Aula 6

Conservação da Energia

META

Definir energia potencial usando o ferramental matemático apropriado que é a integral linha. Introduzir o conceito de campo conservativo, de energia mecânica total, e discutir então a lei de conservação da energia mecânica total, enquadrando-a na lei mais geral de conservação de energia. Mostrar a solução de problemas de dinâmica pela aplicação da lei de conservação da energia mecânica.

OBJETIVOS

Conseguir que o aluno tenha, mais que uma noção empírica da energia potencial, o conhecimento matemático preciso de sua definição e como decorrência entenda corretamente o conceito de campo conservativo e energia potencial. Levar o aluno a ter uma perspectiva correta da lei de conservação da energia mecânica total, mostrando seu domínio de aplicabilidade e seu enquadramento na lei mais geral de conservação da energia. Habilitar o aluno a resolver problemas de dinâmica usando a lei de conservação da energia mecânica total.

PRÉ-REQUISITO

Além da cinemática e dinâmica estudadas nas aulas anteriores, é importante que o aluno saiba resolver integrais simples de funções de uma variável.

INTRODUÇÃO

O conceito básico a ser denominado e desenvolvido nesta aula é o conceito de energia potencial. Sem este conceito não é possível entender o conceito de energia mecânica total, nem a lei de conservação da energia mecânica total. E o conceito de energia potencial não pode ser corretamente compreendido apenas apelando para exemplos e a intuição física. É necessário que o aluno possa compreender, com pleno conhecimento do instrumental matemático necessário, a sua definição matemática. E o instrumental matemático ao qual nos referimos é a integral de linha.

Vamos trabalhar então neste capítulo a integral de linha, sua definição, suas aplicações, para chegar então, de posse de todo este ferramental matemático à correta definição de campo conservativo, energia potencial e então energia mecânica total. Com isto os alunos estarão habilitados a entender com segurança e profundidade a lei de conservação da energia mecânica total, e a aplica-la na solução de problemas de dinâmica.

6.1 Energia Potencial

Definição de trabalho e campo vetorial

Vamos recapitular a definição de trabalho que vocês conhecem do ensino secundário. Ali vocês aprenderam que trabalho é força por deslocamento.

$$\tau = Fd \quad [6\text{-}1]$$

e se indicava trabalho pela letra grega τ (pronuncia-se *tau*).

Mas tanto força quanto deslocamento são grandezas vetoriais. Então o trabalho é calculado pelo produto escalar dos vetores $\vec{F}$ e $\vec{d}$. (Recordem a definição de produto escalar que demos na 2ª aula)

$$\tau = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad [6\text{-}2]$$

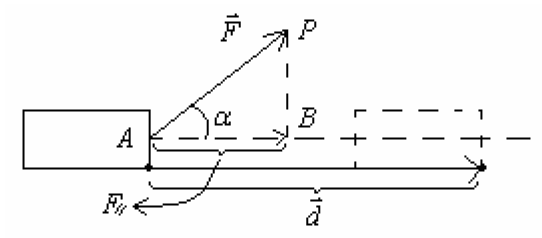

Fig. [6-1]

Na Fig. [6-1] representamos os vetores $\vec{F}$ e $\vec{d}$. No triângulo retângulo *APB* temos:

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AP}$$

Mas *AP* é o módulo de $\vec{F}$ (ou seja *F*), e *AB* a projeção de $\vec{F}$ segundo a direção de $\vec{d}$. Indicaremos *AB* por $F_{//}$ (componente de $\vec{F}$ paralela a $\vec{d}$) Então

$$\cos\alpha = \frac{F_{//}}{F}$$

donde

$$F_{//} = F\cos\alpha \quad [6\text{-}3]$$

Da definição [6-2] de trabalho, lembrando a definição de produto escalar, temos:

$$\tau = Fd\cos\alpha$$

Levando então em conta o valor de $F_{//}$ (equação [6-3]) ficamos:

$$\tau = F_{//}d \quad [6\text{-}4]$$

Observemos que a expressão [6-4] é análoga à [6-1]. Voltamos à noção de trabalho como força por deslocamento. Só que agora a força é a componente da força na direção do deslocamento. Por outro lado, se a força e o deslocamento tiverem a mesma direção a expressão [6-2], a saber, $\tau = \vec{F}\cdot\vec{d}$ se reduz a [6-1] $\tau = Fd$, pois o ângulo α é zero e *cos 0 = 1*.

Vemos assim que a expressão [6-2] é, usando o ferramental matemático do cálculo vetorial, uma generalização da expressão [6-1]. Isto é [6-1] é um caso particular de [6-2], caso particular caracterizado pelo fato da força e do deslocamento terem a mesma direção.

Seria possível generalizar ainda mais este conceito de trabalho? Como poderíamos definir o trabalho de uma força sobre um corpo que se desloca em uma trajetória qualquer, portanto não um deslocamento retilíneo, e que além disto é uma força variável?

Para responder a estas questões, temos que inicialmente definir o conceito de campo de forças e das a expressão matemática de um campo de forças. Um campo de forças, ou mais genericamente um campo de vetores, é uma região do espaço na qual associamos à cada ponto um vetor (ou uma força). Por exemplo, seja água fluindo em um rio. A cada ponto do rio podemos associar uma velocidade, que é a velocidade de um volume elementar de água em torno daquele ponto. Temos assim um campo de velocidades, os vetores são os vetores velocidades de cada volume elementar de água. (Ou poderíamos ter definido este campo tomando as velocidades de cada molécula de água). Outro exemplo: na superfície da Terra, podemos associar cada ponto do espaço próximo à superfície da Terra, um vetor aceleração $\vec{g}$. Qualquer ponto próximo à superfície da Terra sofre uma aceleração $\vec{g}$ devido à atração gravitacional. Este é o campo gravitacional da Terra, que na sua superfície é um campo homogêneo. Se nos afastarmos da superfície da Terra, sabemos que a atração gravitacional vai diminuir. Mas ainda assim existe atração e portanto existe um vetor aceleração $\vec{g}$, que agora não é mais constante mas varia com a distância à Terra. Portanto existe ainda um campo de vetores aceleração. Como um exemplo de um campo de forças temos uma carga negativa. Esta carga, cria para todas as cargas positivas em torno, um campo de forças atrativas (em direção à carga positiva). Então nesta região do espaço em torno da carga positiva existe um campo de forças.

O importante é que além de existirem forças (ou vetores designando outras grandezas físicas) em uma certa região do espaço, estas forças são função do ponto do espaço considerado. Em cada ponto existe uma determinada força. (Esta força pode ser a mesma para dois pontos diferentes, como vimos no caso do campo gravitacional perto da superfície da Terra). Mas ainda assim temos caracterizado o conceito de função: a correspondência entre um conjunto de pontos e um conjunto de forças. Trata-se aqui de uma função vetorial que indicamos então como:

$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ [6-5]

onde aparecem as variáveis *x, y e z* porque estamos definindo nosso campo de forças no espaço.

Vimos ainda na segunda aula, que um vetor pode ser decomposto segundo as componentes em três eixos cartesianos ortogonais. Ver Fig. [6-2].

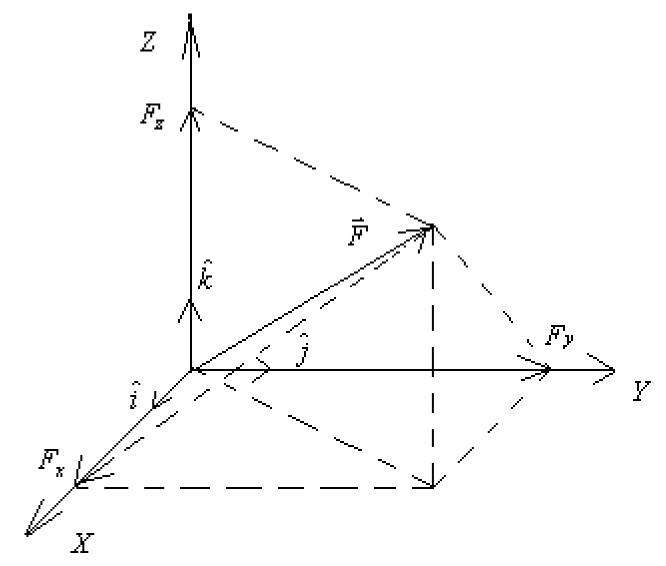

Fig. [6-2]

Temos então:

$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ [6-6]

onde F_x, F_y *e* F_z são as componentes de $\vec{F}$ segundo os eixos *X, Y* e *Z*. No caso então de um campo de forças em que o vetor é função dos pontos do espaço tridimensional, ou seja para cada ponto temos um vetor diferente, então as componentes dos vetores também são funções de *x, y* e *z*. Se mudarmos de ponto no espaço por exemplo se passarmos de um vetor definido em x_1, y_1, z_1, para um outro vetor, ou uma outra força definida em x_2, y_2, z_2, como o vetor $\vec{F} = \vec{F}$ (x_1, y_1, z_1) é diferente do vetor $\vec{F} = \vec{F}$ (x_2, y_2, z_2) então está claro que as componentes F_x, F_y *e* F_z de $\vec{F}$ (x_1, y_1, z_1) são diferentes das componentes F_x, F_y *e* F_z de

$\vec{F}$ (x_2, y_2, z_2). Isto significa que as componentes dos vetores de um campo de vetores (ou de forças) são também funções de *x, y e z*. Então a expressão geral para um campo de forças no espaço tridimensional é

$$\vec{F} = F_x(x,y,z)\hat{i} + F_y(x,y,z)\hat{j} + F_z(x,y,z)\hat{k} \quad [6\text{-}7],$$

onde F_x *(x, y, z)*, F_y *(x, y, z)* e F_z (x. y, z) são as componentes do vetor $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ nos eixos coordenados *X, Y* e *Z*, e são cada uma delas por sua vez funções de *x, y e z*. Outra maneira de compreender que as componentes de $\vec{F}$ são necessariamente funções de *x, y, z* se $\vec{F}$ o é, é imaginar que elas não fossem funções de *x, y, z*. Neste caso como *F* poderia ser função de *x, y, z*?

Então a expressão [6-7] é a expressão genérica de um campo de forças no espaço tridimensional.

6.2 Integral de linha e generalização da fórmula do trabalho.

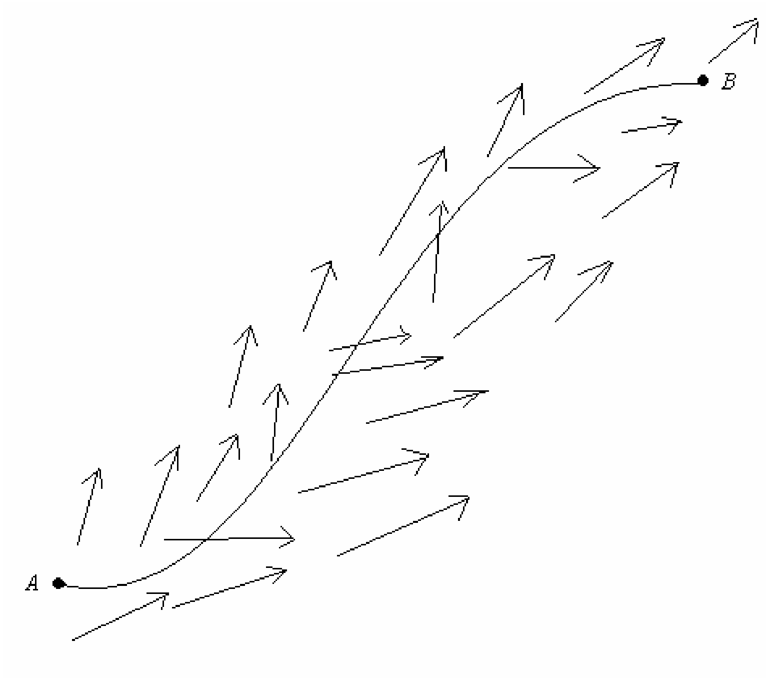

Fig. [6-3]

Definida a noção de campo de forças, passemos à generalização da expressão do trabalho de uma força. Seja então na Fig. [6-3] uma trajetória entre um ponto *A* e um ponto *B*, trajetória esta contida em um campo de forças. Desenhamos em Fig. [6-3] uma trajetória no plano do papel e portanto uma trajetória bidimensional, e desenhamos os vetores, em toda região que contém a trajetória e que no nosso desenho é também um espaço bidimensional. Pedimos porém que vocês imaginem uma trajetória e o campo de forças, em um espaço tridimensional. Se o campo de forças está definido em todo o espaço que contém a trajetória, então em cada ponto da trajetória também existe um vetor do campo de forças. É o que está representado na Fig. [6-4].

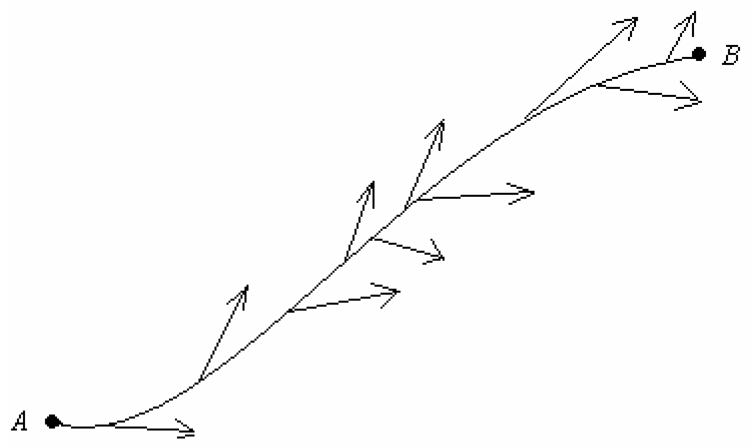

Fig. [6-4]

Posto isto, voltemos à nossa questão: qual o trabalho do campo de forças, sobre uma partícula (um corpo) que se desloca de *A* até *B*? A solução desta questão é feita dentro das propostas básicas da definição de integral (definida ou indefinida) que já temos visto. No caso presente o procedimento é o seguinte. Dividimos o percurso *AB* em *n* partes. (Na Fig. [6-5] n = 17). Em cada uma das partes escolhemos um ponto amostral e temos então uma força do campo de forças neste ponto.

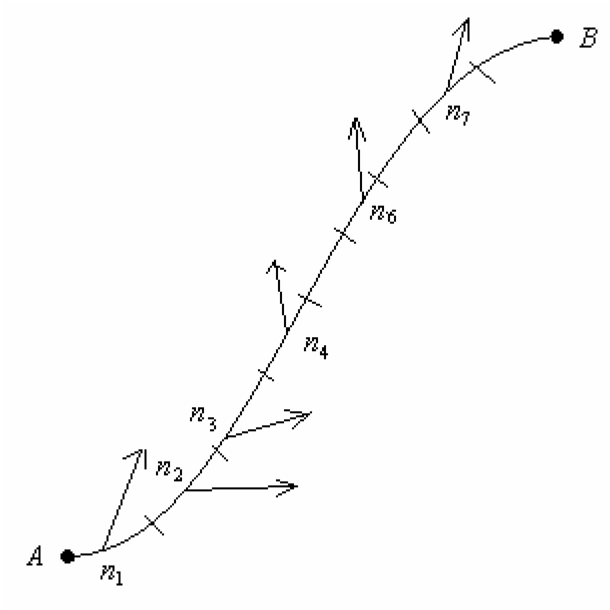

Fig. [6-5]

Em cada uma destas divisões podemos calcular o trabalho usando a fórmula [6-2], pois temos um deslocamento que é dado por um vetor unindo os extremos do intervalo, e temos uma força. Este deslocamento, que não coincide com o percurso sobre a curva, vamos chamar de $\Delta\vec{r}_1$. Então

$$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i \qquad [6\text{-}8]$$

ΔW_i é o trabalho realizado pela força do campo de forças (a força correspondente à um ponto escolhido no *i-ésimo* intervalo). A força é $\vec{F}_i$ e $\Delta\vec{r}_i$ é o deslocamento entre os extremos de *i-ésimo* intervalo.

Vamos considerar a soma destes elementos de trabalho, isto é

$$\sum_i \Delta W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i \qquad [6\text{-}9]$$

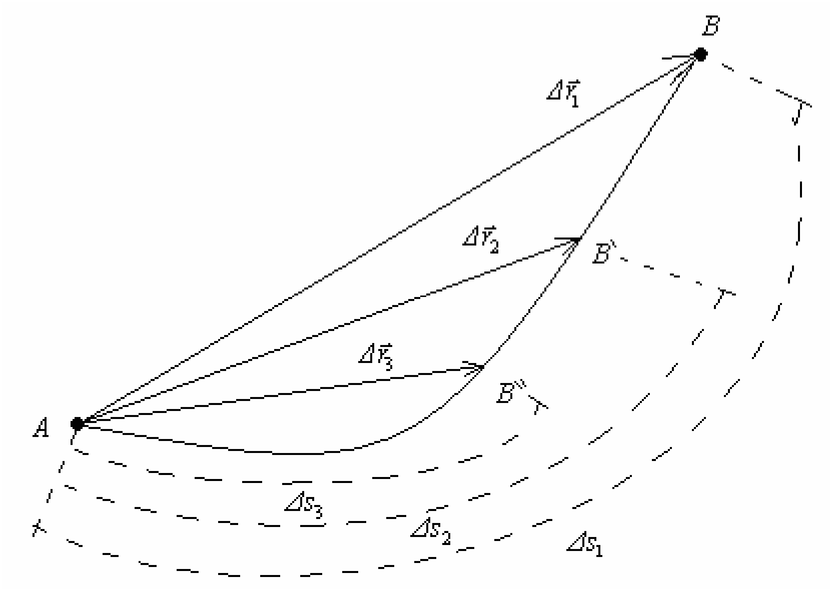

Fig. [6-6]

É claro que não podemos pretender que a expressão [6-9] seja o trabalho do campo de forças em um corpo se deslocando no percurso entre A e B. Isto porque temos duas aproximações: a primeira é que tomamos o vetor $\Delta\vec{r}_i$ que é o deslocamento entre os extremos da (*i-ésima)* divisão, como tendo um módulo igual a Δs_i, que é o percurso da *i-ésima* divisão. A segunda é porque em cada divisão tomamos uma única força $\vec{F}_i$ do campo, quando em cada ponto da divisão temos uma força diferente. Entretanto se fizermos o número de divisões tenderem a infinito vemos que ambas as aproximações tendem a desaparecer, quer dizer caminhamos para um valor que podemos chamar do valor exato do trabalho. De fato, quando o número de divisões tende a infinito, o percurso, tanto quanto o deslocamento vão se tornando iguais. Isto fica evidente na Fig. [6-6]. Vemos que o módulo de $\Delta\vec{r}_1$ é muito diferente do percurso Δs_1 (que é o percurso pela curva de A até B). Já o módulo de $\Delta\vec{r}_2$, se diferencial menos do percurso Δs_2 de A até B' ao longo da curva. E a diferença entre Δr_2 e Δs_2 é ainda menor. Fazendo os pontos B (B, B', B'',...) tenderem a A vemos então que $\Delta\vec{r}$ tende à diferencia dr e Δs tende à diferencial ds, e que $dr=ds$. Ao mesmo tempo fazendo o comprimento de cada divisão tender a zero, os pontos amostrais em cada divisão serão todos os pontos do campo sobre a curva. Partindo destes argumentos definimos o trabalho do campo sobre uma partícula executando um percurso de A até B como sendo

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_1 \qquad [6\text{-}10]$$

e indicamos este limite por $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$, e assim

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad [6\text{-}11]$$

A expressão [6-11] é a expressão mais genérica de trabalho. É o trabalho da força de um campo de forças, sobre uma partícula que descreve uma trajetória contida no campo de forças entre um ponto A e um ponto B.

A integral que definimos em [6-11] é uma integral de linha. Agora que vimos sua definição dentro dos procedimentos básicos do cálculo integral, vamos ver como trabalhar com ela. Isto será mostrado considerando um campo de forças bidimensional, e calculando o trabalho deste campo ao longo de diferentes trajetórias entre dois pontos contidos neste campo. Adiantamos um aspecto muito importante da integral de linha, que ficará evidente nos exemplos. Apesar de nossa trajetória ser em um espaço tridimensional (no caso de nosso exemplo, em um espaço bidimensional), a integral de linha é uma integral de uma única variável. Isto acontece, basicamente, porque uma curva pode ser dada por um único parâmetro, ou como função de um único parâmetro, por exemplo o parâmetro s que é o comprimento de arco, que pode localizar, pelo seu valor, qualquer ponto da curva.

Exemplo 1

"Dado o campo de forças $\vec{F} = xy\hat{i} - y^2\hat{j}$, encontre o trabalho da força $\vec{F}$ ao longo das trajetórias mostradas na Fig. [6-7] do ponto (0,0) ao ponto (2,1)"

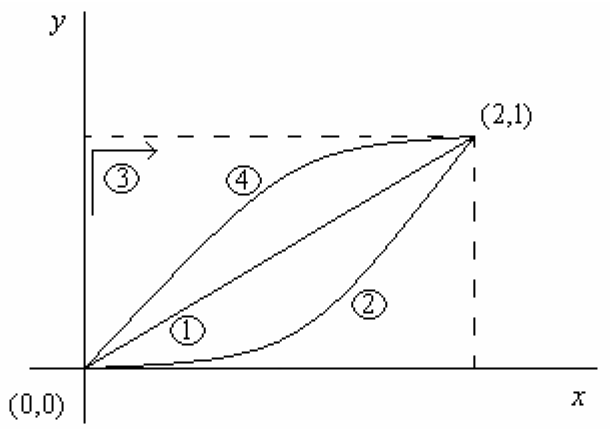

Fig. [6-7]

Solução: Antes de tudo, mostremos que $\vec{F} = xy\hat{i} - y^2\hat{j}$ é um campo de forças como definimos acima. Tínhamos definido um campo de forças no espaço tridimensional pela expressão $\vec{F} = F_x(x,y,z)\hat{i} + F_y(x,y,z)\hat{j} + F_z(x,y,z)\hat{k}$.

Ora $\vec{F} = xy\hat{i} - y^2\hat{j}$ é um campo de forças em um espaço bidimensional, ou seja, da forma $\vec{F} = F_x(x,y,z)\hat{i} + F_y(x,y,z)\hat{j}$, onde a componente segundo o eixo *X* é, $F_x\,(x, y) = xy$ (ou seja uma função de duas variáveis *x* e g*;* e segundo o eixo Y é, $F_y\,(x,y) = -y^2$.

Vimos que o trabalho é dado por:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Vamos calcular o produto escalar $\vec{F} \cdot d\vec{r}$. O vetor $\vec{r}$ é o vetor posição, isto é, aquele que localiza um ponto *P* de coordenadas *x, y*. (Ver Fig. [6-8]). Então

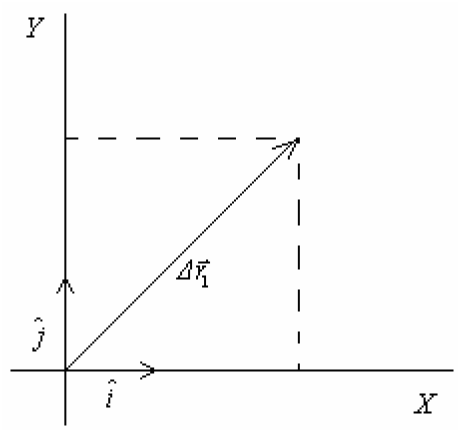

Fig. [6-8]

temos:

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ [6-12]

Estamos agora trabalhando em duas dimensões. É claro que em três dimensões teríamos:

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

Então, como $\hat{i}$ e $\hat{i}$ são os vetores dos eixos X e Y e portanto são constantes, temos

$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ [6-13]

Lembrando agora a fórmula do produto escalar por componentes qual seja: se $\vec{A} = A_x i + A_y j$ e $\vec{B} = B_x i + B_y j$ então

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$, (recordar ***Aula 2***)

então vemos que o produto escalar $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = xy\hat{i} - y^2\hat{j}$ e $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ é

$\vec{F} \cdot d\vec{r} = xydx - y^2dy$ [6-14]

Então o trabalho que queremos calcular é

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \int_A^B (xydx + y^2dy) \quad [6\text{-}15]$$

Trajetória 1. Esta trajetória é a equação de uma reta, unido (0, 0) à (2,1). Vemos que o coeficiente angular desta reta é $\frac{1}{2}$, e que ela corta o eixo Y no ponto 0. Então lembrando a equação da reta na forma $y = mx + b$, onde m é o coeficiente angular da reta e b o ponto em que ela corta o eixo Y, vemos que nossa reta do caminho 1 é

$$y = \frac{1}{2}x \qquad [6\text{-}16]$$

Então:

$$dy = \frac{1}{2}dx \qquad [6\text{-}17]$$

Substituindo em [6-11] y e dy pelas equações [6-12] e [6-13] a integral [6-11] fica:

$$W = \int_A^B (x\frac{1}{2}xdx + \frac{1}{4}x^2\frac{1}{2}dx) \qquad [6\text{-}18]$$

que podemos com mais propriedade escrever, já colocando os extremos de integração que tiramos da Fig. [6-7],

$$W = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx + \frac{1}{8}\int_0^2 x^2dx$$

donde

$$W = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 + \frac{1}{8}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{8}{3} + \frac{1}{8}\frac{8}{3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)\frac{8}{3} = 1$$

Observações: i) vimos que quando substituímos *y* e *dy* pelos seus valores tirados da equação da reta, ou seja da linha na qual estamos fazendo a integração, chegamos a [6-18] que é uma integral de uma única variável. Isto vai acontecer sempre-quando substituímos uma variável por sua função com relação à outra, dada pela equação da linha, vamos ter sempre uma integral de uma única variável.

ii) quando mostramos o desenvolvimento conceitual que levou à expressão $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$, tínhamos que o $d\vec{r}$ era um deslocamento infinitesimal ao longo da trajetória. Agora, para calcular esta integral de linha tomamos o vetor posição genérico $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ e calculamos a diferencial $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$. Mas este $d\vec{r}$ que acabamos de calcular é o $d\vec{r}$ ao longo da trajetória que deveríamos ter em $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$? A resposta é sim, ele é exatamente este elemento diferencial ao longo da trajetória, porque é através da trajetória, no nosso caso a equação da reta $y = \frac{1}{2}x$, que estabelecemos a relação entre *dy* e *dx*, a saber: $dy = \frac{1}{2}dx$. É esta relação que caracteriza o nosso $d\vec{r}$ (o $d\vec{r}$ da nossa linha reta).

iii) neste primeiro caminho, ao longo da linha reta $y = \frac{1}{2}x$, poderíamos em [6-15], a saber:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = \int_A^B (xydx + y^2dy)$$

ter substituído tudo em função de *y,* que passaria ser a variável de integração, fazendo: $x = 2y$ e $dx = 2dy$. Neste caso os extremos de integração (Ver Fig. [6-7]) seriam 0 à 1. Aconselhamos o leitor a verificar que assim fazendo ele vai obter o mesmo resultado.

Trajetória 2. Ao longo da parábola $y = \frac{1}{4}x^2$. Neste caso temos:

$$dy = \frac{1}{2}xdx,$$

e substituindo *y* e *dy* em [6-15], ficamos com:

$$W = \int_0^2 (x\frac{1}{4}x^2dx + \frac{1}{16}x^4\frac{1}{2}xdx) = \int_0^2 (\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{32}x^5)dx = \left(\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{192}x^6\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}$$

Trajetória 3. A trajetória 3 é uma linha quebrada que vai de (0, 0) à (0, 1) e depois de (0, 1) à (2, 1). Temos que aplicar a fórmula [6-11] primeiro entre o trecho (0, 0) e (0, 1) e depois (0, 1) à (2, 1), e depois somar os resultados. No trecho (0, 0) à (0, 1) temos:

$x = 0$ e portanto $dx = 0$

substituindo estes valores em [6-15] e observando que *y* varia de 0 à 1 temos:

$$-\int_0^1 y^2dy = -\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3}$$

No trecho de (0, 1) à (2, 1) temos

$y = 1$ portanto $dy = 0$

Substituindo estes valores em [6-15] ficamos com:

$$\int_0^2 x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2$$

Somando os dois resultados temos o trabalho pela *trajetória 3 que é:*

$$W_3 = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$$

Trajetória 4. Queremos a integral de linha ao longo de uma curva dada pelas equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 2t^3 \\ y &= t^2 \end{aligned} \qquad [6\text{-}19]$$

Em primeiro lugar, devemos nos certificar que a curva dada parametricamente pelas equações [6-11], passa realmente por (0, 0) e por (2, 1). Por inspeção vemos que quanto t = 0 temos $x = y = 0$ e então a curva passa por (0, 0) quando o valor do parâmetro é 0. Vemos ainda que quando t =1, temos y =1 e x = 2, e então a curva passa por (2, 1) quando o valor do parâmetro é 1.

Das equações [6-19] tiramos:

$$\begin{aligned} dx &= 6t^2\, dt \\ dy &= 2t\, dt \end{aligned} \qquad [6\text{-}20]$$

Substituindo os valores de *x, y, dx,* e *dy* de [6-19] e [6-20] em [6-15] temos

$$\int_0^1 (2t^3 t^2 6t^2 dt - t^4 2t dt)$$

$$W_4 = \int_0^1 (12t^7 dt - t^5 2dt) = \frac{12}{8} - \frac{2}{6} = \frac{7}{6}$$

6.2 Concervaçao da energia mecânica total

Campos concervativos

Nos exemplos e problemas que resolvemos sobre integrais de linha e naqueles passados nas atividades, vimos que as vezes a integral de linha, ou seja o trabalho de um certo campo de forças que, entre dois pontos A e B varia quando passamos de uma trajetória para outra. Mas vimos também para outros campos de força o trabalho do campo entre dois pontos A e B é sempre o mesmo independente da trajetória. Podemos dar um significado físico par esses fatos.

Suponhamos que queremos levar uma caixa pesada da ponta de um armazém, atravessando uma cauçada e colocá-la na carroceria de um caminhão situada a uma certa altura do chão. Comparamos o trabalho de uma força para realizar esta tarefa em duas situações. Primeira, arrastando a caixa pela calçada, depois levantando até o nível da carroceria do caminhão. Segunda situação, levantando a caixa na ponta do armazém até a altura da carroceria e depois levando-a pelo ar pela calcada até a carroceria. O trabalho em cada um destes casos é diferente. No primeiro caso temos o trabalho de uma força arrastando a caixa, contra a força de atrito, pela calçada, em seguida uma força levantando a caixa até a altura da carroceria. No segundo caso só temos uma força levantando a caixa até a altura da carroceria do caminhão (observar que a força necessária para manter a caixa no ar não realiza trabalho pois é perpendicular à direção do deslocamento da caixa).

Assim vemos que o trabalho pode depender da trajetória. De fato isto geralmente vai ocorrer sempre que houver forças de atrito. Um campo de forças para o qual o trabalho de uma força sobre um objeto movendo-se entre dois pontos do campo depende tanto dos pontos inicial e final como também de trajetória unindo estes dois pontos $\left(W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} \right)$ é chamado um campo não conservativo. Um campo de forças para o qual o trabalho $W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$ é sempre o mesmo independente da particular trajetória unindo A e B, ou seja é o mesmo para todas as trajetórias, é um campo conservativo.

Podemos mostrar que o campo gravitacional é conservativo. Tomemos o trabalho de uma força para erguer um objeto de massa m até uma altura h. (No caso temos uma força igual à força peso, mas de direção oposta).

Tomando o eixo z na vertical (Ver [figura 3.1]) vemos que $\vec{F} = m.g.\hat{k}$. De fato, vemos na Fig. [6-9] que $\vec{P} = -mg\hat{k}$ e $\vec{F} = mg\hat{k}$.Então $\vec{F}.d\vec{r}$ é $m.g.dz$ (Pois $dr = dx.\hat{i} + dz.\hat{k}$).

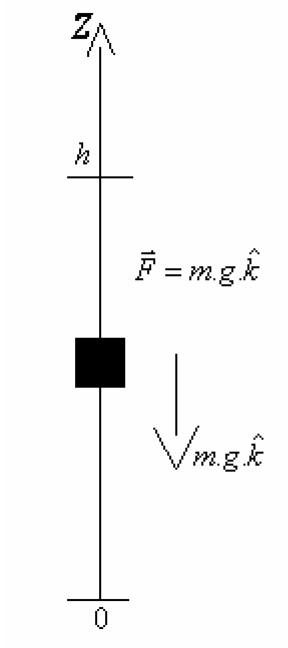

Fig. [6-9]

Então ficamos com

$$W = \int_0^h mgdz = mgz\Big|_0^h = mgh$$

Suponhamos agora que vamos levar o mesmo objeto de massa m à mesma altura h, mas por um plano inclinado fazendo um ângulo de α com o chão (Ver Fig. [6-10]). Escolhendo os eixos X e Y como na, Fig. [6-10] decompondo o peso $\vec{P}$ em uma componente perpendicular ao plano $\vec{P}_{\perp}$ em uma componente paralela ao mesmo, vemos que para a resultante sobre a massa ser nula temos que ter $\vec{P}_{\perp} = N$ e $P_{//} = F$ (com resultante nula a massa pode subir em movimento retilíneo uniforme). Da figura vemos que $P_{//} = F = P \cdot \operatorname{sen}\alpha$. Logo $\vec{F} = P(sen\alpha).\hat{i}$. Então $\vec{F}.d\vec{x}$, sendo $d\vec{r} = dx \cdot \hat{i} + dy \cdot \hat{j}$ é:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = P(\operatorname{sen}\alpha)dx = mg \operatorname{sen}\alpha\, dx$$

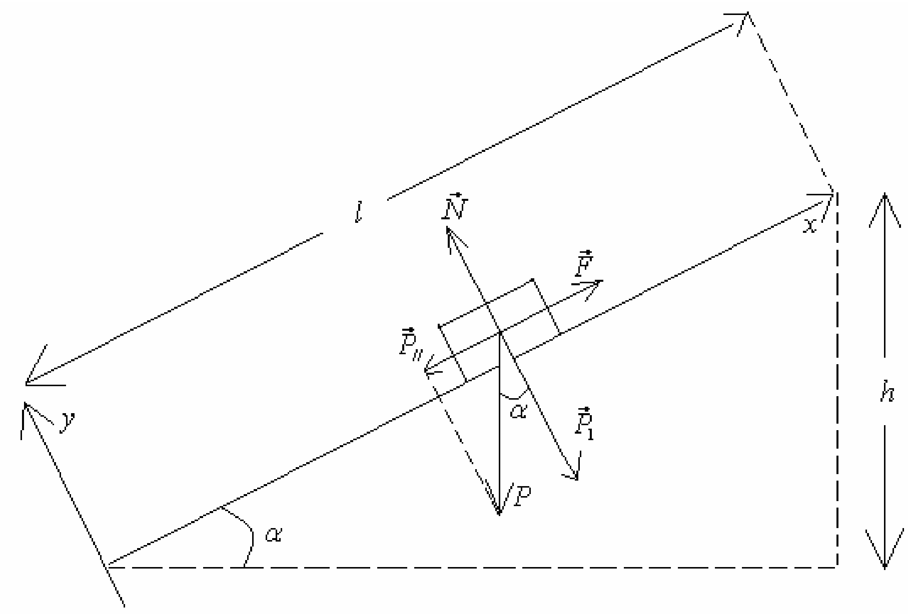

Fig. [6-10]

Logo, $W = \int_0^l m.g.\operatorname{sen}\alpha.dx$

Onde l é o comprimento do plano inclinado. Então

$$W = (mg\operatorname{sen}\alpha).x\Big|_0^l = mgl\operatorname{sen}\alpha$$

$$W = mg\frac{h}{l}l = mgh$$

Este mesmo problema, ou seja, calcular o trabalho de uma força contrária ao campo gravitacional pode ser resolvido como mostramos no exemplo de integral de linha. Considere a equação de uma reta unindo C à B com um sistema de eixos da Fig. [6-10], onde $\vec{F}$ é $\vec{F} = mg\hat{k}$. Escreva então $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ e faça a integral de linha que vai dar o trabalho desta força entre os pontos C e B.

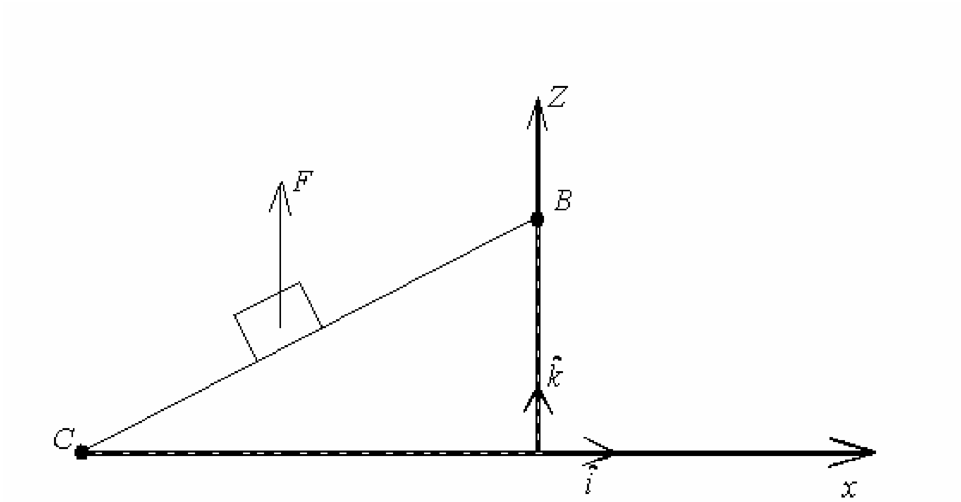

Fig. [6-11]

Condições matemáticas de um campo conservativo.

Operadores diferenciais.

Vamos examinar quando um campo vetorial é conservativo simplesmente analisando sua expressão matemática. Mas para tanto temos que definir dois operadores diferenciais

Gradiente:

Seja W uma função escalar de três variáveis, ou um campo escalar. Quer dizer em cada ponto deste campo no espaço tridimensional associamos um número, ou seja um escalar. Com a forma:

$$W = W(x, y, z)$$

Ou seja trata-se simplesmente de uma função de três variáveis. Definimos o gradiente de W, e indicaremos por $\vec{\nabla} W$ o seguinte vetor:

$$\vec{\nabla} W = \frac{\partial W}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\hat{k} \quad [6\text{-}21]$$

Como os alunos de Física A estão começando a estudar as derivadas parciais, recordemos agora este conceito. $\frac{\partial W}{\partial x}$ é a função que se obtém derivando W com relação à x e mantendo as outras variáveis constantes (como se fossem constantes).

Por exemplo seja $W = x^2 y + 3xyz + yz^2$

Então: $\dfrac{\partial W}{\partial x} = 2xy + 3yz$

O mesmo para y e z. Assim

$\vec{\nabla} W = (2xy + 3yz)\hat{i} + (x^2 + 3xz + z^2)\hat{j} + (3xy + 2yz)\hat{k}$

Rotacional

Vamos definir o rotacional dando a regra minemônica de seu cálculo. Seja um campo de força $\vec{F}$ (ou mais geralmente um campo vetorial definido em uma região do espaço).

Temos então:

$\vec{F} = F_x(x,y,z)\hat{i} + F_y(x,y,z)\hat{j} + F_z(x,y,z)\hat{k}$

Então o rotacional de $\vec{F}$, indica-se por $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ é um vetor obtido desenvolvendo o determinante abaixo segundo os elementos da primeira linha.

(Desenvolvimento de Laplace)

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

[6 - 22]

Por exemplo, se $\vec{F} = (2xy - z^3)\hat{i} + x^2\hat{j} - (3xz^2 + 1)\hat{k}$ então

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy - z^3 & x^2 & -(3xz^2 + 1) \end{vmatrix}$$

Então:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(-3xz^2 - 1) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2)\right] + \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(2xy - z^3) - \frac{\partial}{\partial x}(-3xz^2 - 1)\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - z^3)\right]$$

Então:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{j}(-3z^2 + 3z^2) + \hat{k}(2x - 2x) = \vec{0}$$

Ou seja, o rotacional do campo $\vec{F}$ dado é o vetor nulo.

Conhecendo os operadores diferenciais gradiente o rotacional, estamos em condição de dizer se um campo é conservativo ou não é, examinando a expressão algébrica do campo.

Vamos mostrar que a condição necessária e suficiente para que um campo seja conservativo é que o rotacional do campo seja zero. Ou seja, se e somente se $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ então $\vec{F}$ é um campo conservativo.

Comecemos entretanto mostrando que se um campo vetorial pode ser colocado como o gradiente de uma função de três variáveis, ou seja, de um campo escalar, então o rotacional do campo vetorial é zero. Repetindo essa afirmação com as equações vamos mostrar que se o campo vetorial $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ ou mais detalhadamente $\vec{F} = F_x(x, y, z)\hat{i} + F_y(x, y, z)\hat{j} + F_z(x, y, z)\hat{k}$ que queremos saber se é ou não conservativo, puder ser colocado como gradiente de um campo escalar, ou seja, se $\vec{F} = \vec{\nabla} W$

Onde W é um campo escalar (ou seja, $W = W(x, y, z)$) então:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Demonstração

Seja então

$\vec{F} = \vec{\nabla} W$

Mas sabemos que se ($W = W(x, y, z)$) é um campo escalar então,

$$\vec{\nabla} W = \frac{\partial W}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\hat{k}$$

Logo

$$\vec{F} = \frac{\partial W}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial W}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial W}{\partial z}\hat{k}$$

O que significa que

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial x}\ ;\ F_y = \frac{\partial W}{\partial y}\ ;\ F_z = \frac{\partial W}{\partial z} \qquad [6 - 23]$$

Mas o rotacional de $\vec{F}$ é:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Então levando em conta as equações [6 - 23]

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Calculando este determinante pelo desenvolvimento de Laplace segundo os elementos de primeira linha temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \hat{i}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}\right)$$

Sabemos que para a maioria das funções (em particular todas as que usamos na física) as derivadas parciais de 2ª ordem mistas não dependem da ordem, e então temos

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}.$$

[Se você não está familiarizado com esta propriedade, tome um monômio (por exemplo, $3x^3y^2z^4$) e calcule $\dfrac{\partial(3x^3y^2z^4)}{\partial x\partial y}$ (ou seja derivando antes com relação a y e depois com relação a x) em seguida calcule $\dfrac{\partial(3x^3y^2z^4)}{\partial y\partial x}$].

Vemos então que o rotacional de $\vec{F}$ é zero.

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{0}$$

Provamos então que se $\vec{F}=\vec{\nabla}W$ então $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{0}$.

Vamos por enquanto admitir que o inverso também é verdadeiro ou seja que se $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{0}$ então $\vec{F}=\vec{\nabla}W$. Em palavras: se o rotacional de um campo vetorial é o vetor nulo, então este campo vetorial pode ser colocado como o gradiente de um campo escalar. Então se $\vec{F}=\vec{\nabla}W$ decorre que $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{0}$ e inversamente se $\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{0}$ decorre que $\vec{F}=\vec{\nabla}W$. Escrevemos então

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{F}=\vec{\nabla}W \qquad [6 - 24]$$

Agora vejamos o que acontece com o trabalho de $\vec{F}$ entre dois pontos A e B de um campo, quando $\vec{F}$ pode ser posto como gradiente de um campo escalar, ou seja, quando $\vec{F}=\vec{\nabla}W$. Temos

$$\vec{F}.d\vec{r}=\vec{\nabla}W.d\vec{r}$$

Lembrando que

$$\vec{\nabla}W=\frac{\partial W}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial W}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial W}{\partial z}\hat{k}$$

$$d\vec{r}=dx.\hat{i}+dy.\hat{j}+dz.\hat{k}$$

Vemos que

$$\vec{\nabla}W.d\vec{r} = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz$$

Lembremos agora que a diferencial total de uma função $W = W(x, y, z)$ é

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz \qquad [6 - 25]$$

Então:

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B \vec{\nabla}W.d\vec{r}$$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz$$

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz = \int_B^A dW$$

Mas sabemos que $\int dW = W$

Obtemos então finalmente que:

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = w\,|_A^B = W(B) - W(A) \qquad [6 - 26]$$

Onde W(B) e W(A) são os valores de função W nos pontos B e A. Uma vez que a integral depende só dos pontos A e B e não do trajeto, e como esta integral é o trabalho do campo de forças, vemos que o trabalho deste campo de forças só depende dos pontos iniciais e finais e não da trajetória. Ou seja, o campo é conservativo.

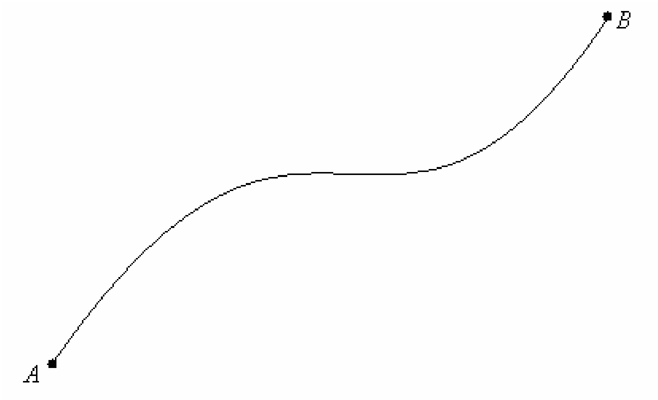

Fig. [6-12]

Em resumo mostramos que se $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, então o campo $\vec{F}$ pode ser colocado na forma $\vec{F} = \vec{\nabla} W$ (na verdade só mostramos o inverso, ou seja, se $\vec{F} = \vec{\nabla} W$ decorre $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, mas admitimos que a recíproca também é verdadeira). Em seguida mostramos que se $\vec{F} = \vec{\nabla} W$ a integral $\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$ só depende de A e B e não da trajetória, ou seja, o campo $\vec{F}$ é conservativo.

Potencial

Já mostramos que se uma massa m cai de uma distância z sob a ação da força do campo gravitacional, o trabalho realizado pelo campo gravitacional é mgz. Mas se nós levantarmos uma massa m de uma altura z, com uma força $\vec{F}$ contra a força do campo gravitacional (contra a força peso, ou seja, $\vec{F} = -\vec{P}$) o trabalho da força peso é $-mgz$ uma vez que a direção de $\vec{P}$ é oposta à direção do deslocamento. O aumento da energia potencial é, entretanto $\phi = +mgz$.Ou seja $W = -\phi$ onde W é o trabalho da força peso, ou seja do campo, e ϕ é o trabalho de uma força igual e contrária à força do campo. Então a força peso do campo é $\vec{P} = -\vec{\nabla}\phi$. A função ϕ é chamada energia potencial do campo gravitacional.

Se modificarmos ϕ somando uma constante, a força do campo é a mesma pois $\vec{\nabla}\phi = \vec{\nabla}(\phi + c)$ uma vez que $\vec{\nabla} c = \vec{0}$. Este fato significa que temos uma liberdade de escolha do nível zero de energia potencial.

Então de um modo mais geral para um campo vetorial $\vec{V}$ que tenha a propriedade $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$ podemos definir uma função ϕ, chamada energia potencial do campo $\vec{V}$, e tal que $\vec{V} = -\vec{\nabla}\phi$.

Lembrar então que a função escalar ϕ chamada energia potencial é o trabalho de uma força contra o campo, ou melhor é definida pelo trabalho de uma força contra o campo.

Pode-se entender facilmente porque isto é assim, repetindo em outras palavras o que explicamos acima.

Sabemos que a energia potencial de uma massa m no campo gravitacional situado à uma altura h do chão (no caso o chão é tomado como nível zero de energia potencial), é mgh (com sinal positivo). Ora, este é o trabalho de uma força $\vec{F}$ igual e contraria à força peso, para elevar uma massa m do nível zero ao nível h. E este é um trabalho positivo pois a força tem a mesma direção do deslocamento assim $\vec{F} \cdot \vec{d}$ é positivo (o cosseno de zero, que é o ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{d}$ é +1).

Suponhamos agora que queiramos calcular, para um campo vetorial conservativo, ou seja, com $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, qual é a função energia potencial deste campo, ou seja, queremos calcular ϕ tal que $\vec{\nabla}\phi = -\vec{F}$. (Pois sabemos que existe W tal que $\vec{\nabla} W = \vec{F}$ e sabemos que $\phi = -W$). Sabemos também que podemos calcular ϕ a menos de uma constante aditiva. Isto "a menos de uma constante aditiva" significa que se ϕ é a nossa função energia potencial, então $\phi + k$ onde k é uma constante arbitraria, também é.

Basta para tanto calcular a integral $\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$ de certo nível de referência (que podemos escolher arbitrariamente) até certo ponto B. Se calcularmos este trabalho com $\vec{F}$ sendo a força do campo vamos ter o valor da função W em B. Fazendo agora B um ponto genérico (x, y, z) teremos a função $W = W(x, y, z)$ e portanto também a função energia potencial que é $\phi = -W$. Vejamos com um exemplo como isto pode ser feito.

Exemplo 2

Mostre que

$\vec{F} = (2xy - z^3)\hat{i} + x^2\hat{j} - (3xz^2 + 1)\hat{k}$

É conservativo, e encontre a função energia potencial ϕ (ou seja, ϕ tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$)

Solução: Temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy - z^3 & x^2 & -3xz^2 - 1 \end{vmatrix} = \vec{0} \qquad [6 - 27]$$

(Verificar!)

Então

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B (2xy - z^3)dx + x^2 dy - (3xz^2 + 1)dz \qquad [6 - 28]$$

E sabemos que esta integral não depende do caminho. Podemos então escolher um caminho que simplifique a integração. Escolhemos o ponto A como sendo o ponto (0, 0, 0) (a origem de nosso sistema de coordenadas), pois sabemos que temos liberdade de escolha do nível de referência (nível zero) de energia potencial.

E vamos então integrar o trabalho ($\vec{F}.d\vec{r}$) infinitesimal, da origem até o ponto (x, y, z).

Vamos escolher como caminho de integração a linha de (0, 0, 0) a (x, 0, 0), em seguida de (x, 0, 0) até (x, y, 0) e finalmente de (x, y, 0) até (x, y, z).

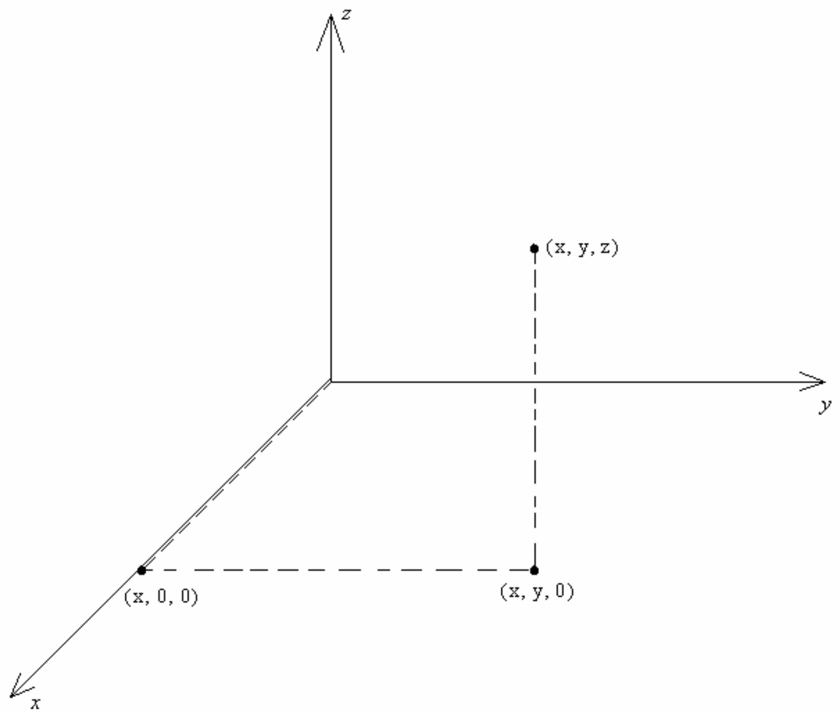

Fig. [6-13]

De (0, 0, 0) até (x, 0, 0) temos:

y = z = 0, e dy = dz = 0.

Assim podemos ver que a integral neste percurso é nula. De (x, 0, 0) à (x, y, 0) temos x = constante z = 0. Logo dx = dz = 0 e então a integral [6 - 28] fica

$$\int_0^y x^2 dy = x^2 \int_0^y dy = x^2 y$$

De (x, y, 0 até (x, y, z) temos x = constante y = constante, então dx = dy = 0 e a integral é

$$-\int_0^z (3xz^2 + 1)dz = -xz^3 - z$$

Somando os três trechos ficamos com

$$W = x^2 y - xz^3 - z$$

E então a função energia potencial ϕ é

$$\phi = -W = -x^2 y + xz^3 + z$$

Teorema Trabalho Energia

A primeira definição matemática de energia, a energia potencial de um campo conservativo, que acabamos de definir está ligada à noção de trabalho: é o trabalho realizado pela força contrária ao campo, desde certo ponto de referência até o ponto onde estamos definindo a energia potencial. Assim o conceito de energia está ligada à possibilidade de realização de trabalho. A palavra potencial vem de Aristóteles que qualificava o processo da evolução do mundo em *Potentia e Acta*. *Potentia* é a possibilidade dos fenômenos acontecerem e *Acta* é enquanto eles se realizam. Este sentido Aristotélico se mantém no nosso conceito moderno. Assim se mantivermos uma certa massa à uma dada altura do chão, ela tem, devido à existência de um campo gravitacional, a possibilidade de realizar trabalho. Assim se esta massa for um bate-estacas, quando abandonada de certa altura, ela ajuda a enterra uma estaca no chão. Ou seja, ela tem, pelo simples posicionamento em um campo gravitacional, uma certa energia, (energia potencial gravitacional) e como tal, ou seja, na qualidade de energia potencial, a possibilidade de realizar trabalho.

Queremos enfatizar alguns pontos importantes da nossa definição de energia potencial. Lembremos que escolhido um ponto qualquer como nível de referência, ou seja, ao qual podemos atribuir arbitrariamente, o valor zero de energia potencial, podemos, calculando o trabalho do campo atuando sobre uma certa massa m enquanto ela se desloca da nossa referência até um ponto qualquer, atribuir um valor à energia potencial desta massa neste ponto. Mas isto só é possível se o valor deste trabalho não depender da particular trajetória unindo nosso ponto de referência a este ponto. Isto porque só assim podemos associar um único valor a cada ponto e assim definir uma função energia potencial que depende somente da posição. A cada ponto do campo temos um valor da energia potencial que depende somente da posição deste ponto no campo de forças. Então a primeira conclusão que queremos enfatizar, é que só é possível definir energia potencial para campos conservativos, ou seja, aqueles campos em que o trabalho do campo entre dois pontos é o mesmo qualquer que seja a trajetória.

Uma segunda observação importante é que o nível zero de energia potencial, ou seja, aquele ponto ou aquele conjunto de pontos ao (aos) qual (quais) atribuímos energia potencial zero, é escolhido arbitrariamente. Tudo que sabemos de um campo conservativo é que a integral de linha do campo em uma trajetória unindo dois pontos, só depende da posição destes dois pontos e não da particular trajetória. Então tudo que sabemos é a diferença de energia potencial entre estes dois pontos. Se atribuirmos o valor zero à energia potencial de um deles, teremos um valor para a energia potencial do outro, valor este válido para esta escolha do nível zero de energia potencial.

Observemos ainda (ver Fig. [6-14]) que para um campo conservativo, o trabalho realizado pelo campo em um caminho fechado é nulo. De fato:

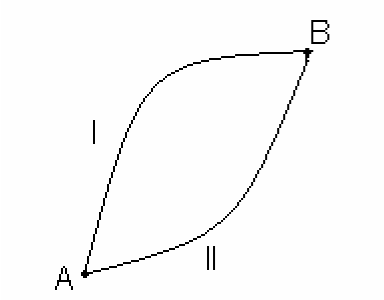

Fig. [6-14]

$$\underbrace{\int_A^B \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}}_{\text{Caminho I}} = \underbrace{\int_A^B \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}}_{\text{Caminho II}}$$

Invertendo o sentido de percurso da integral de linha do segundo membro, ou seja, trocando os limites de integração e ao mesmo tempo trocando o sinal, temos o mesmo número. Então:

$$\int_A^B \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = -\int_A^B \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$$

Donde:

$$\int_A^B \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = 0$$

Mas a soma do trajeto *AB* pelo caminho I, com o trajeto BA pelo caminho II, nada mais é que a integral por um caminho fechado que partindo de *A* volta ao ponto *A* e que indicamos por $\oint \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$. Como tanto o ponto A quanto o ponto B são arbitrários, podemos escrever para qualquer trajetória fechada dentro de um campo conservativo $\vec{F}(\vec{r})$, que:

$$\oint \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = 0$$

Há outras formas de energia além da energia potencial. Todas implicam, e são medidas pela possibilidade de realizar trabalho. No exemplo do bate-estacas , vimos que uma certa massa elevada à uma certa altura do chão, tem como decorrência de sua posição elevada, a possibilidade de realizar trabalho. Quando certa massa é abandonada ela é acelerada pela força peso e ganha velocidade. Graças a esta velocidade ela se chocando com a estaca vai ajudar a enterrar a estaca no solo, ou seja, vai realizar trabalho. Há assim uma energia que é ligada à velocidade da massa e que se chama energia cinética.

Vamos então demonstrar um resultado importante que relaciona o trabalho de uma força com a variação da energia cinética e que é o Teorema Trabalho-Energia.

Considerando a integral $\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ onde A é um ponto de coordenadas (x_1, y_1, z_1) e B = (x_2, y_2, z_2), e seja $\vec{F}(\vec{r})$ um campo de forças qualquer (não necessariamente conservativo). A expressão $\int_A^B \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$ pode ser traduzida pela soma de três integrais:

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} F_x dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} F_y dy}_{I_2} + \underbrace{\int_{z_1}^{z_2} F_z dz}_{I_3} \qquad [6\text{-}29]$$

Trabalhando com a primeira integral do segundo membro, podemos fazer (a integral é I_1):

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} m a_x dx = \int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv_x}{dt} dx$$

Mas a variável v_x pode ser posta como função de função se considerarmos v_x função da posição x, que por sua vez é função do tempo t, ou seja, $v_x = v_x(x(t))$.Então pela regra da cadeia:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Mas, $\frac{dx}{dt} = v_x$.

Então nossa primeira integral I_1 fica:

$$\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv_x}{dt}dx = \int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv_x}{dx}v_x dx$$

Mas se em x_2 a velocidade for v_2 e em x_1 for v_1 podemos fazer uma mudança de variável na integral definida e então:

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} mv_x\frac{dv_x}{dx}dx = \int_{v_{x1}}^{v_{x_2}} mv_x dv_x$$

Então:

$$I_1 = m\frac{v_x^{\ 2}}{2}\Bigg|_{v_{x_1}}^{v_{x2}} = \frac{1}{2}mv_{x_2}^2 - \frac{1}{2}mv_{x_1}^2$$

Trabalhando então analogamente com as integrais I_2 e I_3 ,temos:

$$I_2 = \frac{1}{2}mv_{y_2}^2 - \frac{1}{2}mv_{y_1}^2$$

e

$$I_3 = \frac{1}{2}mv_{z_2}^2 - \frac{1}{2}mv_{z_1}^2$$

Substituindo estes valores de I_1, I_2 e I_3 em [6-29], temos:

$$\int_A^B \vec{F}d\vec{r} = \frac{1}{2}mv^2{}_{x_2} + \frac{1}{2}mv^2{}_{y_2} + \frac{1}{2}mv^2{}_{z_2} - \frac{1}{2}mv^2{}_{x_1} - \frac{1}{2}mv^2{}_{y_1} - \frac{1}{2}mv^2{}_{z_1}$$

Onde:

$\vec{v}_A = (v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1})$ e $\vec{v}_B = (v_{x_2}, v_{y_2}, v_{z_2})$.

E observando que:

$$v_A{}^2 = (v_{x_1}\hat{i} + v_{y_1}\hat{j} + v_{z_1}\hat{k}) \cdot (v_{x_1}\hat{i} + v_{y_1}\hat{j} + v_{z_1}\hat{k}) = v^2{}_{x_1} + v^2{}_{y_1} + v^2{}_{z_1}$$

Concluímos:

$$\int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \frac{1}{2} m v^2{}_B + \frac{1}{2} m v^2{}_A \qquad [6\text{-}30]$$

O resultado [6-30] é a expressão matemática do Teorema Trabalho-Energia, que estabelece que:

"O trabalho realizado por uma força atuando sobre um corpo que se desloca de uma posição *A* até uma posição *B* é igual à variação da energia cinética entre *A* e *B*".

Observações:

i) No caso a força $\vec{F}$ é a única força atuando sobre o corpo, ou a resultante das forças atuando sobre o corpo.

ii) A força $\vec{F}$ que atua ao longo de toda a trajetória entre *A* e *B* não é necessariamente parte de um campo conservativo. (Ver perguntas).

iii) A quantidade $\frac{1}{2}mv^2$ é a energia cinética de partícula (ou do corpo). É uma quantidade escalar que depende da massa do corpo e de sua velocidade.

Energia Mecânica Total

Na definição de energia potencial em um ponto P, usando a expressão:

$$U(P) = -\int_0^p \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Onde $\vec{F}$ é o campo em questão. Vejamos a razão deste sinal.

Seja a energia potencial de um corpo de peso $\vec{P}$ no campo gravitacional situado à uma altura h do chão. Tomando o chão como nível zero de energia potencial, a energia potencial deste corpo de massa *m* a uma altura h é *mgh*. Vemos então que:

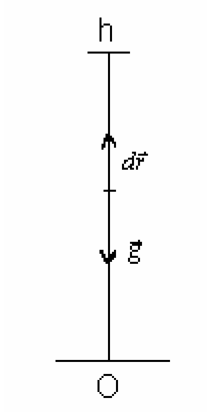

Fig. [6-15]

$$U = -\int_0^h \vec{F}d\vec{r} = -\int_0^h m\vec{g}d\vec{r} \qquad [6 - 31]$$

Mas:

$$\vec{g} \cdot d\vec{r} = -gdr$$

Pois no trajeto de zero (chão) até a altura *h* o vetor $\vec{g}$ faz com $d\vec{r}$ um ângulo de *180°*. Temos então:

$$U = -\int_0^h \left(-mgdr\right) = mg\int_0^h dr = mgr\Big|_0^h = mgh$$

Como queríamos obter.

Observemos ainda quando um corpo cai de uma altura *h*, ou seja, quando ele se move sob ação de um campo conservativo, ele vai perdendo energia potencial e ganhando energia cinética. Como tanto a variação da energia cinética quanto a da potencial são medidas pela mesma integral de linha, e tem sinais contrários, vemos que se ΔU for a variação da energia potencial e ΔK a da cinética, temos:

$$\Delta U = -\Delta K \qquad [6 - 32]$$

O que significa que:

$$U_2 - U_1 = -(k_2 - k_1) \qquad [6 - 33]$$

Donde

$$U_2 + K_2 = U_1 + K_1 \qquad [6 - 34]$$

onde 1 e 2 representam dois pontos do percurso. A equação [6-34] exprime o fato de que a energia mecânica total, definida como a soma da energia potencial com a energia cinética é constante.

Em mecânica usamos o princípio da conservação da energia mecanica total, e este principio nos ajuda a resolver muitos problemas como no exemplo que mostraremos a seguir.

A conservação da energia é porem um princípio mais genérico. Se há atrito, a energia mecânica não se conserva, mas este atrito vai significar a transformação de energia mecânica em calor, em energia sonora, enfim em outros tipos de energia. O corpo perde energia mecânica, mas ele mesmo e o ambiente ganham calor, energia sonora etc... Assim considerando apropriadamente o sistema no qual se está medindo a energia e considerando as diversas formas de energia, podemos dizer que a energia sempre se conserva.

Energia elástica

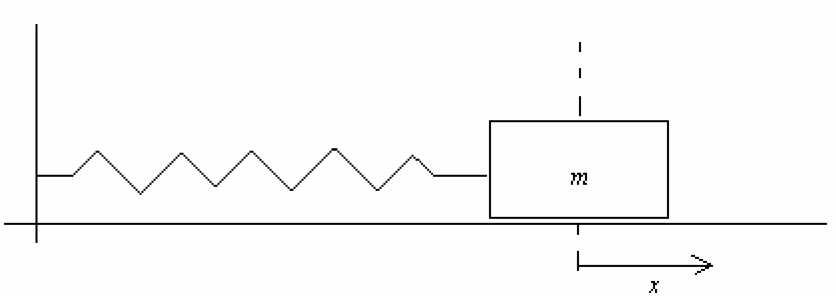

Fig. [6-16]

Outro campo de forças que muitas vezes tratamos como conservativo é o das forças elásticas. Seja o sistema massa-mola como na Fig. [6 - 16].Há uma posição de equilíbrio (posição 0 da figura) em que a mola não esta nem esticada nem comprimida. Se afastarmos a massa m. da posição de equilíbrio (por exemplo esticar a mola de uma distancia *x*), vai aparecer uma força restauradora $-kx$, onde o sinal menos exprime o fato da força ter direção contraria a do deslocamento *x*. Temos $F=-kx$. Usando a definição de energia potencial o que implica tratar a força da mola como um campo conservativo, ou seja, uma mola sem perda e sem atrito, temos.

$$U = -\int_0^{\bar{x}} F dx' = -\int_0^{\bar{x}} -kx' dx' = \frac{1}{2}kx^2$$

A energia potencial de uma mola, esticada ou comprimida uma distancia *x*, é $\frac{1}{2}kx^2$, onde *k* é o coeficiente elástico da mola.

Potencia

Uma grandeza física que freqüentemente tem interesse, é a taxa em que o trabalho é realizado. Esta grandeza é a potencia. Defini-se potência média liberada por um agente como o quociente do trabalho total que ele realiza pelo intervalo de tempo gasto. Temos:

$$\overline{P} = \frac{W}{t} \qquad [6\text{-}35]$$

Já a potencia instantânea libeada pelo agente é

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad [6\text{-}36]$$

A unidade de potencia no SI é watt = 1 joule/segundo, cuja abreviatura é W. O trabalho pode ser expresso também em unidades de potencia x tempo. Exemplo o quilowatt-hora (*kWh*). O quilowatt-hora é o trabalho realizado em uma hora por um agente que trabalha à taxa constante de *1kW*.

Exemplo 3

"*Um automóvel à potencia 75 kw, move-se à velocidade de 90km/h. qual o empuxo para a frente exercido pelo motor no automóvel?*

Solução

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{d}}{t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Como $\vec{F}$ e $\vec{v}$ tem a mesma direção:

$$P = Fv$$

Então

$$F = \frac{P}{v} = \frac{75kW}{25m/s} = 3 \times 10^3 N.$$

Vejamos agora alguns exemplos de solução de problemas usando o principio de conservação da energia mecânica.

Exemplo 4

Um esquiador desce uma encosta de altura *h* a partir da velocidade zero. Se a massa do esquiador é *m*, calcular a velocidade com que ele chega ao pé da encosta.

Solução: suponha a inexistência de atrito, a energia potencial do esquiador *mgh* (escolhido o chão como nível 0 de referencia) se transforma em energia cinética. Então

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

[No alto da colina o esquiador esta parado: sua energia mecânica total é *mgh*. No sopé da encosta a energia potencial é zero e a energia mecânica total é $\frac{1}{2}mv^2$]

então:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Exemplo 5

"Um pendulo é construído por um corpo de massa m pendurado em um cordel de comprimento L. O corpo é desviado da vertical de modo que o cordel faz um ângulo θ_0 *com esta vertical e depois é solto, sem velocidade inicial. Determinar as expressões a) da velocidade v no ponto mais baixo da oscilação e b) a tensão no cordel neste ponto"*

Solução: Sendo o campo gravitacional conservativo, podemos aplicar a noção de conservação de energia mecânica. Tomemos o ponto mais baixo da oscilação (ponto A Fig. [6-17]) como nível zero de energia potencial.

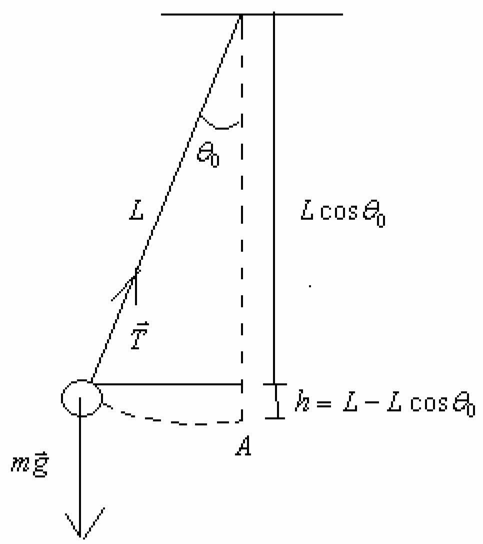

Fig [6-17]

Neste caso usando

$E_f = E_i$, [6-37]

Temos

$E_i = K_i + U_i = 0 + mgh$,

Onde *h* é a altura do pendulo no momento inicial. Por sua vez

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

Então, da equação [6-37] tiramos

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Da fig. [6-17]

Vemos que

$h = L - L\cos\theta_0 = L(1-\cos\theta_0)$

Então

$v = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$ resposta a)

Lembrando que a resultante das forças no ponto mais baixo é a própria aceleração centrípeta (v^2/L) do movimento e que:

$\vec{R} = \vec{T} + m\vec{g}$

Projetando no eixo *y* (eixo vertical)

$R = T - mg$

Mas

$$R = \frac{mv^2}{L}$$

Então

$$T = \frac{mv^2}{L} + mg$$

Entrando com o valor obtido de *v* na resposta a)

$$T = \frac{m2gL(1-\cos\theta_0)}{L} + mg$$

$$T = \left(\frac{2L(1-\cos\theta_0)}{L} + 1\right)mg$$

$$T = (2(1-\cos\theta_0)+1)mg$$

$T = (3-2\cos\theta_0)mg$ Resposta b)

Exemplo 6

"A constante de força de uma mola elástica pendurada na vertical é *k*. Um corpo de massa *m* é preso à ponta da mola, na posição de equilíbrio, e cai verticalmente. Determinar a expressão da distancia máxima da queda do corpo entes de o movimento ter sentido ascendente."

Solução:

Como tanto a mola (mola ideal sem atrito) quanto o campo gravitacional são campos de força conservativos podemos usar o principio de conservação da energia mecânica total. Considerando o nível zero de energia potencial da mola, a posição de equilíbrio desta, que é a posição na qual o corpo é abandonado, e ao mesmo tempo tomando esta posição como nível zero de energia potencial gravitacional temos $E_i=0$, pois estamos na posição que definimos como nível zero de energia potencial, tanto da mola quanto do campo gravitacional, e ao mesmo tempo o corpo é ai abandonado do repouso (energia cinética portanto zero)

$$E_f = K + U_g + U_m$$

Onde U_g é a energia potencial do campo gravitacional e U_m é a energia potencial da mola. Então:

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 - mgh + \frac{1}{2}kh^2$$

Mas no ponto mais baixo , que é quando se inverte a direção da velocidade, esta, por um instante, é igual a zero.

Então, levando em conta que $E_i=E_f$ temos:

$$0 = -mgh + \frac{1}{2}kh^2$$

Fatorizando

$$h(-mg + \frac{1}{2}kh) = 0$$

A solução $h=0$ é a posição inicial. A outra:

$$\frac{1}{2}kh = mg$$

$$k = \frac{2mg}{h} \quad \text{Resposta}$$

Exemplo 7

"Dois corpos de massa *m*$_1$ e *m*$_2$ estão pendurados por um fio muito leve à uma roldana com massa e atrito desprezível. Os dois corpos estão inicialmente em repouso. Calcule a velocidade do mais pesado quando tiver caído uma distancia vertical *h*"

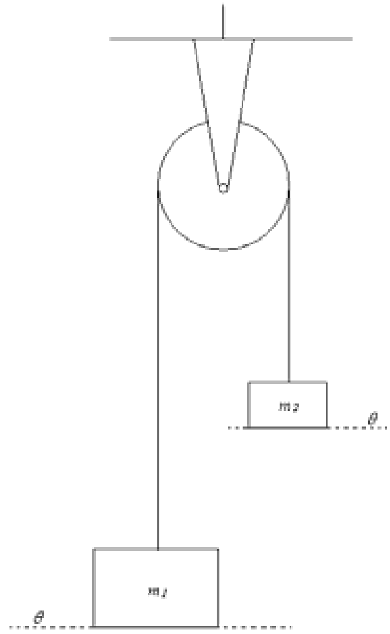

Fig. [6-18]

Solução: tomamos o nível zero de energia potencial de cada um dos corpos, como sendo o nível em que cada um estava no instante inicial, ou seja, quando estavam em repouso.

Consideremos agora um instante posterior, em que o corpo de massa m1 tenha uma velocidade v (direção vertical para baixo) e o corpo de massa m2 tenha uma velocidade v (direção, vertical para cima). Seja ainda este momento aquele em que o corpo de massa m1 se deslocou de uma distância h, para baixo, em que portanto o corpo de massa m2 se desloca a mesma distancia h para cima. Neste momento a energia total do sistema, levando em conta que a polia não roda e há escorregamente sem atrito é:

$$E_f = \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 - m_1 gh + m_2 gh \quad [6\text{-}38]$$

A energia mecânica total no instante inicial é, com a escolha de referência de energia potencial adotada:

$$E_i = 0$$

Como no caso há conservação da energia mecânica total (o campo gravitacional é conservativo) temos

$$E_f = E_i \quad [6\text{-}39]$$

Então as equações [6-38] e [6-39] fornecem:

$$\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 - m_1gh + m_2gh = 0$$

$$v^2\left(\frac{m1 + m2}{2}\right) = (m1 - m2)gh$$

$$v^2 = \frac{2(m1 - m2)gh}{m1 + m2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2.(m1 - m2)gh}{m1 + m2}}$$

CONCLUSÃO

Nesta aula, é de fundamental importância, dominar o conceito de campo conservativo. Este conceito só pode ser entendido com todo ferramental matemático desenvolvido neste capitulo.

Se um campo é conservativo, então, é possível dar o conceito de energia potencial e este conceito, mais uma vez, só pode ser assimilado com o adequado aparato matemático que é a integral de linha.

Decorre que a lei de conservação da energia mecânica, não é uma lei geral, ela só vale para campos conservativos. Mas a lei de conservação de energia, em sentido lato, é uma lei geral – se a enegia mecânica é dissipada pela presença de forças não conservativas, ela se transforma em outra forma de energia, térmica, sonora, de deformação (a energia é gasta deformando corpos), etc... A compreensão pelos físicos desta lei mais geral, só se deu com o desenvolvimento da termodinâmica no correr do século XIX.

É importante notar que o Teorema Trabalho-Energia Cinética porém, vale para qualquer tipo de força. Recomendamos que os alunos examinem a demonstração deste teorema. Verão que em nenhum momento foi introduzido alguma hipótese ou alguma condição de força conservativa.

RESUMO

Nesta aula demos em primeiro lugar a definição mais genérica de trabalho explicando em primeiro lugar qual o significado de $\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$ e mostrando porque ela representa o trabalho de um campo de força $\vec{F} = F_x(x, y, z)\hat{i} + F_y(x, y, z)\hat{j} + F_z(x, y, z)\hat{k}$ em uma trajetória contida nesse campo. Mostramos, por meio de exemplos, como calcular esta integral, o que significa calcular uma integral de linha. Definimos então campo conservativo, dando as condições matemáticas para ser conservativo, e então definimos energia potencial.

Introduzimos então a lei de conservação da energia mecânica, mostrando as suas condições de aplicabilidade e discutindo sua possível generalização na lei de conservação da energia.

Por fim demonstramos o Teorema Trabalho-Energia Cinética e mostramos em alguns exemplos, como aplicá-los na solução de problemas de dinâmica.

ATIVIDADE

Questões e problemas

6.1

1-Defina trabalho de uma força usando vetores.

2-O que é um campo de forças? Dê sua expressão matemática.

3-Explique, resumidamente, e com suas palavras como se chega à definição de trabalho no caso mais geral.

4-Tomando o campo $\vec{F} = xy\hat{i} - y^2\hat{j}$, calcule o trabalho deste campo bidimensional, e uma trajetória reta unindo (0, 0) à (1, 1).

5-Calcule o trabalho do mesmo campo por uma parábola $y = \frac{1}{4}x^2$ de (0, 0) à (2, 1).

6-Calcule o mesmo trabalho do mesmo campo, de (0, 0) à (2, 1) por uma linha quebrada de (0, 0) à (0, 1) e de (0, 1) à (2, 1).

7-Calcule o mesmo trabalho do mesmo campo de (0, 0) à (2, 1) por uma curva dada pelas equações paramétricas $x = 2t^3$ e $y = f^2$.

8-Defina campo conservativo.

9-Defina os operadores diferenciais gradiente e rotacional.

10-Quais as condições matemáticas de um campo de forças para ele ser conservativo.

11-Mostre que se um campo for conservativo é possível definir uma função escalar W pelo trabalho do campo de um ponto O (até um P genérico) e mostre que se o campo pode ser escrito como gradiente de uma função escalar ($\vec{F} = \vec{\nabla} W$), então W é uma função dos pontos do espaço tridimensional.

12-Defina a função energia potencial de um campo conservativo.

13-Verifique quais dos campos dados são conservativos e em seguida calcule (quando for o caso) a energia potencial (a função energia potencial) do campo.

a) $\vec{F} = \hat{i} - z\hat{j} - y\hat{k}$

b) $\vec{F} = (3x^2yz - 3y)\hat{i} + (x^3y - 3x)\hat{j} + (x^3y - 3z)\hat{k}$

c) $\vec{F} = y\,\text{sen}\,2x\hat{i} + \text{sen}^2\,x\hat{j}$

14-Mostre que o campo gravitacional é conservativo.

15-Calcule o gradiente dos seguintes campos escalares.

a) $W = 2xy + xy^2z + 3z^3y$

b) $W = 3(\text{sen}\,x)y^2z + (z^3 - 4y)$

c) $W = 4(tgx)y^3z^2$

6.2

1-Explique a lei da conservação da energia mecânica total.

2-Discuta as limitações e o alcance da lei de conservação da energia mecânica total. Explique a lei mais geral de conservação da energia.

3-Defina Potencial.

4-O corpo de 3 kg representado na Fig. [6-19] é solto, no repouso, de um ponto a 5 m de altura de uma rampa curva, sem atrito. A mola fixa no pé da rampa tem a constante de força k = 400 N/m. O corpo colide com a mola e provoca uma compressão x até ficar momentaneamente em repouso, *(a)* Calcular x. *(b)* O que acontece com o corpo depois de ficar em repouso?

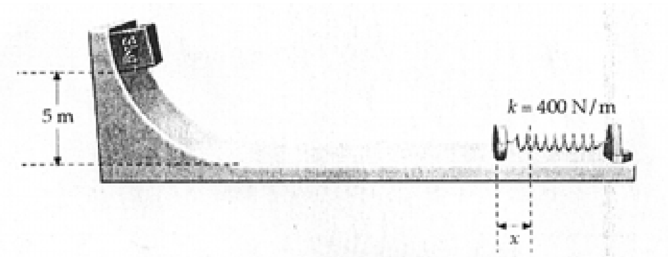

Fig. [6-19]

5 - Um corpo está sobre um plano inclinado conforme o esquema da Fig. [6-20]. A mola a que está ligado, por intermédio da roldana, é puxada para baixo com uma força gradualmente crescente. O valor de $\mu_{s\,s}$ é conhecido. Determinar a energia potencial U da mola no instante em que o corpo principia a se mover.

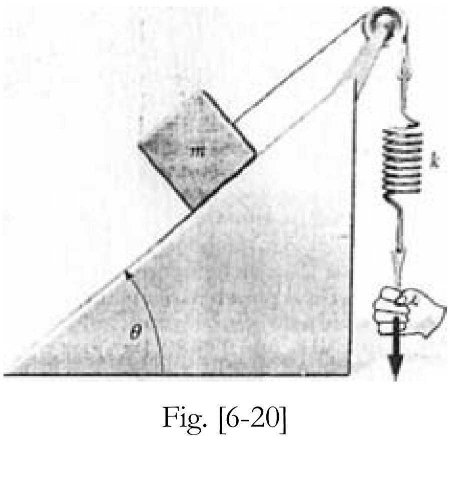

Fig. [6-20]

6 - Um pêndulo tem um peso de 2 kg preso a um cordel leve com 3 m de comprimento. O peso recebe um impulso inicial horizontal e adquire uma velocidade de 4,5 m/s. Num ponto em que o cordel faz um ângulo de 30° com a vertical, qual é *(a)* a velocidade? *(b)* Qual a energia potencial? (c) Qual a tensão na corda? *(d)* Que ângulo faz o cordel com a vertical quando o pêndulo atinge a maior altura possível?

7 - Um pêndulo tem o comprimento L e um peso de massa m. O pêndulo é posto numa posição horizontal e o corpo recebe a velocidade inicial mínima para completar uma volta completa no plano vertical, *(a)* Qual a energia cinética máxima K do peso do pêndulo? *(b)* Qual a tensão no fio do pêndulo quando a energia cinética é máxima?

8 - 35 Um corpo de massa m está pendurado num fio de comprimento L e preso a uma mola elástica de constante de força k (Fig. [6-5]). Em repouso, o fio, o corpo e a mola estão numa vertical. O comprimento da mola, sem tensões, é L/2 e a distância entre a ponta mais baixa da mola e a extremidade fixa do fio é 1,5 L. O pêndulo é desviado de modo a fazer pequeno ângulo θ com a vertical e depois é solto. Determinar a expressão da velocidade do corpo quando passa pela posição $\theta = 0$.

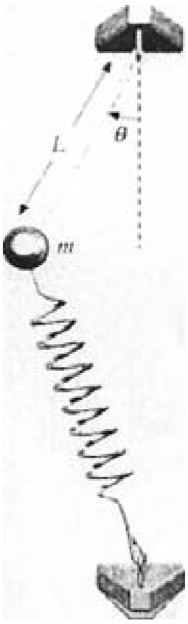

Fig. [6-5]

9 - Um carro de 2000 kg, com a velocidade inicial de 25 m/s, escorrega 60 m ao parar sobre uma pista horizontal, *(a)* Calcular a energia dissipada no atrito, *(b)* Calcular o coeficiente de atrito cinético entre os pneumáticos e a pista.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boas, M. L. *Mathematical Methods in the Physical Sciences.* 2ª ed. John Wley e Sons. Ano 1983.

Resnick, R. e Halliday, D. *Física 1*. 3ª ed. LTC. Ano 1979.

Tipler, P. A. *Física.* Volume I. 4ª ed. LTC. Ano 2000.