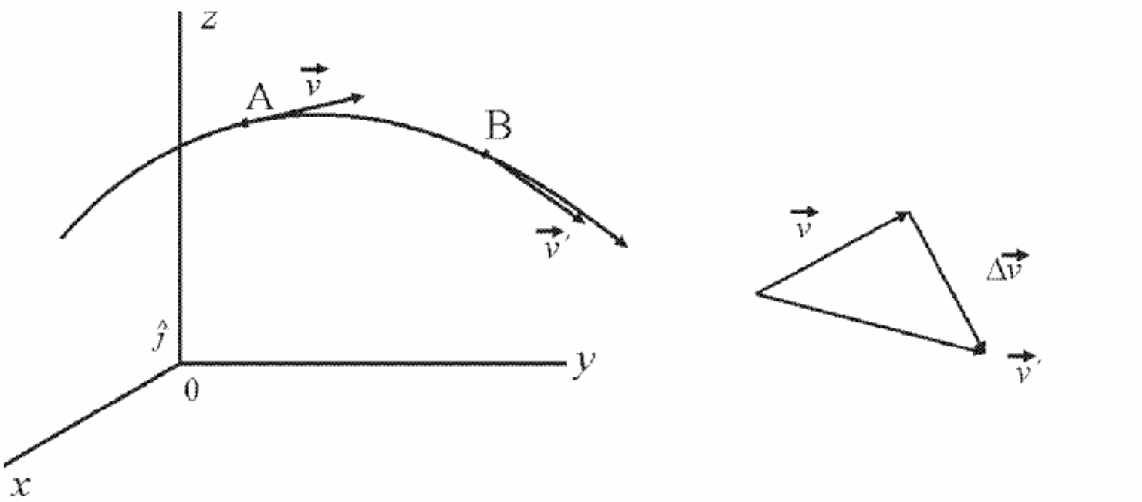

Fig. [4-3] (a) **Fig. [4-3] (b)**

Na Fig. [4-3] (a) estão representados os dois vetores velocidade em *A* e em *B*, respectivamente $\vec{v}$ e $\vec{v}'$, e em [4-3] (b) o vetor $\Delta\vec{v} = \vec{v}' = \vec{v}$ (Podemos ver que $\vec{v} + \Delta\vec{v} = \vec{v}'$).

Decompondo o vetor velocidade nos três eixos cartesianos, podemos escrever:

$$\vec{v} = \hat{u}_x v_x + \hat{u}_y v_y + \hat{u}_z v_z \qquad [4\text{-}10]$$

Onde $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ são os versores nas direções dos eixos (ou seja, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$, mas tomadas no ponto *A*) e v_x, v_y, v_z são as velocidades escalares segundo as direções *X, Y, Z*.

Então, lembrando que a aceleração média é dada por:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad [4\text{-}11]$$

podemos definir também, como fizemos para a velocidade a aceleração instantânea como:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad [4\text{-}12]$$

Notamos que da mesma maneira que para a velocidade tomamos inicialmente o limite em um ponto, fazendo, portanto, a sucessão de quocientes $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ com Δt cada vez menor, mas tomando $\Delta\vec{v}$ com a diferença de velocidade entre a velocidade em um determinado instante e os instantes seguintes. Em seguida podemos formar a função aceleração instantânea tomando este limite em diferentes pontos, ou seja, em diferentes instantes, e assim associando à cada instante uma determinada aceleração.

Então tendo em vista a expressão [4-10] da velocidade temos:

$$\vec{a} = \hat{u}_x \frac{dv_x}{dt} + \hat{u}_y \frac{dv_y}{dt} + \hat{u}_z \frac{dv_z}{dt} \qquad [4\text{-}13]$$

Lembrando que:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt}; \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Temos que:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}; \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}; \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \qquad [4\text{-}14]$$

Então:

$$\vec{a}_x = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{u}_z \qquad [4\text{-}15]$$

E o módulo da aceleração é:

$$|\,\hat{a}\,| = a = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y + a^2{}_z}$$

Se conhecermos a equação horária, ou seja, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, o que implica em conhecer as funções $x = x(t), y = y(t)$ e $z = z(t)$, podemos, por derivação encontrar $\vec{v} = \vec{v}(t)$ e $\vec{a} = \vec{a}(t)$. Se por outro lado conhecemos a aceleração, ou seja, temos $a_x = a_x(t),$ $a_z = a_{z(t)}$ e $a_z = a_{z(t)}$, podemos por integração achar $\vec{v}(t)\, e\, \vec{r}(t)$ (dependendo de duas constantes que são as condições iniciais).

Observação:

Quando tomamos na Fig. [4-2] os pontos*', B'', B'''*... cada vez mais próximos do ponto *A*, para finalmente chegar à conclusão que o vetor velocidade instantânea, que definimos como sendo $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, é um vetor tangente à trajetória, adoramos um procedimento parecido com aquele que tínhamos usado quando definimos a função $\frac{dx}{dt}$, derivada da equação horária *x=x(t)*. De fato, neste último caso, tínhamos tomado o gráfico da função *x=x(t)* (ver Fig. [4-4]).

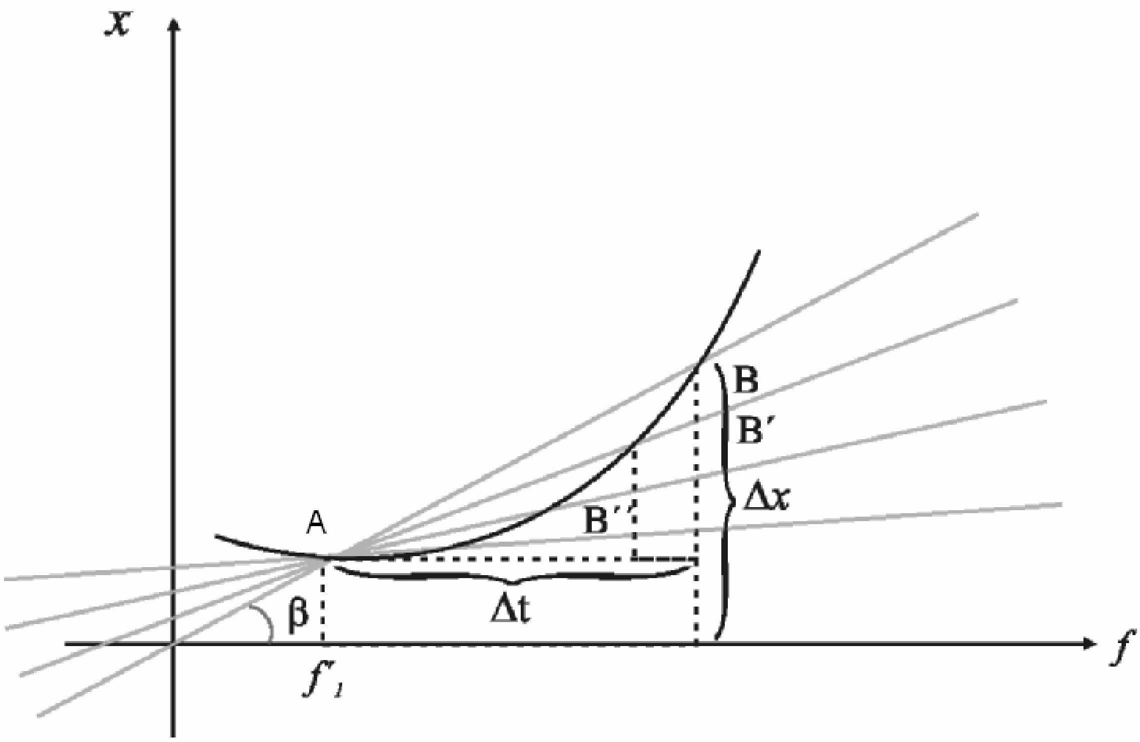

Fig. [4-4]

e considerado os sucessivos quocientes $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, tomados a partir dos pontos, *B, B', B''*... Enfim, fazendo o ponto *B* se aproximar de *A*, as retas secantes acabam se aproximando da tangente ao gráfico de *x=x(t)* no ponto t_1. E os quocientes, $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, que são os coeficientes angulares das sucessivas secantes, vão tender, quando $\Delta t \to 0$, ao valor $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t_1}$, que é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico *x=x(t)* (à curva que é o gráfico) no ponto t_1, e que é também a derivada de *x=x(t)* tomada no ponto t_1.

A diferença fundamental entre este último procedimento, e aquele da Fig. [4-2] é que a Fig. [4-2] representa a trajetória real da partícula no espaço. Já na Fig. [4-4] temos o gráfico da função *x=x(t)*, ou seja, trata-se de uma curva desenhada no espaço de configuração. Como vimos atrás, este movimento cuja equação horária relaciona uma única variável *x* com o tempo, é um movimento unidimensional. A representação deste movimento no espaço real é uma reta e não uma curva como na Fig. [4-4]. O vetor velocidade deste movimento tem a direção desta reta (por exemplo: o movimento de queda livre). É, portanto, um vetor tangente à trajetória, que no caso é a direção da própria reta. Obedece assim à mesma regra que tínhamos chegado com os procedimentos indicados na

Fig. [4-2] que $\vec{v}$ é o vetor velocidade e é tangente à trajetória. Só que na Fig. [4-2], quando estamos desenhando a trajetória do movimento cuja equação horária é $\hat{r} = \vec{r}(t)$, no espaço físico real, ou seja, é um desenho que representa a trajetória da partícula no espaço físico, não podemos tirar do desenho da Fig. [4-2] o valor da derivada $\frac{d\vec{r}}{dt}$ em um certo ponto t_1. Tiramos somente a direção da velocidade desenhada na mesma representação da trajetória da partícula no espaço físico.

E não podemos então calcular o valor da derivada de $\hat{r} = \vec{r}(t)$, ou seja, não podemos calcular o vetor $\vec{v}(t_1) = \frac{d\vec{r}}{dt}|_{t=t_1}$, que é o vetor velocidade instantânea $\vec{v}(t)$, tomado no ponto t_1? Claro que podemos.

Determinar um vetor é determinar sua direção e seu módulo. A direção, já determinamos no início desta aula (Aula 4) e usando o procedimento ilustrado na Fig. [4-2], concluímos que a direção de $\vec{v}(t_1)$ é a direção tangente à curva no ponto *A*.

Para achar o módulo, voltamos à fórmula [4-4] que é:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} \qquad [4\text{-}4]$$

Como a velocidade instantânea é o limite de sucessivas velocidades médias quando $\Delta t \to 0$ temos:

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}, \qquad [4\text{-}16]$$

onde assumimos que $\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$, $\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} e \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$, e está subentendido também que estamos tomando todos estes limites e, portanto as derivada em *A*, ou seja, em $t = t_1$. Recapitulando um pouco o que vimos acima, para representar a equação horária no espaço tridimensional, nos utilizamos de um vetor $\hat{r} = \vec{r}(t)$ que se exprime como:

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t\hat{k})$$

Para achar $\frac{d\vec{r}}{dt}$, temos então que achar cada uma das derivadas $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\ e\ \frac{dz}{dt}$. Fazendo o gráfico de cada uma destas funções, podemos adotar o procedimento que está ilustrado na Fig. [4-4], para cada uma destas funções, ou seja, achar, em cada caso, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no espaço de configuração, e este coeficiente angular é o valor de cada uma das derivadas em $t = t_1$. Determinamos então por este procedimento, aplicado a cada uma das funções $x(t), y(t)\ e\ z(t)$ os valores $\frac{dx}{dt}|_{t=t_1}, \frac{dy}{dt}|_{t=t_1}, \frac{dz}{dt}|_{t=t_1}$, que são respectivamente $v_x(t_1), v_y(t_1), v_z(t_1),$. Então o vetor $\vec{v}(t_1)$ se escreve:

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}_x(t_1)\hat{i} + \vec{v}_y(t_1)\hat{j} + \vec{v}_z(t_1)\hat{k}$$

E o seu módulo é:

$$v(t_1) = \sqrt{[v_x(t_1)]^2 + [v_y(t_1)]^2 + [v_z(t_1)]^2}$$

Voltando ao estudo da aceleração, vamos agora decompor a aceleração em uma componente tangencial (na direção da tangente à trajetória) e em uma componente normal à tangente. Na Fig. [4-5],

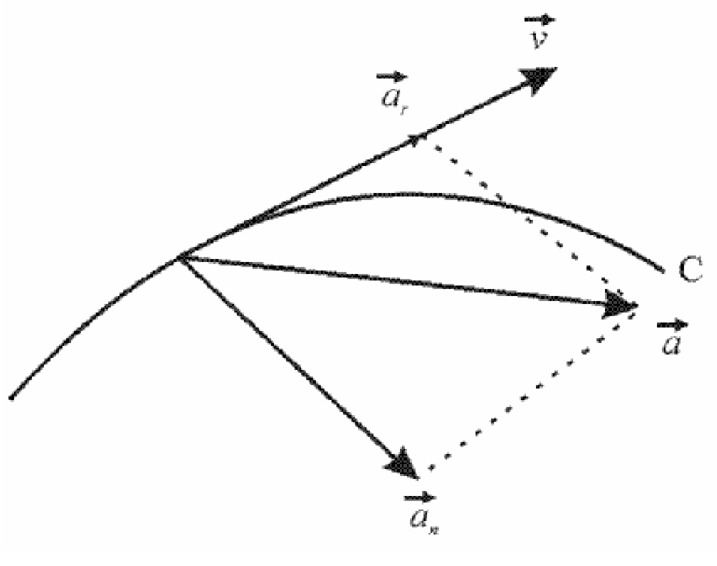

Fig. [4-5]

Representamos à trajetória de uma partícula ao longo de uma curva *C*, e desenhamos em um ponto *A* desta trajetória, o vetor velocidade $\vec{v}$ e o vetor aceleração, bem como as componentes normais e tangenciais de $\vec{a}, a_N \; e \; a_T$. Vemos que $\vec{a}$ aponta no sentido da concavidade da curva. Isto acontece sempre. Procure mostrar por que. Temos $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$. Por sua vez como $\vec{v}$ tem direção da tangente à trajetória podemos escrever (como já mostramos) $\vec{v} = \vec{u}_T v$ onde $\hat{u}_T$ é o vetor unitário na direção da tangente à curva no ponto *A*. Então:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{u}_T v) = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \frac{d\hat{u}_T}{dt} v \qquad [4\text{-}17]$$

Nesta última fórmula [4-17] reconhecemos imediatamente a componente tangencial $\hat{u}_T \dfrac{dx}{dt}$, que depende da variação do módulo da velocidade. A outra componente depende da variação de $\hat{u}_T$, portanto da variação da direção da trajetória. Na Fig. [4-6] vemos que sendo $\hat{u}_T$ um vetor unitário, $\hat{u}_x$ e $\hat{u}_z$ são os versores dos eixos *X* e *Y*. Temos que $\vec{A} = A\hat{u}_x$ e $\vec{B} = B\hat{u}_y$.

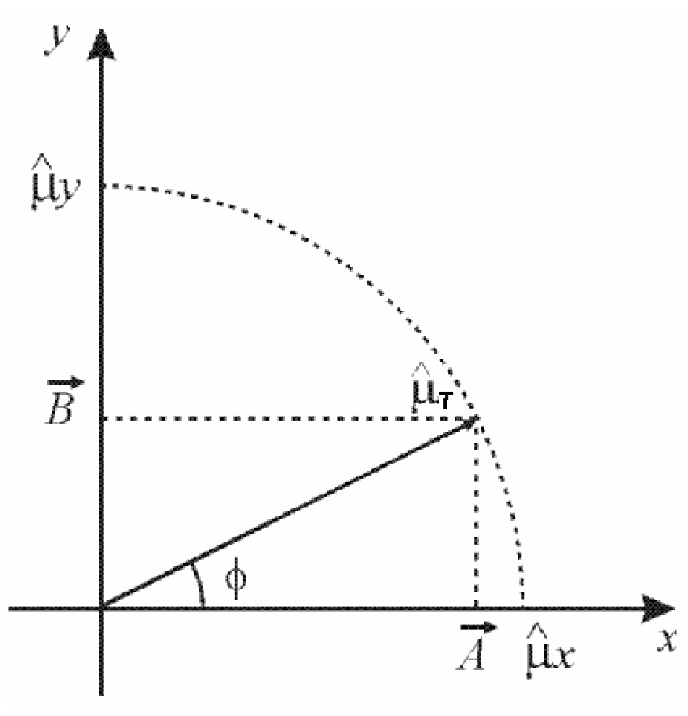

Fig. [4-6]

Mas:

$$\vec{u}_T = \vec{A} + \vec{B}$$

E temos ainda que, sendo:

$$u_T = 1 \quad \left(|\, \hat{u}_T \,| = 1\right)$$

Ficamos com:

$$A = \cos\phi \; e \; B = \operatorname{sen}\phi$$

Então:

$$\hat{u}_T = \cos\phi \, \hat{u}_x + \operatorname{sen}\phi \, u_y \qquad [4\text{-}17]$$

Na Fig. [4-18] desenhamos novamente a trajetória *C* e os vetores $\vec{a}$ e $\vec{v}$ (bem como $\hat{u}_N$ e $\hat{u}_T$) e definimos também o ponto *B* que é o centro de curvatura da trajetória em A. Por simplicidade, estamos assumindo que a trajetória *C* é uma trajetória plana, mas nossos resultados valem para qualquer trajetória no espaço. Como podemos ver na Fig. [4-7], o ponto *B* é obtido pela intercessão da normal à curva em *A* e da normal à curva em *A'* onde *A'* é um ponto situado a uma distância infinitesimal *ds* do ponto *A*, distância esta medida ao longo da trajetória.

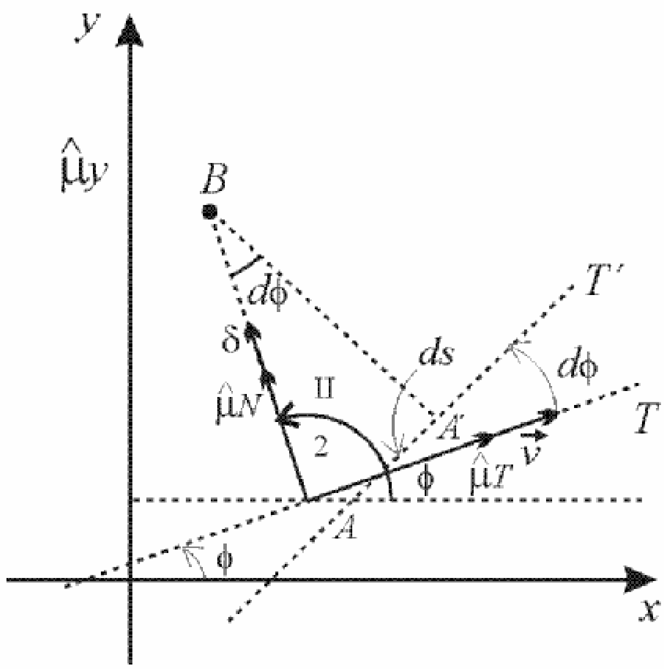

Fig. [4-7]

O vetor $\hat{u}_N$ é um vetor unitário de direção perpendicular à direção da tangente à trajetória no ponto *A*. Vemos então que ele faz um ângulo com o eixo *X* que é $\theta + \dfrac{\pi}{2}$. Então a decomposição de $\hat{u}_N$ em *X* e *Y* fornece, usando [4-17]:

$$\hat{u}_N = \hat{u}_x \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \hat{u}_y \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{u}_N = -\hat{u}_x \operatorname{sen}\theta + \hat{u}_y \cos\theta$$

Lembrando [4-17], ou seja, que $\hat{u}_T = \hat{u}_x \cos\theta + \hat{u}_y sen\theta$.

Temos:

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = -\hat{u}_x sen\theta \frac{d\theta}{dt} + \hat{u}_y \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \hat{u}_N \frac{d\theta}{dt} \qquad [4\text{-}18]$$

Vemos assim que $\frac{d\hat{u}_t}{dt}$ é normal à curva. Lembrando em seguida que *ds* é a distância infinitesimal *AA'* medida ao longo da curva no intervalo infinitesimal de tempo *dt* temos, pela regra da cadeia:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{ds}v \qquad [4\text{-}19]$$

Na última expressão ([4-18] usamos um resultado que já mostramos anteriormente, a saber, que a velocidade escalar *v* é $\frac{ds}{dt}$). Observemos ainda, na Fig. [4-7] que o ângulo entre a tangente à trajetória em *A* e a tangente à trajetória em *A'*, que chamamos de $d\theta$, é também o ângulo $A\hat{B}A'$ (Explique porque). Neste caso vemos na Fig. [4-7] que $ds = \rho\, d\theta$ onde $\rho = AB$ é o raio de curvatura da trajetória em *A*.

Então:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho} \qquad [4\text{-}20]$$

E substituindo esta expressão [4-20] em [4-19], ficamos com:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\rho} \qquad [4\text{-}21]$$

Agora substituindo esta última fórmula [4-21] em [4-18] ficamos com:

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \hat{u}_N \frac{v}{\rho} \qquad [4\text{-}22]$$

Por fim, colocando este último resultado [4-22] na expressão de $\vec{a}$ [4-17] obtemos:

$$\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} \qquad [4\text{-}23]$$

Esta expressão consiste na decomposição da aceleração, em uma componente tangencial que é proporcional à variação da velocidade escalar $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, e uma componente normal, que provem de $\frac{d\hat{u}_T}{dt}$, portanto, da variação da direção da trajetória ($\hat{u}_T$ é um vetor unitário na direção da tangente à trajetória) e por isto é inversamente proporcional ao raio de curvatura ρ (quanto maior o raio de curvatura, menor a variação da direção da trajetória). Os módulos destas componentes são $a_T = \frac{dv}{dt}$ $a_N = \frac{v^2}{\rho}$. Se o módulo da velocidade é constante não temos componente tangencial da aceleração (como é a aceleração do movimento circular uniforme?) se o movimento é retilíneo ($\rho \to \infty$) não há componente normal da aceleração.

Movimento de um projétil

Na superfície da Terra a aceleração da gravidade é, como já vimos, constante: é a constante *g*. Então para estudarmos o movimento de um projétil, próximo da superfície da Terra, vamos estudar o movimento com aceleração (que chamamos $\vec{a}$) constante. Vamos fazer um a dedução análoga à que fizemos no caso do movimento retilíneo, somente que agora lindando com vetores.

De $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, tiramos:

$$d\vec{v} = \vec{a}dt$$

Integrando, obtemos:

$$\int_{v_0}^{\vec{v}} d\vec{v}' \int_0^t \vec{a}dt' \qquad [4\text{-}24]$$

Em [4-24] já introduzimos a condição inicial que em *t=0* a velocidade é $\vec{v}_0$ ou seja, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$.

A equação [4-24] fornece:

$$\vec{v}\,|_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} = \vec{a}\int_0^t dt'$$

Porque $\vec{a}$ é constante. Então:

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}t$$

Ou seja:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \qquad [4\text{-}25]$$

A equação [4-25], que é uma equação vetorial, nos dá uma informação importante. Como o vetor $\vec{v}$ está sempre contido no plano de $\vec{v}_0$ e $\vec{a}$, que são dois vetores constantes, o vetor velocidade, em qualquer instante está sempre no mesmo plano. Isto significa que o movimento é plano (todo ele, ou seja, toda a trajetória está em um único plano). O resultado importante então que chegamos em [4-25] é:

"Um movimento no espaço com aceleração constante é um movimento plano"

Em seguida integrando à equação $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, temos:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' = \int_0^t \vec{v}\,dt' \qquad [4\text{-}26]$$

$$\vec{r}\,|_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t)\,dt'$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t'|_0^t + \vec{a}\frac{t'^2}{2}|_0^t$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad [4\text{-}27]$$

Observamos que em [4-26] introduzimos a outra condição inicial, qual seja, que em *t=0* o deslocamento da partícula é $\vec{r}_0$. A equação [4-27] é a equação de uma parábola como já mostramos. Assim o movimento de um projétil próximo à superfície da Terra (onde $\vec{g}$ é uma aceleração constante) tem a trajetória de uma parábola.

Estudemos em maior detalhe este movimento. Tomemos então $\vec{a} = \vec{g}$ e tomemos o plano do movimento, que, como vimos é o plano definido por $\vec{g}$ e $\vec{v}_0$, como aquele em que vamos situar os eixos coordenado *XY*.

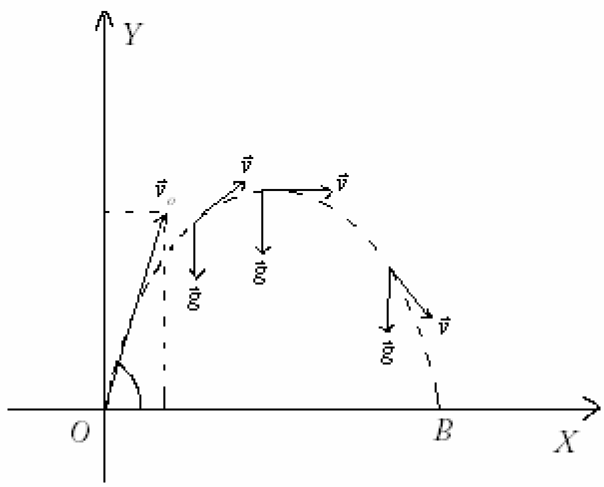

Fig. [4-8]

O eixo *X* está no nível da superfície da Terra (ou paralelo à superfície da Terra) e o eixo *Y* é, portanto perpendicular a esta superfície e dirigido para cima. Então:

$$\vec{g} = -\hat{u}_y g \qquad [4\text{-}28]$$

Onde $\vec{u}_y$ é o versor do eixo *Y* (vetor unitário na direção de *Y*) e g é módulo $\vec{g}$.

Podemos decompor $\vec{v}_0$ segundo os eixos *X* e *Y* e teremos:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{u}_x + v_{oy}\hat{u}_y \qquad [4\text{-}29]$$

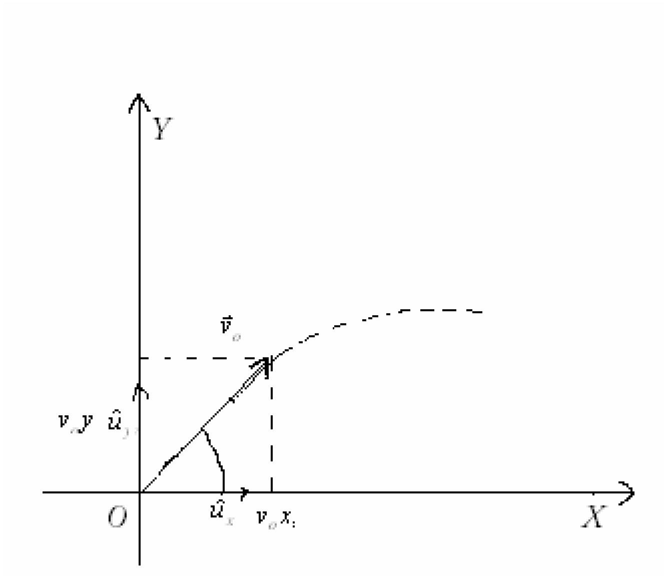

Fig. [4-9]

A Fig. [4-9] mostra esta decomposição. Vemos então que $v_{ox} = v_o \cos\alpha \;\; e \;\; v_{oy} = v_o \operatorname{sen}\alpha$.

Podemos igualmente decompor o vetor velocidade $\vec{v}$, ou seja, a velocidade em um instante *t* qualquer, segundo os eixos *X* e Y e neste caso teremos:

$$\vec{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y$$

Onde imediatamente reconhecemos v_x e v_y como as componentes de segundo *X* e *Y* e $\hat{u}_x$ e $\hat{u}_y$ são os versores de *X* e *Y* (que também temos chamado de $\hat{i}$ e $\hat{j}$).

Então a equação [4-25], a saber:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

onde colocaremos em lugar de $\vec{v}$, e $\vec{v}_0$ suas decomposições nos eixos *X* e *Y* e no lugar de $\vec{a}$, o vetor $\vec{g} = -\hat{u}_y g$, vai ficar:

$$v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y = v_{ox} \hat{u}_x + v_{oy} \hat{u}_y - gt\hat{u}_y \qquad [4\text{-}30]$$

Podemos separar esta equação [4-30] em duas equações escalares, igualando as componentes de X do primeiro membro com as de X do segundo, e as de Y do primeiro membro com as de Y do segundo e obteremos:

$$v_x = v_{ox}, \qquad v_y = v_{oy} - gt \qquad [4\text{-}31]$$

Como $\vec{v}_0$ é constante, v_{ox} é um valor constante. Então a primeira das equações [4-31], a saber, $v_x = v_{ox}$, nos mostra que a componente horizontal da velocidade $\vec{v}$, (ou seja, a componente segundo o eixo X) é constante. Isto era de se esperar porquanto não há aceleração nesta direção. Na verdade a decomposição do vetor velocidade nos eixos X e Y nos fornece a chave para a compreensão do movimento de um projétil. Trata-se da composição de um movimento horizontal uniforme, onde $v_x = v_{ox}$,, com um movimento vertical uniformemente acelerado, com $v_y = v_{oy} - gt$. Entendido isto podemos responder a qualquer questão sobre o movimento de projéteis.

Vamos decompor a equação [4-27] em suas duas equações escalares, obtidas tomando as componentes dos vetores segundo os eixos X e Y, e ao mesmo tempo, de acordo com as figuras [4-8] e [4-9] tomemos o início do movimento na origem do sistema de eixos (ponto 0,0), ou seja, façamos $\vec{r}_0 = \vec{o}$.

Então a equação vetorial:

$$\vec{r} = \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2,$$

lembrando que o vetor posição $\vec{r}$ é:

$$\vec{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y$$

e que $\vec{a}$ agora passa a ser a aceleração da gravidade.

portanto

$$\vec{a} = -g\hat{u}_y,$$

corresponde às duas equações escalares:

$$x = v_{ox} t \qquad [4\text{-}32]\ (a)$$

$$y = v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad [4\text{-}32]\ (b)$$

Com isto podemos responder a qualquer questão sobre o movimento de projéteis.

Para encontrar o tempo necessário ao projétil atingir a sua altura máxima, basta fazer $v_y = 0$ na equação [4-31].

Obtemos então:

$$t = \frac{v_{oy}}{g} \qquad [4\text{-}33]$$

Observemos que:

i) na altura máxima a velocidade $\vec{v}$ do projétil é horizontal. Não há componente vertical de velocidade e então v_y é zero.

ii) estamos admitindo agora que $\vec{v}_0$ é dado, e, portanto conhecemos v_{oy}.

Como $v_{oy} = v_0 sen\alpha$ onde α é o ângulo que a velocidade inicial (velocidade do lançamento) faz com a horizontal, temos também: (ver Fig. [4-9]).

$$t = \frac{v_0 sen\alpha}{g} \qquad [4\text{-}34]$$

Para obter a altura máxima basta substituir este valor de *t* (eq. [4-35]) na equação [4-32] (b). Obteremos assim:

$$y_{\max} = h = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

Fazendo $y = 0$ em [4-32] (b) vamos obter o tempo até que o projétil chegue ao chão. Este tempo chama-se tempo de trânsito. É claro que este tempo será o dobro daquele necessário ao projétil atingir a altura máxima. De fato podemos comprovar que o tempo de trânsito é $\dfrac{2v_0 sen\alpha}{g}$.

O alcance, ou seja, à distância em que o projétil vai cair do ponto de lançamento (*OB* na Fig. [4-8]) é obtido, substituindo o tempo de trânsito na primeira das equações [4-32] (b). Com isto temos:

$$R = v_{ox}\frac{2v_o sen\alpha}{g}$$

Como $v_{ox} = v_o \cos\alpha$, ficamos:

$$R = \frac{2v_0^2 \text{ sen } 2\cos\alpha}{g}$$
$$R = \frac{v_0^2 \text{ sen } 2\alpha}{g} \qquad [4\text{-}36]$$

Para achar o alcance máximo fazemos:

$$\frac{dR}{d\alpha} = 0$$

Então, temos:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{v^2{}_0 sen\ 2\alpha}{g}\right) = 0$$

$$\frac{v_0^2}{g}\frac{d}{d\alpha}(\text{sen } 2\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\frac{d}{d\alpha}(\cos 2\alpha)2 = 0$$

Desta equação tiramos:

$$\cos 2\alpha = 0$$

Ou seja,

$$\cos^2\alpha - \text{sen}^2 = 0$$
$$\cos^2\alpha = \text{sen}^2\alpha$$
$$\cos\alpha = \text{sen}\,\alpha$$

A solução desta equação no primeiro quadrante é $\alpha = 45^o$. Então o alcance máximo de um projétil lançado com velocidade inicial $\vec{v}_0$ é, para um dado valor de v_0, alcançado quando $\vec{v}_0$ faz um ângulo de 45° com a horizontal.

Eliminando o tempo nas duas equações [4-32] (a) e [4-32] (b), obtemos uma equação que relaciona *y* e *x*, ou seja, obtemos a equação da trajetória (trajetória do projétil no espaço físico). Esta equação é:

$$g = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + xtg\ \alpha \qquad [4\text{-}37]$$

que é a equação de uma parábola.

Exemplo:

Uma arma dispara um projétil com velocidade *200m/s* formando um ângulo de *40*° com o solo. Achar a velocidade e a posição do projétil depois de *20s*. Achar o alcance e o tempo de procura (Fig. [4-10]).

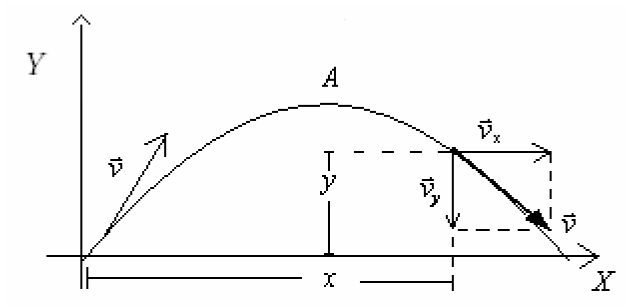

Fig. [4-10]

Solução: sendo $v_o = 200 \, m/s$ e $\alpha = 40°$ temos:

$$v_{ox} = v_o \cos \alpha = 153{,}2 \, m/s$$

$$v_{oy} = v_o \operatorname{sen} \alpha = 128{,}6 \, m/s$$

Então as componentes da velocidade em um instante qualquer *t*, são:

$$v_x = 153 \, m/s$$

$$v_y = (128,6 - 9,8t) \, m/s$$

Onde usamos as equações [4-31], e as coordenadas do projétil são:

$$x = (153,2t)m$$

$$y = (128,6t - 4,9t^2)m,$$

onde usamos [4-32].

Para *t=20 s,* temos então:

$$v_x = 153,2 \, m/s$$

$$v_y = -67,4 \, m/s$$

Onde o fato de v_y ser negativo significa que o projétil está descendo. O módulo da velocidade é:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 167,4 \, m/s$$

Usando também as fórmulas que deduzimos, vemos que a altura de *A* (altura máxima) é *843,7m* o alcance *OB* é *4021m* e o tempo de trânsito entre A e B é *26,24s.*

4.2 RELATIVIDADE DE GALILEU. RELATIVIDADE DE EINSTEIN

A famosa polêmica de Galileu com a Igreja a respeito da mobilidade da Terra, e que descrevemos em detalhe na primeira aula, adquiriu, como vimos, um caráter teológico graças à interpretação fundamentalista da Igreja da época.

Mas a par desta polêmica, a visão de Galileu de que a Terra se move, constituiu-se em uma enorme revolução científica. Negando a idéia de que a Terra é imóvel, Galileu aboliu o conceito de um referencial absoluto e introduziu pela primeira vez a idéia de relatividade do movimento. Expliquemos:

Na visão aristotélica de uma Terra imóvel, esta se tornava um referencial absoluto. Quando dizíamos que um corpo não se movia, ou que tinha certa velocidade, isto significava que ele não se movia ou tinha uma certa velocidade com relação a Terra, a qual era considerada, na visão de Aristóteles, imóvel. Podíamos assim simplesmente dar a velocidade de um corpo e estava subentendido que esta velocidade se referia a Terra. Desta maneira, a Terra, imóvel no centro do universo, era um referencial absoluto com relação ao qual se media a velocidade de qualquer corpo.

Para Galileu, entretanto, a Terra se movia, e ele compreendeu que não dispúnhamos de um referencial imóvel, com relação ao qual pudéssemos especificar qualquer velocidade. Não dispondo, portanto, de um referencial absoluto, toda vez que damos o valor da velocidade de um corpo, temos que mencionar com relação a que referencial estamos dando este valor. Todo movimento é relativo, toda velocidade, e, portanto, todas as equações da mecânica, só tem sentido quando especificamos um referencial previamente escolhido, no qual estas equações são válidas.

Mas Galileu foi mais longe. Ele introduziu a idéia de Relatividade que mais tarde é recuperada de forma modificada por Einstein em sua teoria da Relatividade. Segundo a Relatividade de Galileu, as leis da Física são as mesmas em dois referenciais que se movem um em relação ao outro com velocidade retilínea uniforme[6]. E as equações que representam estas leis são as mesmas quando transformadas segundo as fórmulas de transformação chamadas de transformação de Galileu, e que passaremos agora a explicar.

Seja (Fig. [4-11] dois referenciais (x, y, z) e (x', y', z')), e vamos supor que o referencial (x', y', z') tem velocidade $\vec{v}$ com relação ao referencial (x, y, z), onde $\vec{v}$ é um vetor na direção do eixo *x* e que a orientação dos eixos dos dois referenciais é a mesma.

[6] Com isto fica claro que Galileu já caminhava para o conceito de referencial inercial. Discutiremos este conceito na 5ª aula.

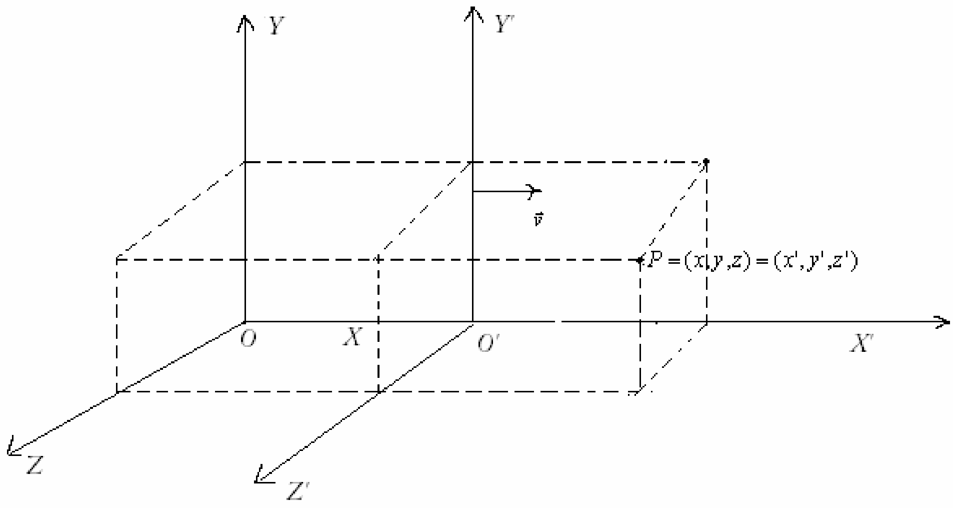

Fig. [4-11]

Tomando um ponto *P* no espaço e sejam (x, y, z) as coordenadas de *P* no referencial (X,Y,Z) e (x', y', z') as coordenadas de P (X', Y', Z'). Supomos ainda que no instante *t=0*, os dois referenciais eram coincidentes, ou seja, a origem *O* e *O'* estavam no mesmo ponto. A Fig. [4-11] está desenhada em um instante qualquer *t*. Vemos que neste instante à distância *OO'* é *vt*. Neste caso vemos também examinando [4-11] que existem as seguintes relações entre as coordenadas (x, y, z) e (x', y', z') dadas por:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad [4\text{-}38]$$

As fórmulas [4-39] constituem a chamada "Transformações de Galileu". Derivando as equações [4-38] vamos obter a lei de transformações de velocidade:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x - Vt)}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d(Vt)}{dt}$$

$$v'_x = v_x - V$$

Ao mesmo tempo:

$$v'_y = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} = v_y$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} = v_z$$

Então as fórmulas de transformação de velocidade são

$$\begin{cases} v'_x = v_x - V \\ v'_y = v_y \\ v'z = v_z \end{cases} \qquad [4\text{-}39]$$

Observação:

Estamos considerando, como é usual fazer, que a velocidade do referencial X', Y', Z' com relação ao X, Y, Z é na direção do eixo X que coincide com o X'.

Podemos fazer isto sem perda de generalidade porquanto qualquer que seja o vetor $\vec{V}$, que exprime a velocidade do referencial X', Y', Z' em relação à X, Y, Z, podemos sempre tomar o eixo X (e, portanto, também o X') na direção do vetor $\vec{V}$.

Sem perda de generalidade – usa-se esta expressão toda vez que fazemos uma demonstração admitindo certas condições ou certas premissas, mostramos que estas condições ou premissas podem ser assumidas sempre. Então nossa demonstração não é de um caso particular, mas uma demonstração de validade geral.

As regras de transformação [4-39] são bastante óbvias. De fato seja (Fig. [4-12]) um passageiro em um vagão.

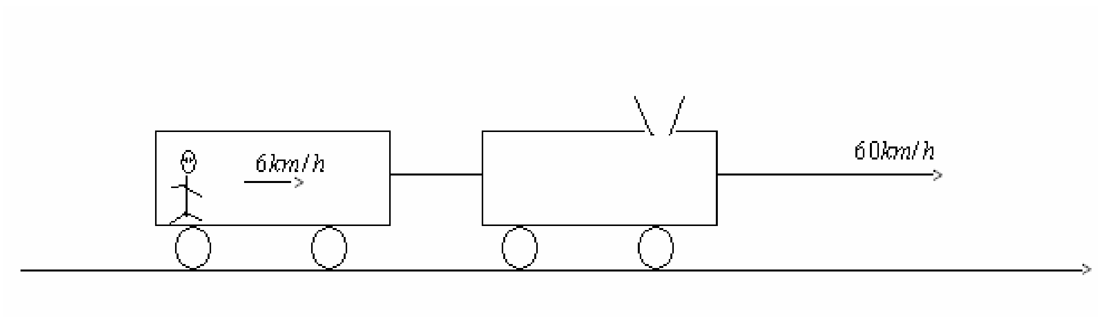

Fig. [4-12]

Suponhamos que a velocidade do passageiro com relação ao vagão seja de $6km/h$, na mesma direção do movimento do trem que é de $60km/h$ (com relação ao chão). Então é claro que a velocidade do passageiro em relação ao chão é de $66 km/h$. Verifique que ao fazermos esta conta estamos usando a transformação [4-39].

Relatividade de Einstein

Na Teoria da Relatividade de Einstein também as leis da física são as mesmas em dois referenciais que se movem um com relação ao outro com velocidade *V*. Porém, quando transformamos as equações que descrevem uma lei em um referencial (X, Y, Z) para o referencial (X', Y', Z'), para que as equações permaneçam as mesmas, devemos usar não a transformação de Galileu, mas uma outra transformação chamada "Transformação de Lorentz". Tomando uma situação idêntica à da Fig. [4-11] a transformação de Lorentz é:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \left(V/c^2\right)}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} x \end{cases} \qquad [4\text{-}40]$$

Notemos que comparando a transformação de Lorentz [4-40] com a de Galileu [4-38], vemos que na transformação de Lorentz a coordenada *x* se transforma na *x'* de maneira semelhante, somente que aparecendo um fator $1 \Big/ \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}$, onde *c* é a velocidade de luz.

Na teoria da Relatividade de Einstein a velocidade da luz no vácuo é uma constante *c* (aproximadamente 300.000 *km/s*) e não depende do referencial. (Ou seja, é a mesma em qualquer referencial), Vemos ainda que em [4-40] existe um tempo *t'* relacionado ao referencial (X', Y', Z'). De fato este é um dos pontos importantes da Teoria da Relatividade, não existe um tempo universal absoluto e por isto temos que transformar também a coordenada tempo. No estudo dirigido que colocarmos nas atividades desta aula, os alunos serão orientados para fazer uma dedução desta transformação, portanto, de dois postulados de Einstein. Vamos deduzir as fórmulas de transformação de velocidade que decorrem da transformação de Lorentz.

Chamando:

$$\gamma = \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}$$

Onde $\beta = \frac{V}{c}$.

A transformação de Lorenz então fica:

$$x' = \gamma\left(x - \beta c t\right); \quad y' = y; \, z' = z; \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x'}{c}\right) \qquad [4\text{-}41]$$

A transformação inversa é:

$$x = \gamma\left(x' + \beta c t'\right); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right) \qquad [4\text{-}42]$$

(Explique porque esta é a transformação inversa!)

(Sugestão: a transformação inversa é obtida tomando a velocidade de sistema *XYZ* com relação *X'Y'Z'*). Temos:

$$dx = \gamma\, dx' + \gamma\, \beta\, c\; dt'$$

$$dt = \gamma\, dt' + \frac{\gamma\, \beta\, c\; dx'}{c}$$

Então:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma\, dx' + \lambda\, \beta\, c\, dt'}{\gamma\, dt' + \gamma\, \beta \frac{dx'}{c}} \qquad [4\text{-}43]$$

Dividindo numerador e denominador de [4-43] por *dt'*, obtemos:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \qquad [4\text{-}44]$$

E analogamente? (fazer!).

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - v_x V/c^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

(Fazer estas duas últimas deduções!).

As inversas são (Explique por que!).

$$v_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x \, V/c^2}$$

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

Podemos ver, com a transformação de velocidade que deduzimos da transformação de Lorentz, que de fato a velocidade da luz é a mesma nos dois referenciais. De fato, seja $v'_x = c$ a velocidade de um fóton no referencial (X*' Y' Z')*. Então usando [4-44].

Temos:

$$v_x = \frac{v_x + V}{1 + \frac{cV}{c^2}} = c$$

Esta transformação leva a outras propriedades curiosas (que na verdade tinham sido observadas antes da transformação estar completada e que levaram a ela).

A primeira é a contração de comprimentos. Tomemos uma régua ao longo do eixo X, do referencial XYZ tomado como aquele de referência (suposto imóvel). Chamemos este comprimento da régua de L_0, e sejam x_2 e x_1 a medida dos dois extremos da régua no eixo X.

Vejamos como é medido o comprimento da régua no referencial X'Y'Z' que se move com relação à XYZ com velocidade V na direção do eixo X. O comprimento será a distância entre os extremos da régua medidas no eixo X' em um dado instante t'. Sendo $x'_2(t')$ e $x'_1(t')$ a localização destes extremos no eixo X' no instante t', o comprimento da régua medido em X'Y'Z' será:

$$L = x'_2\,(t') - x'_1\,(t')$$

Mas lembrando [4-42] que é:

$$x = \gamma\,(x' + \beta\,c\,t'); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta\,x'}{c}\right)$$

Vemos que:

$$x_2 = \gamma\,(x'_2\,(t') + \beta\,c\,t')$$

$$x_1 = \gamma\,(x'_1\,(t') + \beta\,c\,t'),$$

E então:

$$x_2 - x_1 = \gamma\,x'_2\,(t') + \gamma\,x'_1\,(t')$$

$$x_2 - x_1 = \gamma\,[x'_2\,(t') + x'_1\,(t')]$$

Ou seja,

$$L_0 = \gamma\,L,$$

Ou ainda:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\left(1 - \beta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Como $\left(1 - \beta^2\right)^{\frac{1}{2}}$ é um número menor que um, vemos que L é menor que L_0. Isto quer dizer que a mesma régua quando vista e medida de um referencial com relação ao qual ela se move com uma certa velocidade, aparece contraída por um fator $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$.

Por sua vez o tempo no referencial *X'Y'Z'* que se move com velocidade V com relação ao referencial *XYZ*, tem sua medida dilatada. Vejamos por que. Consideremos um relógio em repouso no referencial *XYZ*. O resultado da medida de tempo no referencial em que o relógio está em repouso é sempre designado pela letra grega τ (se diz “tau”) e é denominado de *intervalo de tempo próprio*. Suponhamos que o relógio, em repouso no sistema

XYZ está na origem deste sistema (no ponto (0,0,0)). De acordo com a transformação de Lorentz [4-41].

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x'}{c}\right) \quad [4\text{-}45]$$

E como estamos supondo o relógio na origem de *XYZ* então *x=0,* e ficamos com:

$$t' = \gamma\, \tau$$

pois o t do segundo membro de [4-45] é o tempo próprio (o tempo do relógio em *XYZ)* τ . Então:

$$t' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta}}$$

e como $\sqrt{1-\beta^2}$ é um número menor que 1, o tempo *t'* é maior que o tempo τ .

Podemos, com um raciocínio simples, entender como impondo que a velocidade da luz seja a mesma da luz seja a mesma nos dois referenciais *S* e *S'* (daqui por diante chamaremos de *S* o referencial *XYZ* e *S'* o referencial *X'Y'Z'*) vamos ter que admitir que o tempo medido em *S'* passe mais devagar (ou é mais comprido) que o tempo em *S*.

Suponhamos um raio luminoso partindo de um ponto no referencial *S*, percorrendo uma distância *L* neste referencial em uma direção paralela ao eixo *Y* e sendo refletido em *L* por um espelho paralelo ao plano *XZ* e então retornando ao ponto inicial. No sistema *S* ele percorreu a distância *2L* e como a velocidade é *c*, o tempo deste percurso medido em *S* é:

$$\tau = \frac{2L}{c}$$

Consideremos agora este mesmo percurso visto do referencial *S'* e seja *t'* o tempo deste percurso do raio médio no referencial S'. Como o referencial *S'* se move na direção do eixo *X* com velocidade *V* em relação ao referencial *S* enquanto o raio parte de *A* e atinge o espelho em *B* no referencial *S*, é decorrido metade do tempo de percurso, o que no referencial *S'* é o tempo $\frac{\tau'}{2}$.

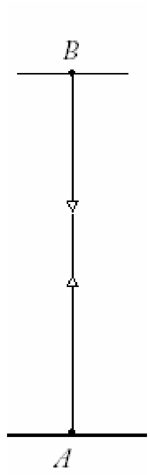

Fig. [4-13]

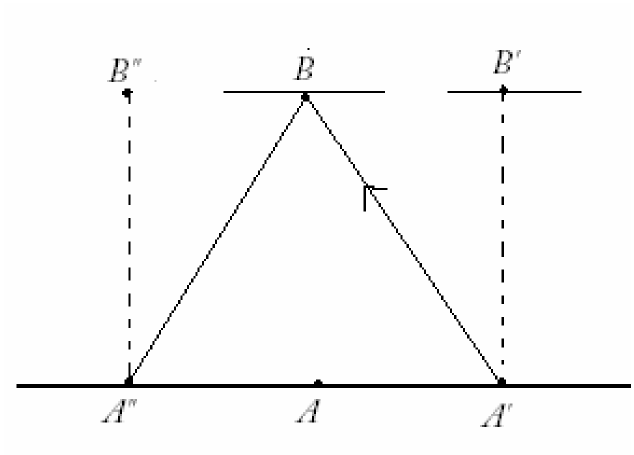

Fig. [4-14]

Em S o percurso é A até B e voltando a A.(Fig. [4-13])

Em S' o percurso do raio é visto como estamos mostrando na Fig. [4-14]

Mas durante o tempo $\frac{t'}{2}$ o referencial *S* andou $V\frac{t'}{2}$ para a direita (nas nossas figuras), de maneira que os pontos *A* e *B* estão $V\frac{t'}{2}$ à esquerda do que estavam no início do movimento e o percurso é o que está representado na Fig. [4-14]. Os pontos *A'* e *B'* são as posições dos pontos *A* e *B* no referencial *S*, vistos no referencial *S'* no momento que o raio saiu da fonte, e os pontos *A* e *B* são as posições de *A* e *B*, vistos do referencial *S'* no momento que o raio é refletido no espelho. Finalmente *A' B'* são as posições de *A* e *B*, vistos no referencial *S'*, no momento que o raio voltou ao plano *XZ*. Você pode ainda se convencer melhor que o trajeto do raio visto em *S'* é este que desenhamos na Fig. [4-14], imaginando, ou melhor, ainda fazendo a seguinte experiência.

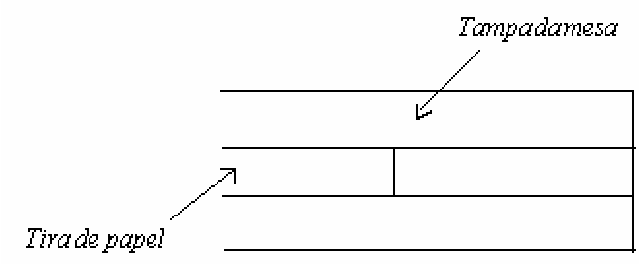

Fig. [4-15]

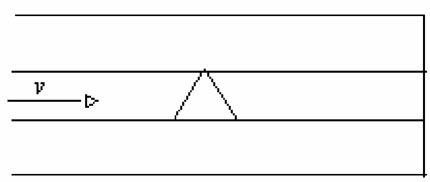

Fig. [4-16]

Seja na Fig. [4-15] o tampo de uma mesa na qual está uma tira de papel que na Fig. [4-15] está imóvel. Nesta tira de papel nós desenhamos com uma caneta que se desloca em uma direção perpendicular à tira, de uma borda da mesma até a outra e depois voltando.

Na Fig. [4-16], a tira se movimenta com relação à mesa com uma velocidade *V* e nós desenhamos um traço com a mesma direção que é uma direção paralela à borda direita da mesa. Mas, agora, como a tira está se movendo para a direita, resulta na tira um traço como está mostrado na Fig. [4-16]. Este traço é análogo à trajetória *A'B A"* do nosso raio de luz visto na Fig. [4-14].

Então o problema é que o raio luminoso entre o instante em que partiu de *A* e voltou a *A*, percorreu no referencial *S* uma distância *2L* (chamando a distância de *A* à *B* de *L*) enquanto que no referencial *S'*, entre estes mesmos dois instantes percorreu a distância *A' BA"* que é maior que *2L*. Teríamos então que concluir que a velocidade da luz é maior no referencial *S'*. Mas postulamos que a velocidade da luz é a mesma nos dois referenciais, e este é um dos postulados básicos da Teoria da Relatividade e Einstein, postulado que como comentaremos em seguida é em parte decorrente de observações experimentais. Como conciliar estas duas coisas? Se o espaço, para *S'*, é maior, a única maneira de a velocidade ser a mesma, é que o tempo medido entre o instante que o raio saiu e depois de refletido voltou ao plano *XZ*, seja maior quando medido em *S'* que quando medido em *S*. Assim o numerador, que é o espaço medido em *S'* é maior, mas o denominador, que é o tempo medido em *S'* também é maior e temos tanto em *S* quanto em *S'* a mesma velocidade da luz *c*. Vemos assim que admitindo que a velocidade da luz seja a mesma em referenciais que se movem um em relação ao outro com velocidade *V*. Somos forçados a admitir que o tempo tenha medidas diferentes nestes dois referenciais.

E podemos calcular em quanto vai importar esta dilatação temporal. Na figura. [4-17], a distância *AA'* é $V\frac{t'}{2}$, pois *t'* é o tempo total de percurso do raio (ida e volta) em *S*. Então, a hipotenusa do triângulo *AA'B*, ou seja, o segmento *A'B* é $\left[L^2+\left(\frac{Vt'}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ (Pitágoras).

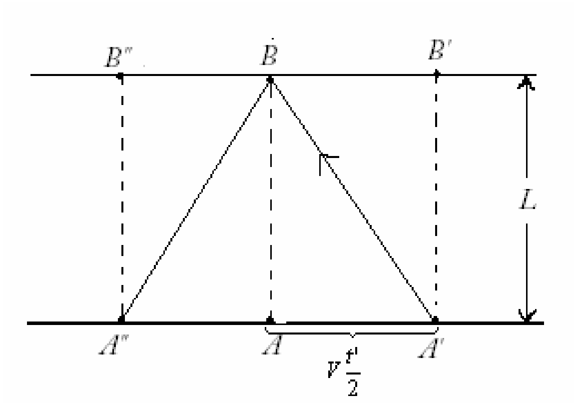

Fig. [4-17]

E o percurso total do raio visto em *S'*, tem comprimento:

$$2\left[L^2+\left(\frac{Vt'}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Este percurso é percorrido em um tempo *t'* a uma velocidade c. Então este percurso é *ct'*, ou seja,

$$2\left[L^2+\left(\frac{Vt'}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=ct'$$

Donde então:

$$(ct')^2=4\left[L^2+\left(\frac{Vt'}{2}\right)^2\right]$$

$$(ct')^2=4L^2+(Vt')^2$$

E tiramos:

$$4L^2=c^2t'^2-V^2t'^2$$

$$4L^2=t'^2\left(c^2-V^2\right)$$

Extraindo a raiz:

$$2L=t'\sqrt{c^2-V^2}$$

Donde:

$$t' = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

Lembrando que $\beta = \frac{V}{c}$, temos que $V^2 = \beta^2 c^2$.

Logo:

$$t' = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - \beta^2 c^2}}$$

$$t' = \frac{2L}{\sqrt{c^2 \left(1 - \beta^2\right)}}$$

$$t' = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \beta^2\right)}}$$

Lembrando que $\frac{2L}{c}$ é o tempo total de percurso medido em *S*, ou seja, é o tempo próprio τ e que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \beta^2\right)}}$ a última expressão fica:

$$t' = \tau \gamma,$$

que é a expressão que havíamos obtido antes aplicando diretamente a transformação de Lorentz.

É importante notar que todos estes efeitos, que nos parecem bastante estranhos, foram constatados experimentalmente. Uma importante experiência que comprovou a questão da dilatação temporal é o decaimento dos méson π^+. O méson π^+ é uma partícula elementar instável que decai em um méson μ^+ e um neutrino. (A letra grega μ se pronuncia mu onde este u tem um som entre u e i). O méson π^+ tem no seu sistema de repouso uma vida média de cerca de $2{,}5 \times 10^{-8} seg$. Expliquemos tudo isto. O π^+ é uma partícula instável que decai em μ^+ e um neutrino. Isto quer dizer que a partícula π^+ se transforma espontaneamente em uma outra partícula, o μ^+ e em um neutrino. A vida média é o tempo em que metade da amostra total decai, ou se transforma em μ^+ e neutrino. Tomando em π^+ individualmente, não podemos saber quanto tempo ele continuará como π^+, não podemos saber quanto tempo demora para que um determinado π^+ se transforme em μ^+ e neutrino. Mas podemos saber que dada uma amostra estatisticamente significativa depois de certo tempo (no caso do π^+) metade da amostra se transformou em μ^+ e neutrino.

Estatisticamente significativa: com um número suficientemente grande para que sejam válidos os procedimentos estatísticos.

Mas $2{,}5 \times 10^{-8}\,seg$, é a vida média medida no referencial do π^+ (ou seja, é o tempo próprio – a vida média própria). Mas o feixe de mésons π^+ viaja a uma velocidade $\beta \cong 0{,}9c$ (nove décimos da velocidade da luz). Então a vida média medida no laboratório é:

$$t' = \tau\,\gamma = \frac{2{,}5 \times 10^{-8}}{\sqrt{1 - 0{,}81}} \cong 5{,}7 \times 10^{-8}\,seg$$

E de fato, medindo a vida média no laboratório, encontrou-se um tempo em excelente concordância com este valor.

RESUMO

Na primeira parte desta aula, estudamos a cinemática ao espaço bi e tri-dimensional. Com isto foi importante ter em mente as propriedades dos vetores. Projetamos estes vetores nos eixos coordenados mostrando então que uma equação vetorial corresponde a duas equações escalares se se trata do espaço bidimensional, a três equações escaleres no caso tridimensional.

Partindo da observação que a velocidade de uma partícula no espaço é sempre um vetor tangencial à trajetória (este fato foi mostrado tanto geométrica quanto algebricamente) calculamos as componentes normal e tangencial da aceleração.

Estudemos em seguida a questão do lançamento de projéteis na superfície da Terra. Mostramos que este movimento é um movimento plano e pode ser decomposto em um movimento retilíneo uniforme e em um movimento vertical uniformemente acelerado. A partir daí tiramos todos os parâmetros relevantes deste movimento e aplicamos em uma lista de problemas típicos.

Resultamos ainda o sentido histórico deste estudo ligado à arte militar.

Na segunda parte desta 4° Aula, estudamos a Relatividade de Einstein, mostramos os paralelos e as diferenças entre as colocações das duas relatividades. Admitindo a transformação de Lorentz mostramos, invertendo a construção histórica, algumas conseqüências notáveis desta transformação: a contração do espaço e a dilatação do tempo.

Nas atividades, além dos problemas clássicos de Relatividade, apresentamos, na forma de um estudo dirigido, uma dedução da Transformação de Lorentz a partir dos dois postulados de Einstein.

CONCLUSÃO

A extensão da cinemática de um espaço unidimensional para um espaço tridimensional não introduz nenhuma mudança conceitual, mas sim situações que só podem ser estudadas com o domínio a nível introdutório, do calculo vetorial.

Na comparação das duas relatividades de Galileu ou Einstein, temos conclusões muito importantes.

1- O enorme significado para a Física, da colocação de Galileu de que não só a terra não é imóvel, como que não existe um referencial absoluto e que todo movimento é relativo.

2- O alcance enorme da Teoria da Relatividade de Einstein quando mostra que também não há um absoluto temporal, mas sim, que o tempo se transforma quando passamos de um referencial para outro.

ATIVIDADES

Tratamento vetorial, projéteis.

1 - Desenhe a trajetória de uma partícula em um espaço tridimensional. Defina o vetor posição no ponto A e no ponto B e defina o vetor deslocamento $\Delta\vec{r}$ entre A e B. Mostre então que:

$$\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$$

(Observação: esta questão, e muitas outras deste questionário consiste em simplesmente explicar com suas palavras o que está no texto).

2 - Defina velocidade média e velocidade instantânea, e mostre porque a velocidade instantânea é sempre um vetor paralelo à trajetória. Qual a diferença essencial entre a Fig. [4-2] e a figura análoga que fizemos quando definimos velocidade instantânea no caso unidimensional?

3 - Explique como partindo da velocidade instantânea definida em certo instante (ou seja, do vetor velocidade instantânea em certo instante) podemos formar a função velocidade instantânea, ou seja, o vetor velocidade instantânea função do tempo *t,* ou seja,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

4 - Explique, com os resultados obtidos porque podemos escrever: $\vec{v} = \hat{u}_T v$. (Explique quem é $\hat{u}_T$ e que é v). Mostre em seguida, como se pode chegar a esta relação ($\vec{v} = \hat{u}_T v$) por outro raciocínio. (Explique em detalhe este outro raciocínio).

5 - Defina aceleração média e aceleração instantânea (na forma vetorial) e mostre que:

$$\vec{a} = \hat{u}_x \frac{dv_x}{dt} + \hat{u}_y \frac{dv_y}{dt} + \hat{u}_z \frac{dv_z}{dt}$$

(Observe que estamos chamando os versores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ de $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$).

6 - Derivando $\frac{dv}{dt}$, ou seja, fazendo $\frac{d(v\hat{u}_T)}{dt}$, e repetindo todo o raciocínio do texto, mostre que a componente tangencial da aceleração é $a_T = \frac{dv}{dt}$ e a componente normal é $a_N = \frac{v^2}{\rho}$ onde ρ é o raio de curvatura da trajetória no instante em que estão sendo calculadas estas componentes.

Movimento de um projétil

7 - Partindo de um vetor aceleração dado como sendo $\vec{a}$ = constante, e das condições de contorno que em $t = 0$ o vetor posição é $\vec{r}_0$ e a velocidade é $\vec{v}_0$, deduza por integração (definida) que:7 -

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 .$$

Qual é uma característica importante deste movimento e como você pode chegar a ela.

8 - Explique porque o movimento de um projétil é a composição de um movimento retilíneo uniforme na direção horizontal e um movimento retilíneo uniformemente acelerado na direção vertical. Explique inicialmente em palavras e em seguida deduza as fórmulas [4-31], a saber, $v_x = v_{ox}$ e $v_y = v_{oy} - gt$.

Desenhe a trajetória de um projétil no espaço físico. Em diversos pontos desta trajetória desenhe o vetor velocidade e mostre (no desenho) suas componentes horizontal e vertical.

9 - Dado o vetor velocidade inicial $\vec{v}_0$, ou seja, dado seu módulo v_0 e o ângulo α que este vetor faz com a horizontal, deduza o tempo de trânsito e o alcance do projétil.

10 - Seja um canhão capaz de lançar projéteis à velocidade de *30m/s*. Fazendo um ângulo de *30*° com a superfície da terra, ele atinge um ponto, no plano desta superfície, que está *10m* além do alvo, que pretende atingir. Qual o ângulo que ele deve fazer com a superfície da terra, para atingir o alvo?

Observação: este é um problema típico, diríamos mesmo o problema básico, de artilharia. O estudo do movimento de projéteis tem uma importância histórica ligada à arte militar. Desde a antiguidade as batalhas eram abertas lançando projéteis sobre o inimigo, sejam flechas, lanças ou grandes pedras por meio de catapultas. Naturalmente as noções de ângulos de lançamento e sua relação com o alcance eram conhecidos intuitivamente e pela experiência. Leonardo da Vinci, que foi um desenhista e engenheiro extraordinário, soube equacionar o problema com rigor científico. Mas é com a mecânica de Galileu e Newton, que o problema é matematizado e definitivamente resolvido.

11 - Eliminando o tempo das equações [4-32] (a) e [4-32] (b) escreva *y* como função de *x* que é a função que dá a trajetória do projétil. Verifique, comparando como o que você viu na aula 2, que trata-se de uma parábola.

12 - Um projétil é disparado do topo de um edifício de *200m* de altura. A velocidade inicial é *60m/s* e a direção faz um ângulo de *60°* com a horizontal. A que distância do edifício o projétil atinge o solo? (Ver Fig. [4-18]).

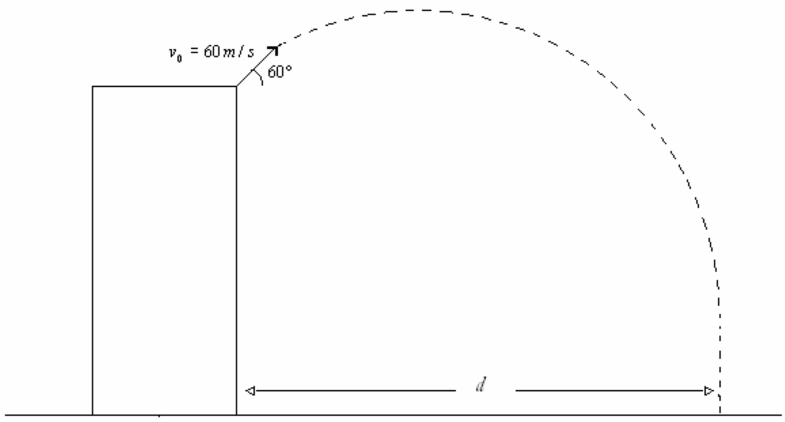

Fig. [4-18]

A distância pedida é *d*.(Ou seja, calcular *d*).

13 - Um helicóptero descarrega suprimentos para uma tropa acampada na clareira de uma floresta. A carga vai do helicóptero no momento em que ele está voando a uma altura de *100m* e subindo em um ângulo de *36,9°* com a horizontal.

a) Em que ponto a carga atinge o solo?

b) Se a velocidade do helicóptero permanecer constante, em que ponto, com relação à carga, ele estará quando atingir o solo?

14 - Um guarda florestal pretende atingir com um dardo tranqüilizante um macaco pendurado em um galho de uma árvore. O guarda aponta diretamente para o macaco, e este, que não conhece Física, se solta do galho no momento exato em que o tiro é disparado. Mostre que independentemente da velocidade inicial do dardo, (desde que ela seja suficiente para percorrer a distância horizontal entre o guarda e a árvore durante a queda do macaco) o dardo atingirá o macaco.

15 - Um projétil é disparado com velocidade inicial v_0 e fazendo um ângulo α com a horizontal. Atinge um ponto em uma encosta (Ver Fig. [4-19]) e este ponto está em uma altura tal que a reta que une o ponto do disparo ao ponto na encosta faz um ângulo β com a horizontal. Encontre a distância *d* entre o ponto do disparo e o ponto na encosta.

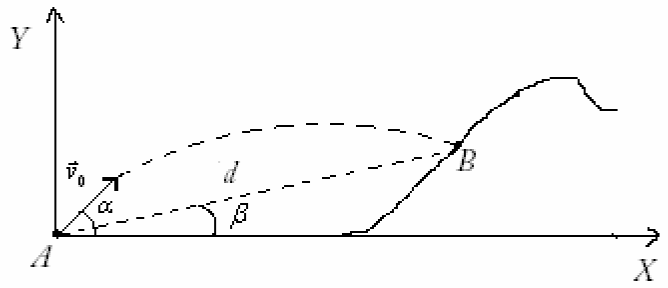

Fig. [4-19]

Sugestão: tomando um sistema de eixos *XY* como indicado na Fig. [4-19], escreva a equação da trajetória $y = f(x)$. Em seguida escreva, no mesmo sistema de eixos, a equação da reta que passa pelos pontos A e B. Encontre o ponto de interseção entre esta reta e a parábola que dá a trajetória.

Relatividade de Galileu e Relatividade de Einstein

16 - Estudo dirigido visando deduzir a transformação de Lorentz partindo dos postulados de Einstein.

Einstein assumiu dois postulados:

1- As equações da Física são as mesmas quando escritas em dois referenciais que se movem um em relação ao outro, com velocidade $\vec{v}$ constante.

2- A velocidade da luz é a mesma em todos os sistemas de referência em movimento uniforme em relação à fonte de luz.

Mostraremos agora juntos, nós e vocês estudantes da universidade Aberta, que partindo destes dois postulados podemos deduzir a transformação de Lorentz. Para tanto vamos orientar uma série de operações e cálculos simples que vocês vão fazer e que nos levarão a nossa meta que é chegar à transformação de Lorentz.

Consideremos uma fonte luminosa na origem de um referencial *S*, de eixos *XYZ*, que em $t_0 = 0$ emite luz em todas as direções, e assim a frente de onda luminosa é uma esfera cujo raio vai crescendo a velocidade da luz.

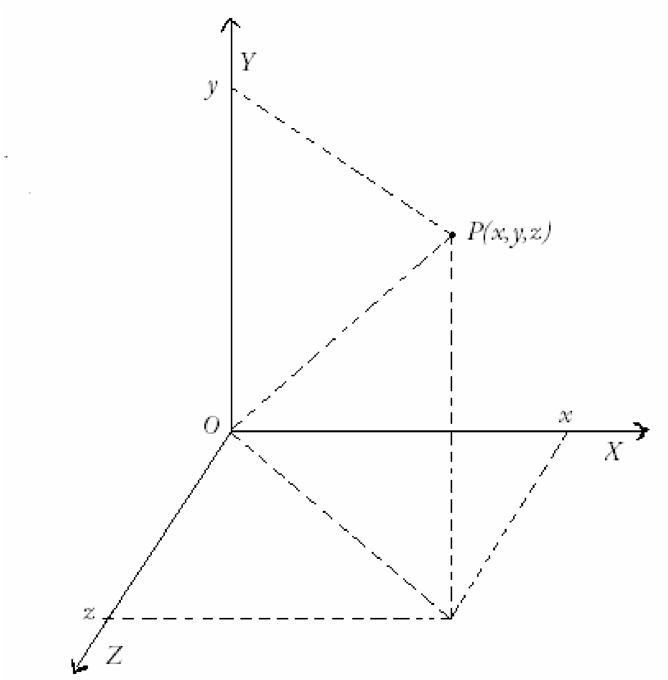

Fig. [4-20]

Tomendo um ponto *P* desta frente em um instante *t*. Como a luz tem velocidade c, a distância da origem até *P* é *ct*. Ao mesmo t podemos ver da Fig. [4-20] (Pitágoras duas vezes) que esta distância é $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Então podemos escrever no sistema *S*, que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = ct^2 \qquad [4\text{-}46]$$

Seja agora o sistema *S'* de coordenadas *X'Y'Z'* que em $t_0 = 0$ coincide com o sistema S, mas que se move com relação a *S* com velocidade *V* na direção do eixo *X*. (Como vimos anteriormente os eixos *X'Y'Z'* são paralelos a *XYZ*, e *X'* coincide em direção com *X*).

Então em $t_0 = 0$ a fonte luminosa na origem emite também, vista agora em S', uma frente de onda circular e vale:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = ct'^2 \qquad [4\text{-}47]$$

Porque a frente de onda vista do referencial S' também é uma frente esférica, e então é válida [4-47]? Porque pelo primeiro postulado da Relatividade de Einstein que neste ponto é igual ao de Galileu, as equações da Física são as mesmas em dois referencias que se movem um em relação ao outro, com uma velocidade $\vec{v}$ constante.

Nosso trabalho então consiste em encontrar uma formula de transformação de coordenadas de x', y', z' para x, y, z, de tal maneira que partindo de [4-47] cheguemos à

[4-46]. Observem que em ambas as equações assumimos a velocidade da luz como sendo *c*, graças ao segundo postulado.

Para encontrar esta transformação vamos partir inicialmente da Transformação de Galileu, e ver inicialmente o que acontece. Então:

a) Mostre que se em [4-47] substituirmos x', y', z' e *t'* pelos valores dados pela Transformação de Galileu que é:

$x' = x - Vt;\ \ y' = y;\ \ z' = z \ \ e \ \ t' = t$

Vamos obter:

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \qquad [4\text{-}48]$$

É claro que não obtivemos a equação [4-46] que é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = ct^2 \qquad [4\text{-}46]$$

Mas isto era de se esperar, porque sabemos que a Transformação de Galileu não é no caso da Teoria da Relatividade de Einstein, a transformação que mantem as equações da Física invariantes.

Analisando [4-48] verificamos que há dois termos, que estão fazendo a diferença com relação à [4-46], e que são $-2xVt + V^2t^2$.

Vamos então tentar modificar a transformação para ver se usando a nova transformação assim obtida poderíamos de alguma maneira cancelar os termos indesejados $-2xVt + V^2t^2$.

b) Tente usar as seguintes fórmulas de transformação $x' = x - Vt;\ \ y' = y;\ \ z' = z \ \ e \ \ t' = t + fx$.

Onde f é uma constante a ser determinada, e mostre que substituindo esta transformação em [4-47] vamos obter:

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + 2c^2 f\,t\,x + c^2 f^2 x^2 \qquad [4\text{-}49]$$

Analisando [4-49] vemos que se fizermos $f = -\dfrac{V}{c^2}$ vamos obter:

$$x^2 - 2xVt + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 - 2c^2\frac{V}{c^2}t\,x + c^2\frac{V^2}{c^4}x^2$$

E então cancelando $-2xVt$ nos dois membros ficamos com:

$$x^2 + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + \frac{V^2}{c^2}x^2$$

c) Passe agora o termo $\frac{V^2}{c^2}x^2$ para o primeiro membro desta última equação, e o termo V^2t^2 para o segundo membro. Ponha em evidência x^2 entre os dois primeiros termos do primeiro membro da equação obtida, e ponha, no segundo membro o termo c^2t^2 em evidência e mostre que ficamos com:

$$x^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right) \qquad [4\text{-}50]$$

d) A equação [4-50] difere da equação que deveríamos obter, que era:

$$x^2 + y^2 + z^2 = ct^2$$

Apenas porque tanto x^2, quanto c^2t^2 estão multiplicados por um mesmo fator que é $\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)$.

Lembremos que a última transformação que haveríamos tentado, já fazendo $f = -\frac{V}{c^2}$ era:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t - \frac{V}{c^2}x \end{cases} \qquad [4\text{-}51]$$

Vamos agora em [4-51] dividir o segundo membro da primeira e quarta equações por $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$.

Obtemos assim:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \qquad [4\text{-}52]$$

Verifique agora que esta é a transformação de Lorentz, ou seja, substitua x', y', z', t' desta transformação em [4-47] e veja que se obtém [4-46] que é $x^2 + y^2 + z^2 = ct^2$.

17 - Mostre que se $L_0{}^2$ for o volume de repouso de um cubo, então $L_0{}^2\left(1 - \beta^2\right)^{\frac{1}{2}}$ é o volume observado de um referencial que se move com velocidade uniforme β na direção paralela a uma aresta do cubo.

Simultaneidade

18 - Mostre, a partir da Transformação de Lorentz, que dois eventos simultâneos $(t_1 = t_2)$ em posições diferentes $(x_1 \neq x_2)$ no referencial *S,* não são em geral simultâneos no referencial *S'*.

19 - Méson π^+

a) Qual é a vida média de um pulso de mésons π^+ que viaja com $\beta = 0{,}73$, sabendo que a vida média própria τ é $2{,}5 \times 10^{-8}$.

(Resposta: $3{,}6 \times 10^{-8}$).

b) Qual é a distância atravessada com $\beta = 0{,}73$ durante uma vida média?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Kittel, C; Knight, D.W; Ruderman M.A; Mecânica Curso de Física de Berheley, volume 1. Editora Edgard Blucher Ltda.1970.

Alonso, M., Finn, E.F. Física, volume 1. Mecânica, Editor Edgard Blucher Ltda.1972.

Tipler P.A. Física, volume 1. LTC- Livros Técnicos e Científicos S. A,1999.