

Aula 7

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

META

Explicar a Lei de Conservação de Momento Linear, colocando sua importância e seu alcance. Mostrar sua aplicação com diversas situações físicas.

OBJETIVOS

Que os alunos através de uma discussão feita no texto, tenham uma compreensão da importância da segunda grande lei de conservação Mecânica. Que os alunos possam dominar à nível introdutório o ferramental matemático das integrais duplas e triplas para calcular o centro de massa de corpos contínuos. Que os alunos saibam aplicar a Lei de Conservação do Momento Linear, estudo das colisões e na solução de problemas de dinâmica em geral.

PRÉ-REQUISITO

O curso de Cálculo I. As noções de cinemática e dinâmica vistas nas aulas anteriores, e as noções algoritmo-conceituais de cálculo apresentadas nas aulas anteriores.

INTRODUÇÃO

Depois de Conservação de Energia, a segunda grande lei de conservação da Mecânica, é a Conservação do Momento Linear. A grandeza momento linear é

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad [7-1]$$

Onde m é a massa do corpo (ou da partícula material) e \vec{v} sua velocidade. Como podemos ver, trata-se de uma grandeza vetorial. Antes de enunciarmos e analisarmos esta grande lei de conservação, vamos definir o conceito de centro de massa.

7.1 Centro de massa

O conceito de centro de massa foi desenvolvido por Newton, e é um elemento de fundamental importância na sua mecânica e na sua teoria da gravitação. Sabemos que todo corpo na superfície da Terra está sujeito à uma força de atração gravitacional, que é o seu peso, e dada por:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{d^2} \hat{e}_r \quad [7-2]$$

(onde usamos o versor \hat{e}_r (versor radial) e a força, sendo atrativa tem sinal contrário ao do versor. Em [7-2] M é a massa da Terra, m é a massa do corpo e d a distância entre as duas massas. Mas qual é esta distância d , se o corpo está na superfície da Terra e, portanto em contato com a massa M ? A distância d que aparece em [7-2] para calcularmos o peso do corpo é, no caso, o raio da Terra. A aplicação de [7-2] se realiza como se tivéssemos a massa da Terra concentrada no seu centro, e assim duas massas m e M separadas por uma distância d igual ao raio da Terra. Esse ponto no qual supusemos toda a massa da Terra concentrada é o centro de massa do planeta Terra. Estamos também implicitamente admitindo que a Terra seja uma esfera ou densidade uniforme.

O conceito de centro de massa se liga de certa maneira ao conceito de partícula material que é um conceito que já temos usado. De fato, quando estudamos nossos problemas de cinemática ou de dinâmica, tratamos os objetos que aparecem nestes problemas, como partículas materiais. Não temos, até agora, entrado em considerações sobre o formato destes objetos, as relações métricas entre suas partes, os diferentes movimentos e as diferentes forças que atuam sobre partes distintas destes objetos. Em geral nos concentramos sobre a força e o movimento do objeto como um todo. Quer dizer, tratamos o objeto como uma partícula material. Por exemplo, se atirmos um objeto

qualquer no espaço, seja um livro, um apagador, ou uma caixa, sabemos que este corpo vai realizar um movimento complicado. Vai em geral rodar, e suas diferentes partes, por tanto, tem movimentos diferentes. As páginas do livro podem se abrir. Mas o movimento como um todo, será o movimento de um projétil em um campo gravitacional, ou seja, sua trajetória será de uma parábola no espaço e o movimento será a composição de um movimento retilíneo uniforme horizontal, com um movimento vertical uniformemente acelerado. Quando estudamos então, o movimento de um projétil em um campo gravitacional, tratamos o projétil como uma partícula material, ou seja, como se toda sua massa estivesse concentrada em um ponto: este ponto é o centro de massa do projétil. Em um segundo momento levando em consideração o formato do projétil, a distribuição de sua massa em suas diferentes partes, podemos estudar o movimento do projétil não mais como um partícula material, mas como um corpo. Podemos então em um segundo momento, estudar como se movem as diferentes partes do corpo com relação ao centro de massa. Isto quer dizer que estudaremos os movimentos das diferentes partes do corpo, em um referencial cuja origem está no centro de massa do corpo. Estes movimentos podem ser de diversas naturezas: podemos ter rotações em torno de eixos que passem pelo centro de massa (Os quais por sua vez também podem apresentar movimentos de rotação), podemos ter vibração das diferentes partes do corpo, ou uma combinação destes movimentos. Tudo isto pode ser descrito em termos de um referencial centrado no centro de massa do sistema. Mas ao mesmo tempo este referencial, no caso do exemplo que estamos tratando, realiza o movimento de um projétil no referencial Terra.

Esta divisão do estudo de um fenômeno físico em diferentes aspectos, tratados isoladamente é uma característica típica da Física, e chama-se reducionismo. Podemos em Física reduzir um problema complexo a diferentes aspectos tratados e resolvidos separadamente.

Passemos agora à definição de centro de massa. Consideremos um conjunto de n massas distintas m_1, m_2, \dots, m_n , perto da superfície da Terra. Sobre cada uma destas massas atua uma força, $m_1 \vec{g}, m_2 \vec{g}, \dots, m_n \vec{g}$. O centro de massa deste conjunto discreto de massas m_1, m_2, \dots, m_n é o ponto de aplicação da resultante destas forças. Vejamos como calculá-lo.

Podemos supor estas forças paralelas, embora elas se dirijam a um ponto: o centro da Terra. Mas dada a relação entre as distâncias que separam estas n massas e a distância ao centro da Terra, estas forças são de fato, e para todos os efeitos de cálculos, forças paralelas.

Tomaremos inicialmente duas forças atuando em duas massas iguais m e situadas em um segmento de reta horizontal a uma distância d . (Fig. [7-1])

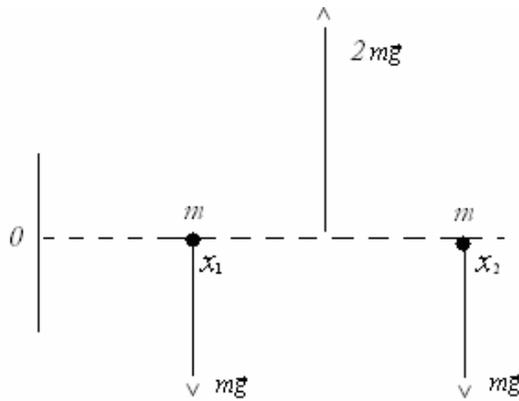


Fig. [7-1]

Para achar o ponto de aplicação da resultante das duas forças $m\vec{g}$, uma atuando em x_1 e outra em x_2 vamos considerar uma terceira força $2m\vec{g}$: de anular as duas forças $m\vec{g}$, (Naturalmente esta força tem que ter direção oposta à soma das duas forças $m\vec{g}$. Então esta terceira força \vec{F}_3 tem módulo $|2m\vec{g}|$ e direção para cima). E para que esta força \vec{F}_3 possa equilibrar as duas forças $m\vec{g}$ é preciso que seu ponto de aplicação seja o da resultante das duas forças $m\vec{g}$. Para achar portanto a resultante das duas forças $m\vec{g}$, temos que achar uma terceira força que equilibra o sistema.

Embora este primeiro caso muito simples que estamos considerando, possa ser resolvido imediatamente por mera observação, vamos, para efeito de depois generalizar nossos procedimentos, resolver este problemas de equilíbrio segundo as regras da estática. Quando um sistema de forças está em equilíbrio? Quando a resultante das forças for nula, e quando a soma dos torques for nula. Escolhendo o sistema de eixos da Fig. [7-2]:

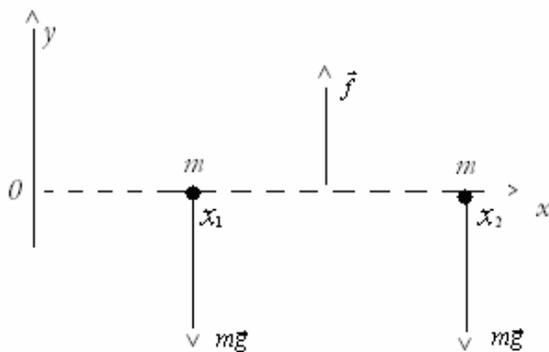


Fig. [7-2]

podemos escrever as duas equações como:

a) Resultante das duas forças:

$$m\vec{g} + m\vec{g} + \vec{f} = \vec{0} \quad [7-3]$$

b) Soma dos torques:

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_f = \vec{0}$$

Lembrando que:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

E que:

$$|\vec{\tau}| = rF \sin \theta$$

Temos que:

$$|\vec{\tau}_1| = x_1 mg$$

$$|\vec{\tau}_2| = x_2 mg$$

$$|\vec{\tau}_f| = x_{CM} mg$$

Sabemos também, da definição de produto vetorial que tanto $\vec{\tau}_1$ quanto $\vec{\tau}_2$ são vetores perpendiculares ao plano definido pelo eixo X e pelos $m_1\vec{g}$ e $m_2\vec{g}$, ou seja, ao plano da página onde esta desenhada a Fig. [7-2] com sentido para dentro da página. Já o torque $\vec{\tau}_f$ também é perpendicular a página da figura, mas o sentido é saindo da página. Se definirmos o eixo Z perpendicular ao plano XY e com direção positiva saindo da página da figura, temos:

$$\vec{\tau}_1 = -x_1 mg \hat{e}_z \quad [7-4]$$

$$\vec{\tau}_2 = -x_2 mg \hat{e}_z$$

$$\vec{\tau}_f = x_{CM} mg \hat{e}_z$$

De [7-3]: a)

Tiramos $f = 2mg$. Então:

$$\vec{\tau}_f = 2mgx_{CM} \hat{e}_z$$

Da equação [7-3]: b)

Temos:

$$2mgx_{CM}\hat{e}_z = x_1mg\hat{e}_z + x_2mg\hat{e}_z$$

Donde:

$$x_{CM} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Suponhamos agora que tenhamos duas massas diferentes m_1 e m_2 situadas em x_1 e x_2 . (Ver Fig. [7-3]):

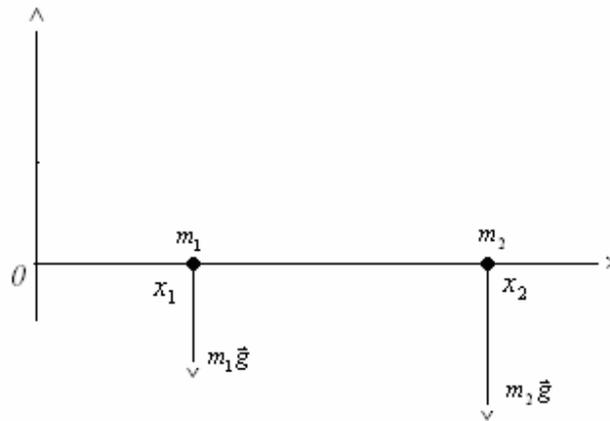


Fig. [7-3]

Usando, como no caso anterior, o mesmo princípio de equilíbrio estático, a saber, que tanto a resultante das forças quanto a resultante dos torques sejam nulas, podemos escrever equações análogas às equações [7-3], mas que agora assumem a forma:

[7-5] a)

$$m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} + \vec{f} = \vec{0}$$

[7-5] b)

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_f = \vec{0}$$

A primeira equação [7-5], ou seja [7-5] (a), projetada no eixo Y fornece:

$$-m_1g - m_2g + f = 0 \quad [7-6]$$

(Lembrar que \vec{g} projetada em Y, ou seja, a componente escalar de \vec{g} em Y é $-g$, porque \vec{g} tem direção oposta à do eixo Y). Então de [7-6] tiramos:

$$f = (m_1 + m_2)g \quad [7-7]$$

Os torques que comparecem na equação [7-5] (b) são, como já explicamos acima:

$$\vec{\tau}_1 = -x_1 m_1 g \hat{e}_z$$

$$\vec{\tau}_2 = -x_2 m_2 g \hat{e}_z \quad [7-8]$$

$$\vec{\tau}_f = x_{CM} f \hat{e}_z$$

Note [7-8] é obtida de [7-4], simplesmente substituindo a massa m , que no primeiro caso era a mesma massa das duas partículas, pelas massas m_1 e m_2 de cada uma delas.

Levando em conta os valores dos torques (Equação [7-8]) e o valor de f (Equação [7-7]), a equação [7-5] (b) fornece:

$$-x_1 m_1 g \hat{e}_z - x_2 m_2 g \hat{e}_z + x_{CM} (m_1 + m_2) g \hat{e}_z = \vec{0}$$

Donde:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad [7-9]$$

Observemos que [7-9], a expressão da coordenada x do centro de massa de duas partículas de massas m_1 e m_2 situadas nos pontos x_1 e x_2 do eixo X , nada mais é que a média ponderada de x_1 e x_2 , sendo m_1 e m_2 o peso das ponderações.

Média Ponderada

Suponhamos que em uma classe 2 alunos tiveram nota 5 em uma avaliação, 3 alunos tiveram 7 e um aluno teve 9. Qual é a nota média da classe. É claro que não é a média aritmética do resultado das avaliações, ou seja, $5+7+9$ dividindo por 3, pois dois alunos tiveram nota 5 e somente 1, nota 9.

A média tem que ser colocada somando todas as notas e dividindo pelo número de alunos, isto é, fazendo $5+5+7+7+7+9=40$, e então fazendo $\frac{40}{6} = 6,666\dots$

Mas isto é mesmo que fazer:

$$\frac{2x5 + 3x7 + 1x9}{(2+3+1)} = \frac{40}{6} = 6,66\dots$$

Esta última média é chamada de média ponderada entre os números 5, 7 e 9, sendo que 2, 3 e 1 são os pesos das ponderações. Ou seja, o número de alunos que tiveram uma certa nota é o “peso” que vai multiplicar esta nota no cálculo da média ponderada. O denominador é a soma dos pesos, e vai ser o número de alunos.

A generalização de [7-9] é imediata. Suponhamos que tenhamos três massas m_1 , m_2 e m_3 no eixo X nas posições x_1 , x_2 e x_3 . A coordenada do CM será:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad [7-10]$$

E para o caso de n massas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ nas posições x_1, x_2, \dots, x_n temos:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad [7-11]$$

Ou seja, escrevendo como somatória:

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad [7-11]$$

Se você for um aluno cético e diligente, que esteja pouco convencido com as generalizações [7-10] e [7-11], recomendamos o seguinte exercício:

Tomo três massas, digamos 2, 5 e 3 kg e as coloque nas posições -2, 5 e 9 do eixo X. Calcule então x_{CM} deste sistema, primeiro usando [7-10] e em seguida usando as duas equações de equilíbrio estático com as quais trabalhamos na nossa dedução. Verifique assim, neste caso particular, que [7-10] está correta.

Cético-pessoas que tem dificuldade em acreditar.

Observação: Tanto o ceticismo quanto a diligência são duas qualidades muito apreciáveis em ciência.

Sejam agora as massas distribuídas em um plano. Seja na Fig. [7-4], as massas m_1, m_2, \dots, m_3 em um plano no qual colocamos um sistema de eixos.

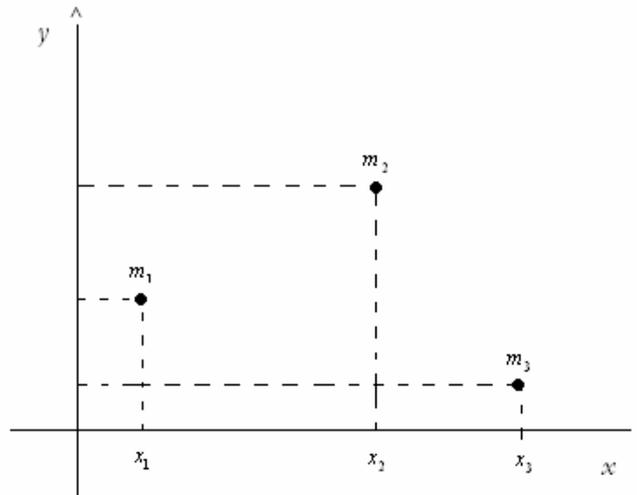


Fig. [7-4]

A massa m_1 está em um ponto de coordenadas (x_1, y_1) , a m_2 em (x_2, y_2) e a m_3 em (x_3, y_3) .

Neste caso as coordenadas (x_{CM}, y_{CM}) do centro de massa são dadas por:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad [7-12] \text{ (a)}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad [7-12] \text{ (b)}$$

Novamente as generalizações das fórmulas [7-12] são plausíveis, mas a rigor não foram demonstradas.

Para o estudante crítico e diligente, recomendamos que deduza estas fórmulas supondo as partículas encravadas em um plano de massa desprezível na horizontal, e construindo uma força que coloque o sistema em equilíbrio, e, portanto usando os dois princípios básicos do equilíbrio estático: resultante das forças e dos torques tem que ser nulas. Mas em Física, além do ceticismo e da diligência é importante uma certa dose de esperteza. Você não vai precisar fazer de novo toda conta de nossa primeira dedução, e agora em uma situação mais complexa, se imaginar que a nossa segunda equação (A soma dos torques igual a zero) vai, na situação presente, resultar em torques que são vetores no plano XY da Fig. [7-4]. Podemos somar estes torques decompondo estes vetores nos eixos

X e Y e trabalhando com cada uma destas decomposições obteremos respectivamente as fórmulas [7-12] (a) e [7-12] (b).

Temos então imediatamente as generalizações para um sistema de muitas partículas em três dimensões:

$$\begin{aligned}
 x_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \\
 y_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad [7-13] \\
 z_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}
 \end{aligned}$$

Usando o vetor posição \vec{r} , cujas componentes são x, y e z ($\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$), as três equações escalares se sintetizam na equação vetorial:

$$\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad [7-14]$$

A somatória $\sum_{i=1}^n m_i$ é a massa total do sistema que podemos chamar de M. É

comum escrever as equações do centro de massa como:

$$\begin{aligned}
 M x_{CM} &= \sum_{i=1}^n m_i x_i \\
 M y_{CM} &= \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad [7-15] \\
 M z_{CM} &= \sum_{i=1}^n m_i z_i
 \end{aligned}$$

e

$$M \vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad [7-16]$$

Até agora estudamos as equações do centro de massa de sistemas de partículas. Podemos também estudar o centro de massa de corpos contínuos. Classificamos estes corpos em unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais, unidimensionais quando a dimensão do comprimento de um corpo é muito maior que as outras dimensões, de maneira que as demais dimensões sendo desprezíveis, o corpo pode ser tratado como unidimensional. Por exemplo, varetas, espetos etc. Um corpo é bidimensional quando só duas dimensões são relevantes. Por exemplo, chapas, folhas. Quando não podemos desprezar nenhuma dimensão temos a situação normal dos sólidos que são tridimensionais.

Para corpos contínuos temos que usar os procedimentos de integração, o que faremos na próxima seção. Mas podemos também encontrar o centro de massa de corpos contínuos por argumentos de simetria. Vejamos alguns exemplos:

Seja uma vareta de 30 cm de comprimento e homogênea, quer dizer com a mesma densidade ao longo de todo comprimento. Então seu centro de massa está a 15 cm de qualquer uma de suas extremidades.

Seja um retângulo homogêneo, como o da Fig. [7-5]:

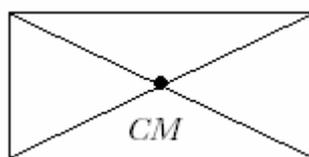


Fig. [7-5]

Seu centro de massa está na interseção das diagonais.

Temos ainda uma técnica para obter o CM de figuras que não são simétricas, mas que podemos decompor em suas partes simétricas e depois encontrar o CM como quando trabalhamos com partículas.

Vejamos um exemplo desta técnica.

Seja uma figura como a do desenho (Fig. [7-6]),

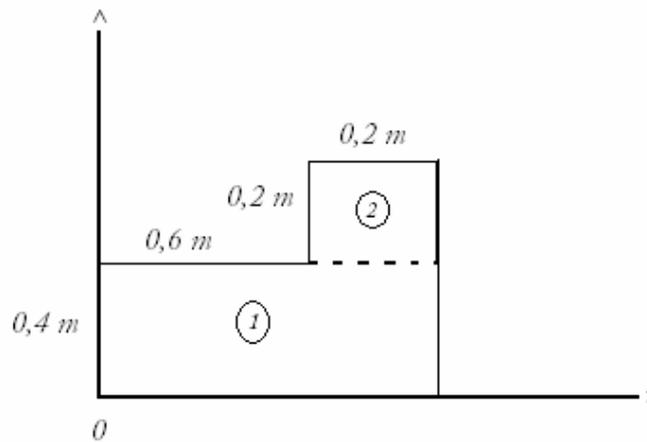


Fig. [7-6]

na qual já colocamos um sistema de eixos. Dividimos esta chapa bidimensional homogênea, em duas regiões: a região $\textcircled{1}$ é um retângulo de $0,4\text{ m}$ por $0,6\text{ m}$, e a região $\textcircled{2}$ um quadrado de $0,2\text{ m}$ por $0,2\text{ m}$. Por simetria sabemos que o CM da região $\textcircled{1}$ tem coordenadas $x_{CM}^{(1)} = 0,4\text{ m}$ e $y_{CM}^{(1)} = 0,2\text{ m}$.

E também por simetria o CM da região $\textcircled{2}$ tem coordenadas $x_{CM}^{(2)} = 0,7\text{ m}$ e $y_{CM}^{(2)} = 0,5\text{ m}$.

O problema agora está reduzido ao problema de duas massas m_1 e m_2 , situadas nas coordenadas $(x^{(1)}, y^{(1)})$ e $(x^{(2)}, y^{(2)})$ que calculamos.

O centro de massa do conjunto é então dado por:

$$x_{CM} = \frac{0,4 m_1 + 0,7 m_2}{m_1 + m_2} \quad [7-17] \text{ (a)}$$

$$y_{CM} = \frac{0,2 m_1 + 0,5 m_2}{m_1 + m_2} \quad [7-17] \text{ (b)}$$

Como a placa é homogênea as massas são proporcionais às superfícies. A superfície da região $\textcircled{1}$ é de:

$$S_1 = 0,4\text{ m} \times 0,8\text{ m} = 0,32\text{ m}^2$$

E da região ② é de:

$$S_2 = 0,2 m \times 0,2 m = 0,04 m^2$$

Então $m_1 = 8m_2$. Colocando em [7-1] (a) e (b) tudo em função de m_2 (e depois colocando m_2 em evidência e cancelando-fazer!) obtemos: (lembrar que $m_1 + m_2 = 8m_2 + m_2$).

$$x_{CM} = \frac{0,4 \times 8 + 0,7}{9} = 0,4333...m$$

$$y_{CM} = \frac{0,2 \times 8 + 0,5}{9} = 0,2333...m$$

Centro de massa e energia potencial

Vamos mostrar agora que a energia potencial gravitacional de um sistema de partículas próximo à superfície da Terra (Ou seja, em um campo gravitacional uniforme) é a mesma que a energia potencial gravitacional de uma partícula de massa igual à massa total do sistema e situada no seu centro de massa. De fato, a energia potencial de um sistema de n partículas de massa m_1, m_2, \dots, m_n , situadas às alturas h_1, h_2, \dots, h_n do nível escolhido como nível zero de energia potencial é:

$$U = \sum_{i=1}^n m_i g h_i = g \sum m_i h_i \quad [7-18]$$

Mas, por definição a altura h_{CM} do centro de massa (em um sistema de referência em que Y é o eixo vertical, esta coordenada h_{CM} é o que vínhamos chamando de y_{CM}).

$$M h_{CM} = \sum m_i h_i \quad [7-19]$$

De [7-18] e [7-19] tiramos

$$U = g M h_{CM} \quad [7-20]$$

O que prova nossa afirmação. Este tratamento da energia de um corpo pela energia potencial de toda sua massa concentrada no seu centro de massa, é um dos pontos fundamentais da teoria da gravitação de Newton.

Este fato, ou seja, a substituição de um sistema de partículas ou de um corpo, por uma única partícula de massa igual à massa do corpo e situada no centro de massa do corpo, para efeito cálculo de energia potencial, nos permite encontrar uma maneira prática de calcular o centro de massa de um corpo.

Consideremos um corpo, que por facilidade supomos bidimensional e que desenhamos na Fig. [7-7], sustentado em um ponto A , e com seu centro de massa

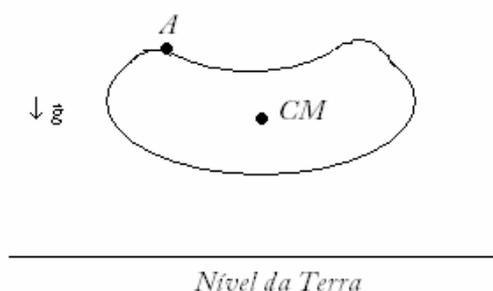


Fig. [7-7]

também indicado na figura. É fácil intuir que um corpo pendurado no ponto A não poderia ficar na posição indicada na Fig. [7-7]. Além da intuição física, que é uma qualidade muito importante e que deve ser sempre usada para que se desenvolva, podemos justificar teoricamente a impossibilidade de que o corpo permanecesse na posição da Fig. [7-7] quando unicamente sustentado em A , de duas maneiras. Primeiro argumentando que a posição de equilíbrio do corpo no campo gravitacional em questão só seria atingida quando o centro de massa do sistema estivesse na posição mais baixa, o que implicaria que o centro de massa deveria estar na reta vertical que passa por A . Alternativamente podemos ainda mencionar, mais uma vez, as condições de equilíbrio estático, e neste caso, para anular o torque da força peso no centro de massa, com relação ao ponto A , temos que ter o CM na vertical de A (Observe que o torque da força de sustentação \vec{f} em A com relação ao ponto A , é zero). Então a posição do corpo em questão, pendurado pelo ponto A , deve ser a posição mostrada na Fig. [7-8]:

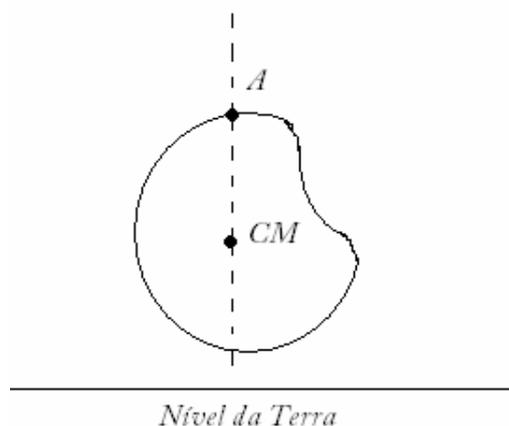


Fig. [7-8]

Mas se o centro de massa está na vertical do ponto que sustenta o corpo, tomando outro ponto de sustentação, teríamos uma outra vertical, e como o CM deve estar nestas duas retas, o CM tem que estar na intersecção destas duas retas. Temos assim um procedimento simples para achar o CM e que vale para sólidos tridimensionais, embora operacionalmente seja mais fácil aplicar em corpos que possam ser tomados como bidimensionais. Suspendemos o corpo por dois pontos distintos. Traçamos as verticais passando por cada um destes dois pontos. A intersecção destas verticais é o CM do corpo.

Localização do Centro de Massa por Integração

A passagem do CM no caso discreto, ou seja, de um conjunto de pontos, para o caso contínuo de um corpo sólido, envolve procedimentos que são análogos aos procedimentos de integração que temos usado ao longo deste curso. Vamos ilustrar estes procedimentos mostrando, simplesmente por maior facilidade do desenho, um caso de um corpo bidimensional, por exemplo, uma chapa metálica de espessura desprezível. Tomemos então este corpo, (Fig. [7-9]):

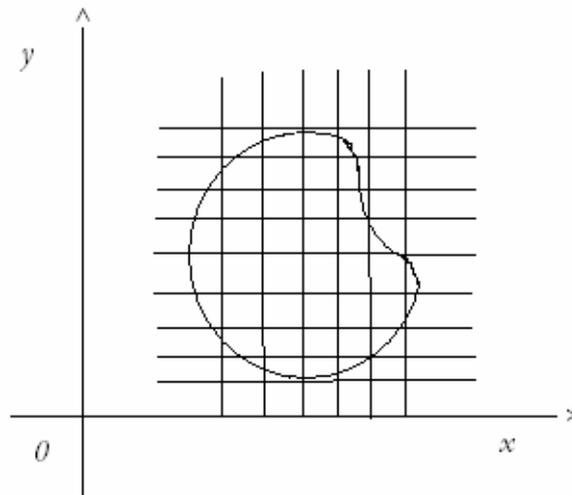


Fig. [7-9]

E vamos dividi-lo em uma série de quadrados por meio de retas paralelas aos eixos coordenados. Vamos considerar agora que temos um centro de massa para cada um dos quadrados. Então podemos considerar o corpo como um conjunto finito de partículas, cujas massas são as massas dos quadrados. Observemos que a densidade superficial do corpo não é necessariamente constante, mas podemos supor que em cada quadrado o seja. Então em cada quadrado definimos por simetria o CM e temos também a massa de cada quadrado.

Densidade

Como estamos considerando sólidos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, temos que definir três tipos de densidades. A densidade volumétrica, que indicamos pela letra ρ , é a massa contida em um certo volume dividido pelo volume. Então $\rho = \frac{M}{V}$. A densidade superficial, que indicamos por σ é massa dividida pela superfície em que está contida, ou seja, $\sigma = \frac{M}{A}$ (A de área) e a densidade linear é a massa pelo comprimento $\lambda = \frac{M}{L}$.

Onde:

ρ é a letra grega, que se pronuncia rô;

σ é a letra grega, que se pronuncia sigma;

λ é a letra grega, que se pronuncia lambda.

Se uma densidade, por exemplo, a densidade superficial σ não é constante, podemos definir a densidade pontual. Isto é feito da mesma maneira como definimos velocidade instantânea, quer dizer, considerando a derivada $\frac{dM}{dA}$.

Se tivermos o caso unidimensional, e λ não for constante, então a densidade linear pontual é dada por $\lambda|_{x=x_1} = \frac{dM}{dx}$. Aqui definimos a derivada, e, portanto a densidade pontual em um ponto x_1 , e novamente esta derivada é tomada fazendo:

$$\left. \frac{dM}{dx} \right|_{x=x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left. \frac{\Delta M}{\Delta x} \right|_{x=x_1}$$

Uma vez definida a derivada em cada ponto, podemos formar a função derivada e escrever:

$$\lambda = \frac{dM}{dx},$$

Onde agora λ é a densidade pontual, Então λ , a densidade pontual é função de x , e da mesma maneira M é função de x e $\frac{dM}{dx}$ é função de x .

Da mesma maneira, no caso da densidade superficial de um corpo bidimensional, σ , ou da densidade volumétrica de um sólido, ρ , não serem constantes, mas função da posição do ponto. Temos:

$$\sigma = \frac{dM}{dA}$$

$$\rho = \frac{dM}{dV}$$

Voltando ao procedimento da página 16, tínhamos dividido a chapa metálica em $n \times l$ quadrados (n o número de divisões no eixo X, e l no eixo Y), considerado a densidade constante em cada quadrado.

Tínhamos então um CM em cada quadrado, e se considerarmos a massa de cada quadrado concentrada no seu CM, então reduzimos o problema da chapa metálica que é um corpo contínuo, ao problema de encontrar o CM de um sistema de $n \times l$ partículas de massas dadas.

Podemos aplicar então nossas fórmulas com relação ao CM, que são:

$$\begin{aligned}
M x_{CM} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l x_{ij} m_{ij} \\
M y_{CM} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l y_{ij} m_{ij} \quad [7-21] \\
M z_{CM} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l z_{ij} m_{ij}
\end{aligned}$$

As três equações escalares [7-21] são obtidas pela decomposição nos eixos XYZ dos vetores que constituem a equação vetorial:

$$M \vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \vec{r}_{ij} m_{ij} \quad [7-22]$$

Estas equações, [7-21] e [7-22] nos fornecem as coordenadas do CM do sistema de partículas que construímos, mas não é ainda o CM da chapa metálica, que desenhamos na Fig. [7-9]. Isto porque, em primeiro lugar, como se pode ver na própria Fig. [7-9], os quadrados não ocupam toda a figura. Sobram muitas bordas nas quais não coube um quadrado completo e aí não consideramos nenhuma partícula. Em segundo lugar, consideramos que em cada quadrado a densidade superficial era constante, o que também é uma aproximação, pois a densidade pode variar no interior de um quadrado. Mas se tomarmos o limite das somatórias duplas quando n e l tendem a infinito, ou seja, se fizermos a área de cada quadrado tender a zero, as duas objeções desaparecem. Por um lado os quadrados infinitesimais ocuparão toda a área da chapa e por outro a razão $\frac{\Delta M}{\Delta A}$ quando $\Delta A \rightarrow 0$ é precisamente o valor de σ , ou seja, a função densidade definida em cada ponto. As coordenadas do CM da chapa, são definidas, usando a expressão vetorial, por:

$$M \vec{r}_{CM} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \vec{r}_{ij} m_{ij} \quad [7-23]$$

ou seja, o limite da somatória dupla é, por definição a integral dupla $\int \vec{r} dm$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l \vec{r}_{ij} m_{ij} = \int \vec{r} dm \quad [7-24]$$

Então:

$$M \vec{r}_{CM} = \int \vec{r} dm \quad [7-25]$$

Vamos tornar mais claro o que é a integral do 2º membro de [7-25]. Sabemos que $\sigma = \frac{dM}{dA}$. Então $dM = \sigma dA$. Substituindo esta expressão de dM em [7-25], ficamos

com:

$$M \vec{r}_{CM} = \int \vec{r} \sigma dA \quad [7-26]$$

A equação [7-26] é uma equação vetorial em um espaço bidimensional. Decompondo esta equação segundo os eixos XY e lembrando que $\vec{r} = x\hat{e} + y\hat{j}$, obtemos as duas equações:

$$Mx_{CM} = \iint dx dy x \sigma \quad [7-27]$$

$$My_{CM} = \iint dx dy y \sigma ,$$

Onde, lembremos ainda uma vez, σ é função de x e y , ou seja:

$$\sigma = \sigma(x, y)$$

Toda esta dedução tem por finalidade mostrar como fazemos a abordagem do problema de localização do CM de corpos contínuos, usando integrais. Sabemos que vocês da Universidade Aberta, estão somente agora iniciando seu estudo de funções de duas e três variáveis em Cálculo II, e vão ainda estudar as integrais duplas e triplas. Por isto abordaremos nos problemas exemplos e nos problemas das atividades, somente alguns casos particulares que podem ser tratados de maneira simples.

Começemos então pelo seguinte problema:

Exemplo 1 - Vareta uniforme

Seja uma vareta uniforme de comprimento L. Queremos achar o CM da vareta.

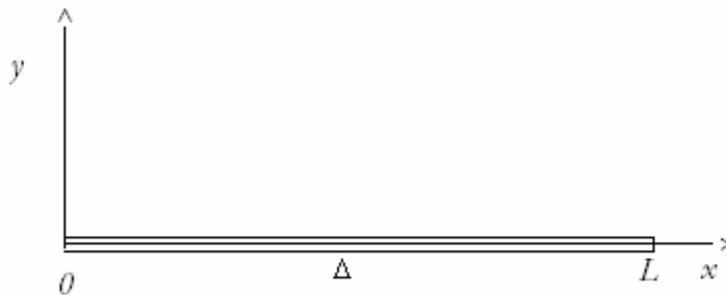


Fig. [7-10]

Solução: Por simetria, sabemos que o CM está no meio da vareta, ou seja, colocada a vareta como na Fig. [7-10] temos:

$$x_{CM} = \frac{L}{2}$$

Vamos, porém, para ilustrar o uso de integrais, partir de:

$$M \vec{r}_{CM} = \int \vec{r} dm \quad [7-28]$$

No caso de nosso problema unidimensional, a equação vetorial [7-28] corresponde à equação:

$$M x_{CM} = \int x dm \quad [7-29]$$

De um modo geral λ é uma função de x , definida, como vimos por:

$$\lambda = \frac{dM}{dx} \quad [7-30]$$

No nosso caso a função $\lambda = \lambda(x)$ é uma constante. Então $\lambda = \lambda(x) = \text{constante}$. Esta constante é a massa M da vareta dividida pelo seu comprimento L . É isto que entendemos quando dizemos uma vareta uniforme.

Então:

$$\lambda = \frac{M}{L} \quad [7-31]$$

De [7-30] tiramos: $dm = \lambda dx$, que substituindo em [7-29] fornece:

$$M x_{CM} = \int_0^l x \lambda dx \quad [7-30]$$

Temos assim uma integral, na variável x , com limites de integração 0 e L . (Ver Fig. [7-10]). Usando a expressão [7-31] de λ , que como constante sai da integral, ficamos:

$$M x_{CM} = \frac{M}{L} \int_0^l x dx$$

$$M x_{CM} = \frac{M}{L} \frac{x^2}{2} \Big|_0^l$$

logo:

$$x_{CM} = \frac{1}{L} \frac{L^2}{2}$$

$$x_{CM} = \frac{L}{2},$$

Que é a resposta que já havíamos obtido usando um argumento de simetria.

Exemplo 2 - Aro semicircular

Seja na Fig. [7-11], um aro semicircular e um sistema de eixos cartesianos escolhido de maneira conveniente. Estamos considerando o aro um corpo de densidade homogênea. Pede-se a localização do CM deste aro.

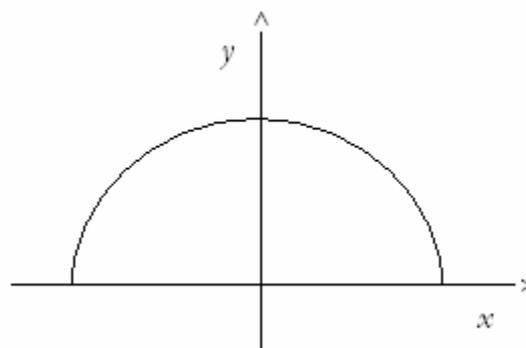


Fig. [7-11]

Solução: O aro é um corpo unidimensional, mas como sua forma é de um semicírculo, o problema é bidimensional.

Os eixos X e Y estão no plano do papel que contém o aro. (No nosso desenho o plano do papel). Então a partir da equação vetorial:

$$M \vec{r}_{CM} = \int \vec{r} dm, \quad [7-28]$$

temos que considerar suas duas componentes escalares, que são obtidas da projeção de seus vetores nos eixos cartesianos XY. Ficamos então com:

$$M x_{CM} = \int x dm \quad [7-32]$$

$$M y_{CM} = \int y dm \quad [7-33]$$

Por simetria vemos que $x_{CM} = 0$. Para resolver [7-33] temos que determinar dm . Seja s um parâmetro que mede o comprimento de arco, medido sobre o próprio arco. O elemento infinitesimal de comprimento de arco é então ds e a densidade pontual λ (Densidade linear) é:

$$\lambda = \frac{dm}{ds} \quad [7-34]$$

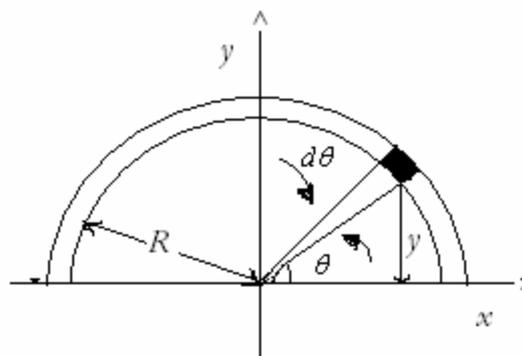


Fig. [7-12]

Como o arco é homogêneo sua densidade é constante e vale a massa total de aro M dividido pelo seu comprimento R . Então:

$$\lambda = \frac{M}{\pi R} \quad [7-35]$$

Levando em conta [7-34] a integral [7-33] fica:

$$M y_{CM} = \int y \lambda ds \quad [7-35]$$

Temos que escolher agora, nossas variáveis de integração. Tratando-se de um aro semicircular é mais conveniente trabalhar em coordenadas polares.

Da Fig. [7-12], podemos ver que $ds = R d\theta$. Vemos também que:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{R} \quad [7-36]$$

Donde:

$$y = R \text{sen } \theta \quad [7-37]$$

Substituindo [7-37] e a expressão de ds ($R d\theta$) em [7-35] ficamos com:

$$M y_{CM} = \frac{M}{\pi R} \int_0^{\pi} R \text{sen } \theta R d\theta \quad [7-38]$$

Em [7-38], usamos o valor de λ obtido em [7-35], que sendo uma constante saiu da integral. Ficamos com:

$$y_{CM} = \frac{R}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen } \theta d\theta \quad [7-39]$$

Como a integral de $\text{sen } \theta$ é $-\cos \theta$, (lembrar que $\frac{d}{d\theta}(\cos \theta) = -\text{sen } \theta$):

$$y_{CM} = \frac{R}{\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} = \frac{2R}{\pi}$$

Exemplo 3-Chapa semicircular

Consideremos uma chapa metálica semicircular e procuremos encontrar seu centro de massa. (Chapa homogênea).

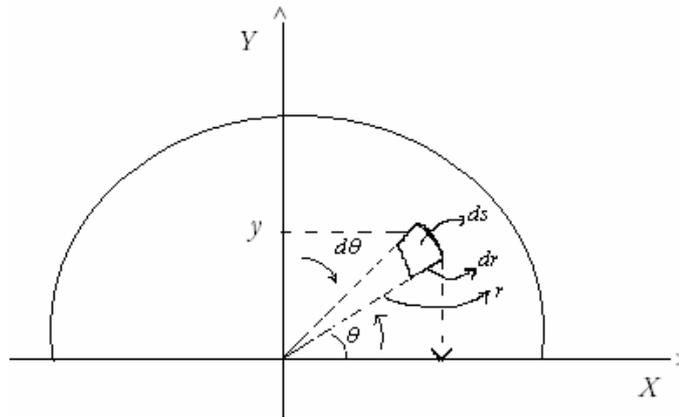


Fig. [7-13]

Solução: Trata-se novamente de um problema bidimensional, mas agora de um corpo também bidimensional. A densidade pontual (densidade superficial) é definida por:

$$\sigma = \frac{dm}{dA}$$

$$\text{Donde } dm = \sigma dA \quad [7-40]$$

A densidade σ é uma constante (chapa homogênea) e vale:

$$\sigma = \frac{M}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{2M}{\pi R^2}, \quad [7-41]$$

E escolhendo por conveniência do problema, o sistema de coordenadas polares o elemento de área fica:

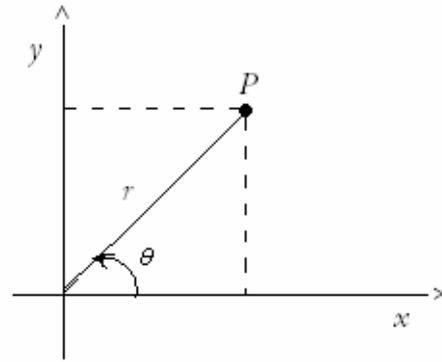


Fig. [7-14]

Em coordenadas polares, o ponto P é determinado pelas coordenadas r, θ .

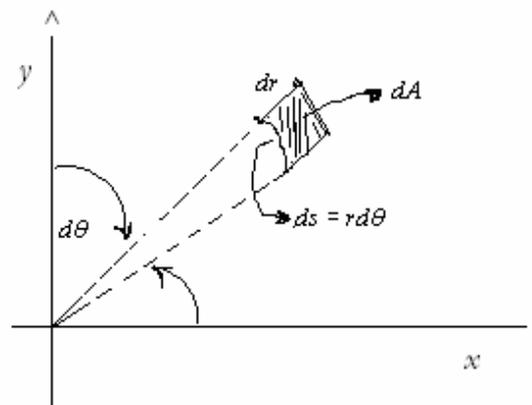


Fig. [7-15]

Pode-se ver na figura, que o elemento de área dA é $dA = dr ds = r dr d\theta$.

$$dA = r dr d\theta, \quad [7-42]$$

como se pode ver na Fig. [7-15].

Como vimos no exemplo anterior, a integral que fornece o CM na sua expressão vetorial, a saber:

$$M \vec{r}_{CM} = \int \vec{r} dm$$

Se transforma nas integrais das expressões escalares:

$$M x_{CM} = \int x dm$$

$$M y_{CM} = \int y dm,$$

E novamente vemos, por simetria, que $x_{CM} = 0$.

Substituindo na integral da última expressão, o valor de dm [7-40] e de [7-42], ficamos:

$$M y_{CM} = \int y \sigma r dr d\theta \quad [7-43]$$

Em [7-43] precisamos apenas colocar a variável y , em termos das coordenadas polares r, θ . Assim fazendo:

$$M y_{CM} = \sigma \int r \text{sen } \theta r dr d\theta$$

Tiramos σ da integral, porque é constante. Substituindo seu valor, calculado em [7-41] temos:

$$M y_{CM} = \frac{2M}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \text{sen } \theta d\theta$$

$$y_{CM} = \frac{2}{\pi R^2} \left[\frac{r^3}{3} \Big|_0^R \right] \left[(-\cos \theta) \Big|_0^\pi \right]$$

$$y_{CM} = \frac{2}{\pi R^2} \left(\frac{R^3}{3} \right) (2) = \frac{4R}{3\pi}$$

Exemplo 4-Coordenadas Esféricas

Vimos, na solução dos exemplos anteriores, que para achar o CM temos que interpretar a equação:

$$M \vec{r}_{CM} = \int \vec{r} dm, \quad [7-28]$$

E em particular temos que saber escrever o elemento infinitesimal dm em termos da densidade e das variáveis de integração. Estas vão depender do formato geométrico do corpo.

Suponhamos que queiramos o CM de um corpo tridimensional de formato esférico (Pode ser por exemplo uma esfera, ou uma calota esférica) A densidade pontual volumétrica é:

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

$$\text{Donde } dm = \rho dV$$

O problema é escrever dV em termos de nossas variáveis de integração. Se usarmos as coordenadas de um sistema de eixos XYZ cartesianos, sabemos escrever dV . De fato, neste caso:

$$dV = dx dy dz$$

Mas no caso de um problema, envolvendo corpos esféricos, é mais apropriado, e temos enorme benefício nos cálculos, usando um sistema de coordenadas esféricas.

Na Fig. [7-16] temos um ponto P no espaço tridimensional. Em coordenadas cartesianas este ponto é localizado pelas coordenadas x, y e z (Ver Fig. [7-16]).

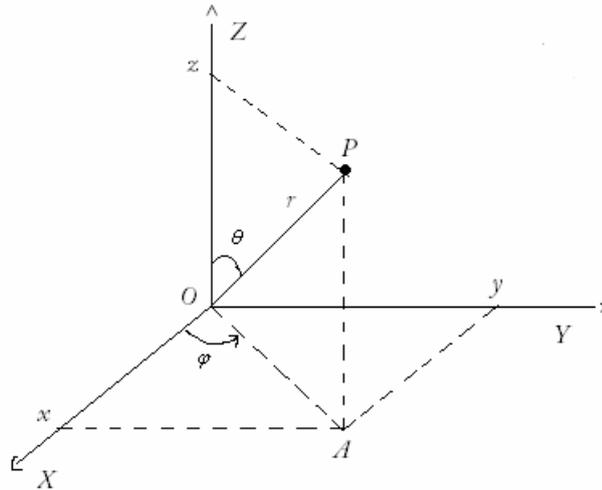


Fig. [7-16]

Em coordenadas esféricas ele é localizado pelas coordenadas:

r - que é a distância entre a origem O do sistema de eixos (O ponto de coordenadas $(0,0,0)$) e o ponto P .

φ - que é o ângulo que o plano XZ faz com o plano que contém o eixo Z e o ponto P . Na Fig. [48-1] este ângulo está indicado no plano XY .

θ - o ângulo que o segmento OP faz com o eixo Z .

Observando que o triângulo OPA é um triângulo retângulo sendo $\hat{O}AP$ o ângulo reto e $\hat{O}PA$ um ângulo igual a θ (alternos internos), e que o triângulo OzP também é um triângulo retângulo sendo OzP o seu ângulo reto, temos da Fig. [7-16]:

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \quad [7-44] \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

Conhecendo a transformação [7-44], podemos por métodos algébricos escrever o elemento de volume em coordenadas esféricas. Vocês vão aprender estes métodos no seu curso de Cálculo II. Vamos, porém mostrar uma forma geométrica de calcular dV :

Na Fig. [7-17] mostramos a expressão de dV como um produto:

$$dV = dr ds_1 ds_2 \quad [7-45]$$

Onde ds é o elemento infinitesimal da variável r , ds_1 é o elemento diferencial

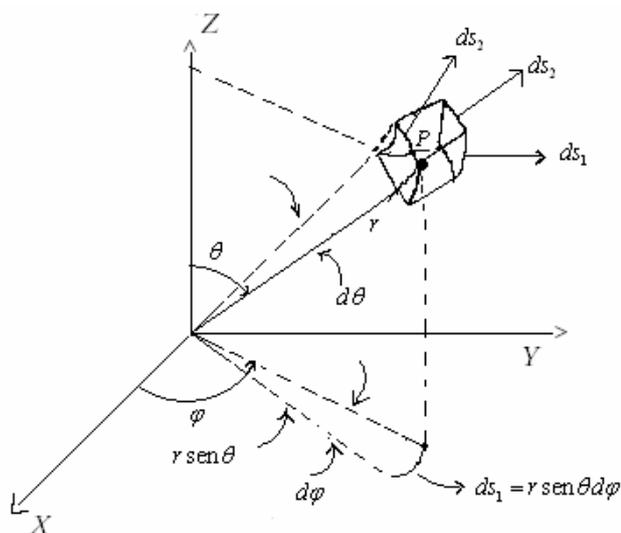


Fig. [7-17]

ligado a variável φ , e podemos ver na Fig. [7-17] que $ds_1 = r \text{ sen } \theta d\varphi$, e ds_2 é elemento diferencial ligado à variável θ e vemos também na Fig. [7-17] que $ds_2 = r d\theta$. Então, levando em conta [7-45], a saber, que $dV = dr ds_1 ds_2$ temos:

$$dV = dr r \text{ sen } \theta d\varphi r d\theta ,$$

Ou seja:

$$dV = r^2 \text{ sen } \theta dr d\varphi d\theta \quad [7-46]$$

Uma vez calculado dV , podemos montar nossa integral tripla da equação [7-28].

Como:

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \text{ donde } dm = \rho dV$$

Então:

$$M \vec{r}_{CM} = \int \vec{r} dm$$

corresponde a três equações escalares:

$$M x_{CM} = \int x dm$$

$$M y_{CM} = \int y dm$$

$$M z_{CM} = \int z dm$$

E cada uma delas se escreve:

$$M x_{CM} = \int x \rho r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$$

$$M y_{CM} = \int y \rho r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \quad [7-47]$$

$$M z_{CM} = \int z \rho r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$$

Se estamos interessados no CM de uma semiesfera (maciça) com centro na origem do sistema de coordenadas e base um círculo no plano XY, então por simetria $x_{CM} = y_{CM} = 0$ e queremos z_{CM} . Temos que usar a terceira equação [7-47], e temos que expressar a variável z que está na integral, em termos de nossas variáveis de integração r, θ e φ .

Da Fig. [7-16] vemos que:

$$z = r \cos \theta \quad [7-48]$$

E então:

$$M z_{CM} = \rho \int_0^R r^3 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

Onde estamos assumindo ρ constante no caso então:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Deixamos agora a vocês a tarefa de acabar este problema.

Observemos que, sempre é possível colocar os extremos de integração nas três integrais de maneira independente. Isto tem acontecido em nossos exemplos, porque tratamos com corpos cuja geometria permite este tipo de procedimento. É importante que vocês alunos não tomem casos particulares por procedimentos gerais. Aconselhamos então a vocês da Universidade Aberta, que aproveitem a motivação desta introdução ao cálculo das integrais duplas e triplas, para adiantar seus estudos de matemática e estudar, de maneira mais completa estas integrais. Para tanto aconselhamos o estudo da referência 1 da bibliografia desta aula.

7-2 Conservação do Momento Linear

Movimento do Centro de Massa

Consideremos a equação de localização do centro de massa:

$$M \vec{r}_{CM} = \sum m_i \vec{r}_i = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots$$

Derivando esta equação com relação ao tempo, temos:

$$M \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Ou seja,

$$M \vec{v}_{CM} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots = \sum m_i \vec{v}_i$$

E derivando mais uma vez com relação ao tempo ficamos com:

$$M \vec{a}_{CM} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots = \sum m_i \vec{a}_i \quad [7-49]$$

Pela 2ª Lei de Newton $m_i \vec{a}_i$ é \vec{F}_i , quer dizer a resultante das forças que atuam sobre a $i^{\text{ésima}}$ partícula. Essas forças ou são forças internas, resultante da interação com outras partículas do sistema, ou são forças externas devido a agentes de fora do sistema.

$$\vec{F}_i = m \vec{a}_i = \vec{F}_{i,int} + \vec{F}_{i,ext}$$

Então a expressão [7-49] fica:

$$M \vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{i,int} + \sum \vec{F}_{i,ext} \quad [7-50]$$

Mas as forças internas, provenientes da interação de uma partícula com outra sistema, ocorrem sempre aos pares de ação reação (3ª lei de Newton). De fato se uma partícula exerce uma força sobre outra do mesmo sistema, a outra exerce sobre ela força igual e contrária. Quando fazemos o diagrama de forças de cada partícula, estas forças não se anulam porque sobre cada partícula só há uma força (aquela que a outra partícula faz sobre ela). Mas se fizermos um diagrama de forças do sistema como um todo, veremos que estes pares ação reação agora se anulam, porque são forças iguais e contrárias atuando em um mesmo corpo (ou sistema de partículas). Assim a somatória de todas as forças internas no sistema de todas as partículas é nula, quer dizer $\sum_i \vec{F}_{i,int} = \vec{0}$ e a expressão [7-50] fica:

$$\vec{F}_{res,ext} = \sum_i \vec{F}_{i,ext} = M \vec{a}_{CM} \quad [7-51]$$

Vemos em [7-51] que:

“O centro de massa do sistema se desloca como uma partícula de massa $M = \sum_i m_i$ sob a influência da resultante das forças externas que atuam sobre o sistema”.

Este é um resultado de grande generalidade e importância. Ele descreve o movimento do centro de massa, de qualquer sistema de partículas. Assim o centro de massa se comporta como se fosse uma partícula sujeita a atuação da resultante das forças externas.

Uma aplicação interessante deste resultado é quando um corpo se fragmenta, durante o movimento, em muitas partes. As forças que ocasionaram a ruptura do corpo são forças internas, e, portanto não influem no movimento do centro de massa. Desta maneira, os diferentes fragmentos vão ter os mais diversos movimentos, mas em cada instante o

centro de massa do sistema vai estar na posição que estaria antes da ruptura. É o que veremos no próximo exemplo.

Exemplo 5

“Um projétil é disparado sobre um campo horizontal com velocidade inicial $24,5\text{ m/s}$, sob um ângulo de $36,9^\circ$. No ponto mais elevado da trajetória o projétil explode e se divide em dois fragmentos de massas iguais. Um deles cai na vertical até o solo. Em que ponto o outro fragmento atinge o solo?”

Solução:

A única força que atua no sistema é a gravitacional, assim o centro de massa continua seu movimento parabólico mesmo depois da explosão. Assim o ponto em que o centro de massa vai colidir com o chão está à uma distância $x = R$ da coordenada $x = 0$ (colocada no ponto de lançamento do projétil) onde R é o alcance do projétil se não tivesse havido a explosão.

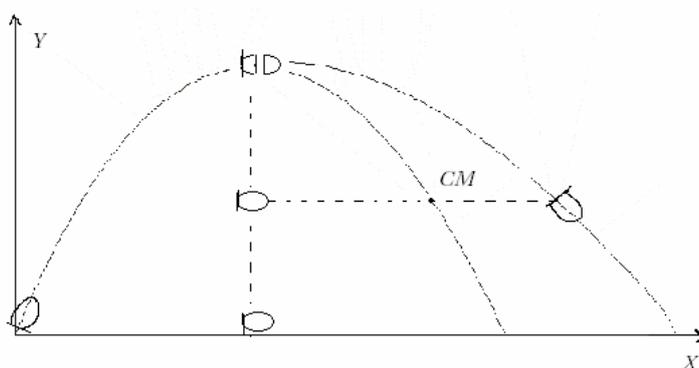


Fig. [7-18]

Como o primeiro fragmento cai em linha reta a partir do momento da explosão isto significa que a força interna da explosão exerceu sobre o primeiro fragmento uma força de direção horizontal capaz de proporcionar uma aceleração tal que reduziu (em uma certa fração de tempo) a sua velocidade horizontal (pois estava no ponto mais alto da trajetória) a zero. Esta força da explosão comunicou à outra metade do projétil uma aceleração horizontal

A componente vertical da velocidade, que era nula a no ponto mais alto continuou nula após a explosão. Como ambos os fragmentos do projétil estavam sujeitos à mesma aceleração vertical da gravidade e tinham no instante imediatamente depois da explosão a componente vertical de velocidade nula, isto significa que a cada momento eles, embora por trajetórias diferentes, estão na mesma altura. Assim atingirão juntos o solo. Chamando

x_1 o ponto em que a primeira metade atinge o solo e x_2 o ponto em que a segunda metade atinge o solo, a fórmula da coordenada x_{CM} do centro de massa fornece:

$$\begin{aligned} mx_1 + mx_2 &= (2m)x_{CM} \\ mx_2 &= (2m)x_{CM} - mx_1 \\ x_2 &= 2x_{CM} - x_1 \quad [7-53] \end{aligned}$$

Mas x_{CM} é R (o alcance do projétil) e x_1 é a coordenada que o projétil tinha na altura máxima do projétil. Então:

$$x_1 = \frac{R}{2},$$

E ficamos substituindo estes valores em [7-53]:

$$x_2 = 2R - \frac{R}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2}R$$

Como:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta = \frac{(24,5 \text{ m/s})^2}{9,81 \text{ m/s}^2} \sin 73,8^\circ = 58,8 \text{ m}$$

$$x_2 = \frac{3}{2}(58,8 \text{ m}) = 88,2 \text{ m}$$

A resposta então é: o outro fragmento atinge o solo à uma distância de $88,2 \text{ m}$ do ponto de lançamento.

Conservação do momento linear

Já vimos que a forma como Newton escreveu sua segunda lei foi $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Aqui \vec{F} é a força que atua sobre uma partícula de momento linear \vec{p} ($\vec{p} = m\vec{v}$). Se a força \vec{F} for nula, temos $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ e então $\vec{p} = \text{constante}$. Ou seja, se a força sobre uma partícula for nula o seu momento linear é constante. Dizemos também que se conserva. Esta é lei de conservação do momento linear.

Antes de comentar a sua importância, vamos deduzi-la para um corpo rígido, pensado como um sistema de partículas que tem distâncias fixas entre si.

Seja:

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt},$$

E agora coloquemos $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$, ou seja, consideramos o momento total sobre o sistema, como a soma dos momentos de cada partícula. Então:

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Mas vimos no tópico anterior que:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{CM}$$

Onde M é a massa total do corpo, \vec{v}_{CM} é a velocidade do centro de massa do corpo. Então:

$$\vec{P} = M \vec{v}_{CM},$$

e derivando esta última expressão:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \vec{a}_{CM}$$

Mas vimos também, no tópico Movimento do Centro de Massa, que:

$$M \vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_{res,ext}$$

Então:

$$\vec{F}_{res,ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Onde $\vec{F}_{res,ext}$ é a resultante das forças externas sobre o corpo. Se esta resultante for nula, então:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$$

E neste caso:

$$\vec{P} = \text{constante} \quad [7-54]$$

A fórmula é a expressão de Lei de Conservação do Momento Linear, para o caso de um sistema de partículas ou de um corpo rígido, que podemos enunciar como:

“Se a resultante das forças externas que atuam sobre um sistema for nula, o momento do sistema permanece constante”.

Esta é uma das mais importantes leis da Física. É mais geral que a lei de conservação da energia mecânica, pois muitas vezes as forças internas entre as partículas não são conservativas. Assim elas podem modificar a energia mecânica do sistema, embora não tenham efeito sobre o momento total do sistema. Mas em sentido lato o princípio da conservação da energia também se aplica sempre. Não a conservação da energia mecânica, mas da conservação a energia sob todas as formas.

Exemplo 6

“Duas pessoas, uma de 80 kg outra de 120 kg , estão em um barco (massa de 60 kg) que flutua em um lago de águas tranqüilas. A primeira está remando no centro do barco e a outra na proa, a 2 m do centro. Depois de um certo tempo a segunda pessoa se oferece para remar. Com o barco parado as duas pessoas trocam de lugar. Nesta troca de quanto se desloca o barco?” (Despreza efeitos de forças horizontais da água).

Solução:

A troca das pessoas dentro do barco vai implicar na existência de forças que estas pessoas ao se movimentarem dentro do barco, exercem no barco. Mas estas forças são forças internas do sistema pessoas-barco. Então como:

$$\vec{F}_{res,ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

e sendo a resultante das forças externas nula, o momento linear se conserva. Tomemos como referência, um sistema com origem no centro do barco (Ver Fig. [7-19]).

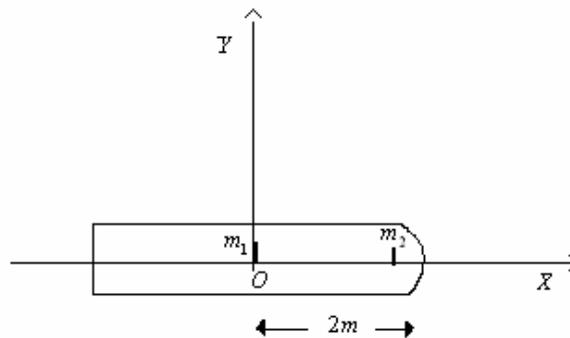


Fig. [7-19]

Como neste referencial o momento do sistema, antes da troca das pessoas é $\vec{p} = \vec{0}$, pois a velocidade do barco é nula, o momento depois da troca das pessoas também deve ser nulo.

Como:

$$\vec{p} = M\vec{v}_{CM}$$

Para \vec{p} permanecer constante e igual à zero, \vec{v}_{CM} também deve ser constante e igual a zero. Isto significa que o centro de massa do sistema, pessoas-barco, permanece em repouso neste referencial. Calculemos a coordenada x do centro de massa no referencial da Fig. [7-19].

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_bx_b}{m_1 + m_2 + m_b}$$

Onde m_1 é 80 kg, $m_2 = 120$ kg e $m_b = 60$ kg (massa do barco).

Vemos então que:

$$x_{CM} = \frac{80 \times 0 + 120 \times 2 + 60 \times 0}{260} m = \frac{12}{13} m$$

Quando as pessoas trocam de posição, o barco se movimenta de maneira que o centro de massa permaneça na mesma posição. Continuando por designar x_1 como a coordenada em que estava a primeira pessoa, e que agora vai ser ocupado pela segunda, e x_2 a coordenada em que estava a 2 pessoa a que agora vai ser ocupado pela primeira pessoa, e considerando que o barco se desloca de uma distância d (que queremos saber) então a coordenada x_{CM} no mesmo sistema de coordenadas (que agora não tem mais sua origem no centro do barco; - imaginemos este sistema de coordenadas fixo no lago) é:

$$x_{CM} = \frac{m_2 \times (x_1 + d) + m_1 \times (x_2 + d) + m_b \times (x_b + d)}{m_1 + m_2 + m_b}$$

$$x_{CM} = \frac{m_2 \times x_1 + m_1 \times x_2 + m_b \times x_b}{m_1 + m_2 + m_b} + \frac{m_2 \times d + m_1 \times d + m_b \times d}{m_1 + m_2 + m_b}$$

Então, substituindo os valores numéricos:

$$\frac{12}{13}m = \frac{8}{13}m + d \Rightarrow d = \left(\frac{12}{13} - \frac{8}{13}\right)m = \frac{4}{13}m$$

Energia cinética de um sistema

Quando não existe resultante externa atuando sobre um sistema o seu momento linear se conserva. Mas, como já mencionamos a sua energia, mesmo na ausência de uma força resultante externa, pode variar. Por quê? porque as forças internas, ou seja, as forças provenientes da interação entre as partículas podem não ser conservativas. Há um importante Teorema que evidencia melhor este ponto, e que é:

“A energia cinética de um sistema de partículas pode ser decomposta na soma de duas parcelas: (1) a energia cinética associada ao movimento do centro de massa do sistema $M v_{CM}^2 / 2$, onde M é a massa do sistema; e (2) a energia cinética associada ao movimento das partículas em relação ao centro de massa $\sum m_i u_i^2 / 2$, em que \vec{u}_i é o vetor velocidade da i -ésima partícula em relação ao centro de massa”.

Demonstração:

A energia cinética de um sistema de partículas é a soma das energias cinéticas das partículas individuais.

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Mas, para qualquer vetor, temos:

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = v_i^2$$

Então:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$$

Mas a velocidade de cada partícula é a soma vetorial do centro de massa \vec{v}_{CM} , com a velocidade da partícula em relação ao centro de massa \vec{u}_i :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{u}_i$$

Então:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{u}_i) \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{u}_i)$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{u}_i$$

A grandeza $\sum_i m_i \vec{u}_i$ é o momento linear total do sistema em relação ao centro de massa. Temos inicialmente:

$$\vec{P}_{CM} = \sum_i m_i \vec{u}_i$$

Mas o momento \vec{P}_{CM} de um sistema em relação a seu centro de massa é nulo. de fato

$$\vec{P}_{CM} = M \vec{v}_{CM} \quad [7-55]$$

A equação [7-55] é a definição de momento linear. Só que no caso, o momento linear com relação ao centro de massa é zero, porque a velocidade do centro de massa no seu próprio referencial (do centro de massa) é nula.

Então:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2$$

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + K_{rel}$$

Onde K_{rel} é energia cinética das partículas referentes ao centro de massa. Quando não há forças externas, v_{CM} é constante e a energia cinética associada ao movimento global não se altera. Portanto em um sistema isolado, somente a energia cinética relativa (K_{rel}) pode se alterar.

Colisões

A colisão entre dois corpos acontece quando eles se aproximam e interagem fortemente durante um intervalo de tempo muito curto. Neste curto intervalo de tempo, as forças internas, ou seja, as forças da colisão que são as forças que os corpos se exercem mutuamente são muito mais intensas que as externas. Por isto o momento linear do sistema como um todo se conserva. Além disto, o tempo da colisão é tão pequeno que os deslocamentos durante a colisão podem ser desprezados. Usualmente antes e depois da colisão a interação entre os dois corpos é praticamente nula. Exemplos de colisão: o pé do jogador de futebol com a bola em um chute, a raquete de tênis com a bola de tênis, o choque entre duas bolas de bilhar etc.

Quando a energia cinética antes da colisão é igual a energia cinética depois da colisão, ou seja, quando a energia cinética se conserva, temos a colisão elástica; quando a energia cinética não se conserva tem-se a colisão inelástica. Caso extremo é o da colisão perfeitamente inelástica em que toda a energia cinética de ambos os corpos se converte em outras formas de energia, seja interna, seja térmica, seja sonora ou em geral, todas estas juntas, e os dois corpos permanecem unidos depois da colisão.

Impulso e Força Média

Na Fig. [7-20] temos o gráfico da força mútua entre dois corpos, pelo tempo. A força só é significativa em um pequeno lapso de tempo Δt (Este seria, no caso de um chute de futebol, o tempo em que a chuteira está em contato com a bola).

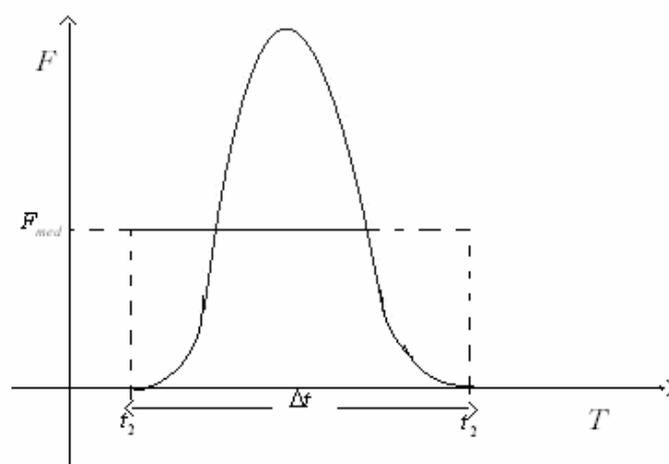


Fig. [7-20]

Definimos a grandeza física impulso de uma força pela expressão:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad [7-56]$$

Vemos da expressão [7-56], que o impulso é uma grandeza vetorial. Como já temos visto neste curso, o módulo do impulso, que é o valor numérico da integral em [7-56], é igual à área subentendida pelo gráfico da força \vec{F} e o eixo T . A sua unidade de medida no SI é $N.s$, e a sua dimensão é $[M][L][T]^{-1}$.

Vemos na Fig. [7-20] que a força média é bem definida como a força constante que no intervalo de tempo Δt , comunica o mesmo impulso que a força F . Então área subentendida pelo segmento de reta à altura F_{med} do eixo F e de comprimento Δt , e o eixo t , é a mesma que a área subentendida pelo gráfico de \vec{F} e o eixo t . Observemos que a força \vec{F} é a força que cada corpo da colisão exerce sobre o outro. Então a variação do momento de cada corpo, ou seja, a taxa de variação instantânea é:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad [7-57],$$

E o impulso que a força de interação \vec{F} , agindo no intervalo de tempo Δt , comunica a cada partícula, é:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} \quad [7-58]$$

A força média no intervalo de tempo $\Delta t = t_f - t_i$ é:

$$\vec{F}_{med} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \frac{\vec{I}}{\Delta t} \quad [7-59]$$

Exemplo 8

“Um automóvel transportando um manequim para um ensaio de colisão, bate de frente com um muro à 90 km/h (25 m/s). O manequim tem massa de 80 kg . Estimar a força que o cinto de segurança exerce sobre o manequim durante a colisão”.

Solução:

O problema pede uma estimativa e não um resultado preciso. Por quê? Porque não temos alguns dados fundamentais para uma resposta precisa. Não temos basicamente o

tempo de colisão. Poderíamos então tentar estimar este tempo. Mas é preferível estimar o quanto vai se deslocar o carro durante a colisão, o que significa o quanto ele vai ser amassado. Podemos estimar que este deslocamento é de 1 m . Isto significa que a velocidade do carro durante o percurso de 1 m passa de 25 m/s à 0 m/s .

Supondo (novamente uma suposição) que a força fosse constante e, portanto a aceleração também constante a velocidade média seria $12,5\text{ m/s}$. Com estas estimativas, podemos estimar o tempo de colisão.

De fato, temos:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{med}} = \frac{1\text{ m}}{12,5\text{ m/s}} = 0,08\text{ s}$$

O momento inicial do manequim é:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

E, portanto:

$$p_i = mv_i = 80\text{ kg} \cdot 25\text{ m/s} = 2000 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$$

O momento final é nulo, e, portanto a variação do momento de $2000 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$. Como a variação do momento é igual ao impulso.

Temos:

$$I = 2.000\text{ N}\cdot\text{s}$$

Usando agora que:

$$\vec{F}_{med} = \frac{\vec{I}}{\Delta t}$$

Tiramos:

$$\vec{F}_{med} = \frac{2.000\text{ N}\cdot\text{s}}{0,08\text{ s}} = 25.000\text{ N}$$

Resposta: $\vec{F}_{med} = 25.000\text{ N}$

Observação:

Vemos que temos uma força média muito grande. De fato considerando a aceleração média, temos:

$$a_{med} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 313\text{ m/s}^2, \text{ ou seja, cerca de 32 vezes a aceleração da gravidade.}$$

Colisões em uma dimensão

Para dois corpos colidindo em um movimento unidimensional temos pela conservação de momento que:

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \quad [7-59]$$

Onde m_1 e m_2 são as massas dos corpos e no primeiro membro de [7-59] temos as velocidades finais e no segundo membro as iniciais. Todo problema de colisões, consiste em dadas as massas e as velocidades iniciais, achar as velocidades finais. Com [7-59] temos uma equação e duas incógnitas que são v_{1f} e v_{2f} . Precisamos, portanto de mais uma equação. Vamos procurá-la estudando dois casos.

Colisões perfeitamente inelásticas

Em uma colisão perfeitamente inelástica, os corpos da colisão permanecem unidos. Então temos, além de [7-59] mais uma relação que é:

$$v_{1f} = v_{2f} = v_{CM}, \quad [7-60]$$

Onde v_{CM} é a velocidade do centro de massa de m_1 e m_2 .

Substituindo [7-60] em [7-59] tiramos a v_{CM} , que fica:

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \quad [7-61]$$

Neste tipo de colisão podemos mostrar que a energia cinética final é menor que a inicial. Começemos escrevendo a energia cinética de um corpo de momento $p = mv$ em termos de momento.

Temos:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{(mv)^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$$

Ou seja:

$$K = \frac{p^2}{2m} \quad [7-62]$$

O momento inicial de um sistema que entra em um processo de colisão inelástica em uma dimensão, e no qual a massa m_2 está inicialmente em repouso é:

$$p_i = m_1 v_{1i} \quad (\text{uma vez que } v_{2i} = 0),$$

e a energia cinética inicial é:

$$K_i = \frac{p_i^2}{2m_i} = \frac{p^2}{2m_i} \quad (\text{pois } p_i = p_f = p)$$

Depois da colisão, levando em conta [7-62], temos:

$$K_i = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Assim vemos que de fato: $K_f < K_i$.

A elasticidade se caracteriza pelo fato de podermos recuperar no choque, a energia cinética. Não havendo esta recuperação esta energia vai se transformar em outras formas de energia. Energia interna causando a deformação do corpo, energia térmica, energia sonora etc.

Exemplo 9

“Em um ensaio de tiro, uma bala atinge o pêndulo esquematizado na Fig. [7-21]. O bloco do pêndulo com a bala cravada oscila para cima. A altura atingida pelo bloco, permite a determinação da velocidade da bala. Sendo m_1 a massa da bala e m_2 a massa do bloco, como se calcula a velocidade?”

Solução:

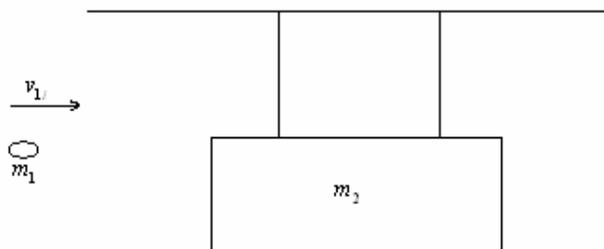


Fig. [7-21]

Por conservação do momento podemos escrever:

$$m_1 v_{1i} + m_2(0) = (m_1 + m_2) v_f$$

onde v_f é a velocidade do conjunto bola-caixa.

Então:

$$v_{1i} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} v_f \quad [7-63]$$

Podemos achar v_f usando a conservação da energia mecânica no campo conservativo gravitacional. Note que estamos aplicando este princípio, não durante o choque, quando sabemos que a energia cinética não se conserva, mas sim depois do choque. Estamos assim admitindo que durante o choque, por se dar este em tempo muito curto, o bloco não se deslocou de maneira apreciável, e que portanto podemos dizer que ainda se encontra, imediatamente após o choque, no nível zero de energia potencial, que escolhemos como sendo o nível do bloco antes da colisão. E admitimos também que imediatamente, depois do choque o sistema bloco-bala tem a velocidade v_f . Então, pela conservação da energia mecânica temos:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = (m_1 + m_2)gh$$

$$v_f = \sqrt{2gh} \quad [7-64]$$

Substituindo [7-64] em [7-63] temos as respostas dos problemas.

Resposta:

$$v_{1i} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \sqrt{2gh}$$

Colisões elásticas

Neste caso as energias cinética inicial e final são iguais. Assim temos:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 \quad [7-65]$$

E esta equação, com a de conservação de momento, basta para determinar as velocidades finais dos corpos.

A resolução deste tipo de colisão fica mais fácil se escrevermos a velocidade relativa das duas partículas depois e antes da colisão. Recordando [7-65], temos:

$$m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) = m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2)$$

Fatorando ficamos com:

$$m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) = m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) \quad [7-66]$$

Mas pela conservação de momento:

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}$$

Levando isto em conta, a equação [7-66], fornece:

$$v_{2f} + v_{2i} = v_{1i} + v_{1f},$$

que pode ser posto na forma:

$$v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \quad [7-67]$$

De [7-67] vemos que a velocidade de aproximação entre as duas partículas antes da colisão, é a mesma que a velocidade de afastamento das duas partículas depois da colisão.



Fig. [7-22]

Na Fig. [7-22] temos a ilustração do que está mostrado na fórmula [7-67]. Vemos que a velocidade de aproximação entre as massas antes da colisão é igual (e naturalmente com sinal contrário) à velocidade de afastamento entre as massas depois da colisão. Na próxima seção vamos ver como fica a descrição da colisão elástica no referencial do centro do sistema.

Referencial do Centro de Massa

A descrição matemática das colisões fica simplificada se usarmos o referencial do centro de massa. Isto significa fixar nosso sistema de coordenadas no centro de massa do sistema. Em uma colisão o momento linear se conserva. Como no referencial do centro de massa o momento linear do sistema é nulo (porque a velocidade do centro de massa é nula) então tanto o momento inicial quanto o momento final são nulos. Por isto este sistema de coordenadas é chamado referencial de momento nulo.

Como o momento é nulo, no referencial do centro de massa, o momento dos dois corpos antes do choque é igual, mas de direções opostas. Depois do choque temos:

- a) Se a colisão for perfeitamente inelástica os dois corpos permanecem unidos e em repouso no referencial do centro de massa.
- b) Se a colisão for elástica, o momento de cada corpo é invertido, e, portanto sua velocidade é invertida. Então no caso de um choque elástico no referencial do centro de massa as velocidades finais são obtidas simplesmente tomando as iniciais com direção oposta.

Para resolver então um problema de colisão (estamos sempre tratando de colisões unidimensionais), primeiro calculamos as velocidades de cada corpo no referencial do centro de massa. Suponhamos que as velocidades dos corpos sejam dadas em um certo referencial. Neste caso temos inicialmente que calcular a velocidade do centro de massa neste referencial. Para tanto basta derivar a equação do centro de massa, qual seja:

$$x_{CM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Com o que obtemos:

$$v_{CM} = \frac{v_1 m_1 + v_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Em seguida expressamos a velocidade de cada corpo no referencial de centro de massa fazendo:

$$u_1 = v_1 - v_{CM} \quad [7-68]$$

Onde u_1 é a velocidade do corpo um no referencial do centro de massa e v_1 é a velocidade dado corpo um em um referencial qualquer. Achadas as velocidades finais que são:

$$u_{1f} = -u_{1i}$$

$$u_{2f} = -u_{2i},$$

podemos escrever as velocidades finais no referencial em que as velocidades dadas eram $v_{1i} = v_{2i}$.

Para tanto observemos que a equação [7-68] é válida para ambas as partículas antes da colisão. Então temos:

$$\begin{aligned} u_{1i} &= v_{1i} - v_{CM} \\ u_{2i} &= v_{2i} - v_{CM} \end{aligned} \quad [7-69]$$

As mesmas equações de movimento relativo valem depois da colisão, ou seja:

$$\begin{aligned} u_{1f} &= v_{1f} - v_{CM} \\ u_{2f} &= v_{2f} - v_{CM} \end{aligned} \quad [7-70]$$

Isolando em [7-70] as velocidades v_{1f} e v_{2f} , temos:

$$u_{1f} = v_{1f} + v_{CM}$$

$$u_{2f} = v_{2f} + v_{CM}$$

que é a resposta procurada no referencial dado no início.

Exemplo 7

Calcular as velocidades finais da colisão em que um corpo de 4 kg movendo-se para a direita á 6 m/s , colide elasticamente com outro corpo de 2 kg movendo-se para a direita a 3 m/s . Use em uma etapa intermediaria o referencial do centro de massa.

Solução:

1. Calculamos a velocidade do centro de massa no referencial no qual foram dadas as velocidades.

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{CM} = \frac{(4\text{kg})(6\text{m/s}) + (2\text{kg})(3\text{m/s})}{(4\text{kg}) + (2\text{kg})} = 5\text{m/s}$$

2. Calculemos as velocidades iniciais de cada corpo no referencial do centro de massa.

$$u_{1i} = v_{1i} - v_{CM} = 6\text{m/s} - 5\text{m/s} = 1\text{m/s}$$

$$u_{2i} = v_{2i} - v_{CM} = 3\text{m/s} - 5\text{m/s} = -2\text{m/s}$$

As figuras abaixo, mostram esta transformação de referencial:

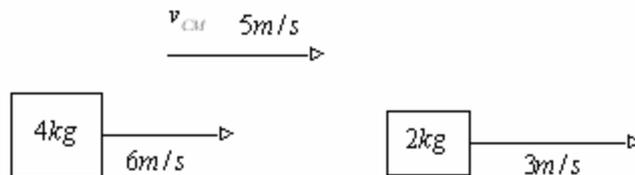


Fig. [7-23]

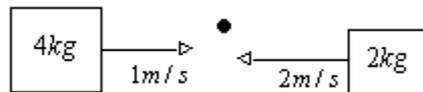


Fig. [7-24]

3. No referencial do centro de massa, as velocidades são invertidas então:

$$u_{1f} = -u_{1i} = -1\text{m/s}$$

$$u_{2f} = -u_{2i} = 2\text{m/s}$$

É o que está ilustrando na Fig. [7-25].



Fig. [7-25]

4. Voltando ao referencial inicial:

$$u_{1f} = v_{1f} + v_{CM} = -1m/s + 5m/s = 4m/s$$

$$u_{2f} = v_{2f} + v_{CM} = 2m/s + 5m/s = 7m/s$$

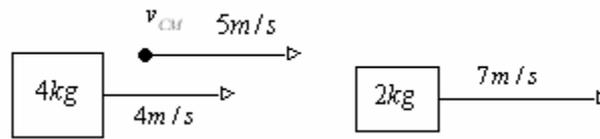


Fig. [7-26]

CONCLUSÃO

O conceito de centro de massa é um dos mais importantes da mecânica newtoniana, entendida como uma disciplina que inclui a teoria da gravitação. De fato, para calcular o peso de um corpo na superfície da Terra, que distância assumimos entre a massa m do corpo e a massa M da terra? Assumimos uma distância igual ao raio da Terra. Isto equivale a imaginar toda a massa de terra concentrada no seu centro de massa. Quando estudamos o deslocamento de um corpo sob ação de forças externas, podemos descrever seu movimento de translação como a ação de uma força resultante atuando no centro de massa.

O outro conceito fundamental desta aula é a lei de conservação do momento linear. Nesta aula, mostramos esta lei como consequência imediata da 2ª lei de Newton. Como discutiremos com mais vagar na 9ª aula, há uma dedução de conservação do momento linear partindo de um princípio de grande generalidade—o princípio de mínima ação. Nesta dedução mostra-se que o princípio de conservação de momento linear é uma consequência de homogeneidade do espaço. Tudo isto, estamos colocando para dar a vocês uma idéia da importância desta lei de conservação, que se aplica em domínios subatômicos onde a própria mecânica newtoniana não é mais válida, e para despertar a curiosidade de vocês. Vocês estudarão tudo isto na sua disciplina Mecânica Clássica.

RESUMO

Iniciamos esta aula com a definição e o cálculo do centro de massa tanto de um sistema de partículas quanto de corpos contínuos. Mostraremos através de muitos

exemplos trabalhados em detalhe, como resolver as integrais duplas e triplas que aparecem neste cálculo.

Mostramos ainda como aplicar este princípio nos problemas, através de alguns exemplos feitos em detalhe, como aplicar esta lei a problemas, e por último estudamos as colisões unidimensionais elásticas e inelásticas.

Aplicação

1 - Mostrar que o centro de massa de um disco semicircular homogêneo, de raio R , está num ponto a $(4\pi/3)R$ do centro do círculo.

2 - Um taco de beisebol tem o comprimento L e a densidade linear de massa dada por $\lambda = \lambda_0(1 + x^2/L^2)$. Localizar a coordenada x do centro de massa em termos de L .

3 - Localizar o centro de massa de hemisfério maciço homogêneo de raio R e massa M .

4 - Localizar o centro de massa de casca hemisférica delgada, homogênea.

5 - Uma folha de metal é recortada na forma de uma parábola. A equação da curva limite da figura é $y = ax^2$, e y varia de $y = 0$ até $y = b$. Localizar o centro de massa do recorte em termos de a e de b .

6 - Um corpo de massa m está preso a uma mola e pendurado no interior de uma caixa oca de massa M . A caixa está sobre a plataforma de uma balança que responde ao peso do sistema, (a) Se a mola arrebenta, a leitura da balança se altera? Explique a resposta, (b) Admita que a mola arrebenta e que a massa m cai com aceleração constante g . Determinar a aceleração do centro de massa, em direção e módulo, (c) Com o resultado conseguido em (b), determine a leitura da balança durante a queda livre de m .

7 - Na máquina de Atwood esquematizada na Fig. [7-27], o cordel desliza sobre um cilindro de massa m_c , sem atrito, (a) Determinar a aceleração do centro de massa do sistema constituído pelos dois blocos e pelo cilindro, (b) Com a segunda lei de Newton, determine a

força F exercida pelo suporte, (c) Determine a tensão no cordel que liga os blocos e mostre que $F = m_c g + 2T$

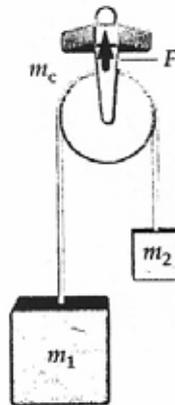


Fig. [7-27]

8 - Um bloco de madeira e uma pequena arma estão firmemente presos nas extremidades opostas de uma plataforma (massa desprezível) que pode deslizar sem atrito sobre uma mesa de ar (Fig. [7-28]). A massa da arma é m_a , a do bloco, m_b , e a do projétil disparado, m_p . A arma está apontada para o bloco e o projétil, ao ser disparado, tem a velocidade v_p em relação a um observador em repouso na mesa. Vamos admitir que o desvio do projétil em relação à horizontal seja desprezível e que a sua penetração do alvo seja pequena, (a) Qual a velocidade da plataforma deslizante imediatamente depois de a arma ser disparada? (b) Qual a velocidade da plataforma imediatamente depois de o projétil ficar em repouso no alvo? (c) Qual o deslocamento do bloco de madeira, em relação à sua posição inicial, no instante em que o projétil o atinge?

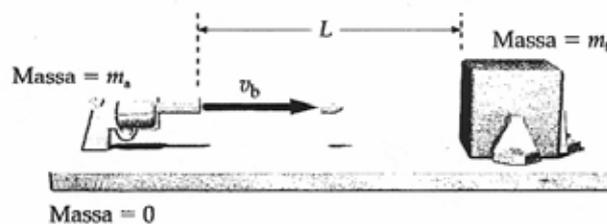


Fig. [7-27]

9 - Imagine que a energia cinética de um meteorito de 30,8 toneladas métricas de massa, ao atingir o solo, fosse de 617 MJ. Calcular o impulso I sofrido pelo meteorito ao ter a sua energia cinética reduzida à metade (o que ocorreu, provavelmente, num intervalo de tempo de 3 s). Calcular a força média F que atuou sobre o meteorito neste intervalo de tempo.

10 - Uma bola de handebol, de 300 g, com a velocidade de 5,0 m/s, bate numa parede sob o ângulo de 40° e é rebatida sob o mesmo ângulo, com velocidade de mesmo valor que a inicial. O contato com a parede foi de 2 ms. Qual a força média exercida pela bola sobre a parede?

11 - Uma bola de 150 g é arremessada à altura de 40 m. (a) Com estimativa razoável sobre a distância que a bola, durante o arremesso, fica na mão do arremessador, calcule a força média exercida pela mão e o tempo de contato entre a mão e a bola. (b) É razoável desprezar o peso da bola durante o arremesso?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Stewart, J. Cálculo, Learning Watson-Pioneira, 4º Edição Ano 2001

Tipler, P.A Física, volume 1, LTC, 4º Edição, Ano 2000.

Alonso & Finn, Física, volume 1, Mecânica, Edgard Blucher, 3º Edição, ano 1981