Aula 8

MOVIMENTO ROTACIONAL

META

Apresentar o estudo completo do movimento rotacional envolvendo, portanto a cinemática rotacional, a dinâmica rotacional, o conceito de momento de inércia e a lei de conservação do momento angular.

OBJETIVOS

Fazer com que o aluno assimile o tratamento físico do movimento rotacional, sabendo fazer o paralelo de sua descrição cinemática, dinâmica e de seus princípios de conservação, com a cinemática, dinâmica e as leis de conservação que ele viu até esta aula. Ao mesmo tempo fazer com que o alunado se sinta à vontade com uma abordagem desta parte da mecânica, no mesmo nível matemático do restante do curso, ou seja com o permanente uso do cálculo Diferencial e Integral.

PRÉ-REQUISITOS

Calculo I e ter assimilado as noções conceituais e os algoritmos de calculo das aulas anteriores.

INTRODUÇÃO

O estudo do movimento de rotação tem enorme importância no contexto da mecânica, por uma série de motivos. Primeiro porque a rotação faz parte de nosso mundo, desde as moléculas até as galáxias. A Terra gira em torno do seu eixo, e aliás por isto não é um sistema inercial, embora freqüentemente, como vimos, em problemas localizados, e dimensões muito pequenas com relação ao planeta, podemos tomar a superfície da terra como um sistema inercial. Além do mais, boa parte de nossas tecnologias se assenta em processos que envolvem movimento de rotação: rodas, engrenagens, hélices, eixos de carro entre muitos outros.

Além disso, há ainda muitas outras séries de motivos, que tornam este estudo particularmente importante. Muitos modelos em Física foram criados admitindo um movimento circular. Entre estes citemos os modelos astronômicos, que até Kepler, todos tomavam o movimento dos astros como circular, incluindo aí modelos diferentes como o de Ptolomeu e o de Copérnico. Temos ainda o modelo de Bohr, da primeira e superada versão da Mecânica Quântica que considera os elétrons girando em órbitas circulares em torno dos núcleos.

Finalmente talvez a mais importante razão para o estudo do movimento rotacional, está no desmembramento que fizemos do movimento de um corpo rígido em um movimento de translação de seu centro de massa e um movimento de rotação em relação a algum eixo, o qual por sua vez também pode ter um movimento. No caso o movimento deste eixo chama-se movimento de precessão. Este é o movimento de rotação do próprio eixo em relação à um de seus pontos. Isto é o que acontece com a Terra que gira em torno de seu eixo, o qual é inclinado com relação ao plano da translação da Terra em torno do Sol (o que dá origem as estações do ano), mas que por sua vez precessiona, ou seja, gira em torno do centro de massa da Terra que é um ponto deste eixo. Este movimento de precessão dá origem aos períodos glaciais.

Estudaremos nesta aula inicialmente a cinemática do movimento circular. Este movimento tem uma descrição simples em termos do parâmetro deslocamento angular $\Delta\theta$ e da definição da velocidade e da aceleração angulares. Chegaremos assim á uma descrição que é em tudo, completamente análoga á descrição da cinemática que fizemos na segunda e terceira aula com os parâmetros deslocamento, velocidade e aceleração. Vamos nos utilizar na obtenção de nossas equações, dos mesmos métodos de integração e diferenciação. Há porém uma diferença conceitual importante: o deslocamento angular, no espaço tridimensional não é passível de tratamento vetorial. Vamos mostrar porque, e vamos mostrar também que, não obstante, podemos definir um vetor velocidade angular e um vetor aceleração angular. Vamos mostrar como é possível fazê-lo, mesmo reconhecendo que o deslocamento angular $\Delta\theta$ não é um vetor.

Veremos, ainda nesta aula, a dinâmica rotacional em seus múltiplos aspectos, definindo o importante conceito de momento de inércia, que será trabalhado no mesmo nível do cálculo integral, que fizemos com o conceito de C.M, e mostrando também o Princípio de Conservação do Momento Angular.

1.4 Cinemática rotacional

Vamos considerar um corpo rígido em rotação pura. O que é uma rotação pura? É quando todas as partículas do corpo descrevem tragetorias circulares cujos centros situam-se sobre uma mesma reta denominada eixo de rotação. Na Fig [8-1] estamos colocando o eixo z como eixo de rotação do corpo.

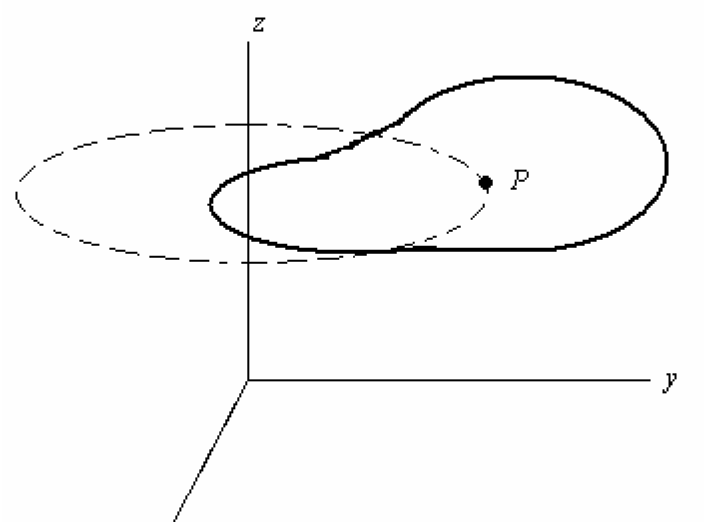


Fig. [8-1]

Seja agora, na fig[8-2] um ponto P do corpo e consideremos agora o plano XY, como sendo um plano que contem o ponto P e que é perpendicular ao eixo de rotação.

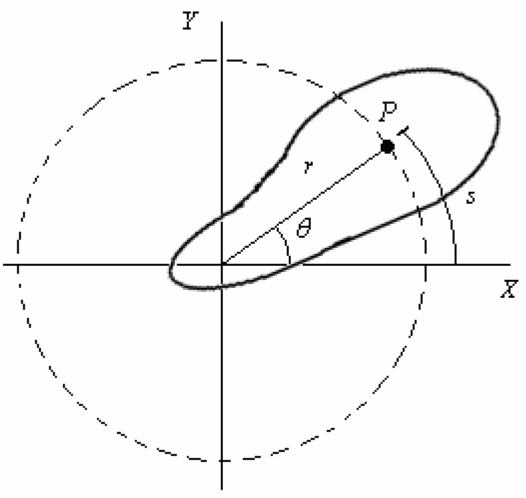


Fig. [8-2]

O ponto *P*, do corpo localiza completamente a posição do corpo, e o próprio ponto p é localizado pelas coordenadas *r* e θ (ver fig [8-2]). Escolhemos como sentido positivo de rotação, o sentido anti-horário. O ângulo θ medido em radianos é como já vimos numericamente igual à razão entre o comprimento *s* percorrido pelo ponto *P* desde o eixo *x* até sua posição mostrada na fig [8-2] e o comprimento *r*. Então:

O ângulo 2π radianos é uma razão entre o comprimento $2\pi R$ da circunferência e o raio R**,** $2\pi = \dfrac{2\pi R}{R}$**. O ângulo $\dfrac{\pi}{2}$ em radianos (90º) é a razão entre uma quarta parte da circunferência que é $\dfrac{\pi R}{2}$ e o raio** R.

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad [8\text{-}1]$$

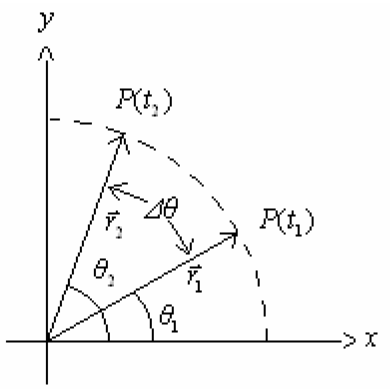


Fig. [8-3]

Na Fig.[8-3], consideramos o ponto *P*, nos instantes t_1 *e* t_2, e definimos a velocidade angular média como:

$$\omega_{méd} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad [8\text{-}2]$$

ou seja, a razão entre o deslocamento angular e a variação do tempo. Definimos também velocidade angular instantânea como sendo o limite:

$$\omega_{méd} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad [8\text{-}3]$$

Novamente, como mostramos no caso da definição de velocidade instantânea, definimos inicialmente a velocidade angular instantânea em certo instante, digamos **t₁**, tomando uma sucessão de quocientes do tipo $\frac{\theta(t_1 + \Delta t) - \theta(t_1)}{\Delta t}$ e fazendo o limite destes quocientes quando Δt tende a zero, ou seja, fazendo então:

$$\omega(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t_1 + \Delta t) - \theta(t_1)}{\Delta t} \qquad [8\text{-}4]$$

A velocidade angular instantânea ($\omega(t_1)$) em $t = t_1$, é a derivada de $\theta(t)$ com relação a *t*, tomada no instante $t = t_1$.

Ou seja:

$$\omega(t_1) = \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=t_1} \qquad [8\text{-}5]$$

Fazendo então este limite em diferentes valores de *t*, definimos uma velocidade instantânea para cada um destes valores. Sejam então $\omega(t_1)$, $\omega(t_2)$, $\omega(t_3)$... etc, as velocidades angulares instantâneas em t_1, t_2, t_3 ... Temos então uma correspondência entre <u>todos</u> os possíveis instantes de tempo *t*, e os correspondentes valores das velocidades angulares instantâneas. Isto significa que definimos a função velocidade angular instantânea

$\omega = \omega(t)$ dada na equação [8-2], como a derivada com relação ao tempo da função posição angular da partícula P, ou seja, a derivada de $\theta = \theta(t)$.

Observamos agora um fato muito importante e característico do movimento de rotação que estamos analisando. Em um corpo rígido, todas as linhas radiais, que são todos os segmentos de reta, fixos nele e perpendiculares ao eixo de rotação, giram de um mesmo ângulo em um mesmo intervalo de tempo. Então a velocidade angular ω em torno deste eixo é a mesma para todas as partículas do corpo. A velocidade angular ω é, portanto uma característica de todo o corpo. Ela tem dimensão $[T]^{-1}$, uma vez que $\Delta\theta$, do numerador da definição $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, é adimensional, pois como observamos em [8-1], $\theta = \frac{s}{r}$, ou seja, $[\theta] = \frac{[L]}{[L]}$. Comumente são usadas as unidades *rad/s* ou *rotações/s*.

Se a velocidade angular de *P* não for constante a partícula terá uma aceleração angular. Sejam ω_1 e ω_2 as velocidades angulares em t_1 e t_2, ou seja $\omega_1 = \omega(t_1)$ e $\omega_2 = \omega(t_2)$. Neste caso definimos aceleração angular média $\alpha_{méd}$, pela equação:

$$\alpha_{méd} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad [8\text{-}6]$$

A aceleração angular instantânea α é o limite desta relação quando Δt tende a zero, ou seja:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad [8\text{-}7]$$

Novamente a função aceleração angular instantânea definida em [8-7], implica que antes definimos a aceleração em todos os valores possíveis de *t*, para que depois, considerando a correspondência entre cada instante de tempo e sua aceleração angular instantânea, possamos considerar a função aceleração angular instantânea, como está definida em [8-7].

Como ω é a mesma para todas as partículas do corpo rígido, concluímos da equação [8-7], que α também será a mesma para todas as partículas do corpo rígido, e então α, como ω é uma característica do corpo como um todo. A dimensão de aceleração angular é $[T]^{-2}$ e suas unidades mais usadas são *rad/s²* ou *rotações/s²*.

A rotação de uma partícula (ou de um corpo rígido) em torno de um eixo fixo, tem uma correspondência formal com o movimento de translação de uma partícula (ou de um corpo rígido) ao longo de uma direção fixa, Se a translação for ao longo de um eixo X, as variáveis cinemáticas que descrevem esta translação são "*x*", "*v*", "*a*", e as variáveis cinemáticas que descrevem a rotação em torno de um eixo fixo são "θ", "ω" e "α". A dimensão de "*x*" é [*L*], de "*v*" é [*L*] $[T]^{-1}$ e de "*a*" é [*L*] $[T]^{-2}$. Então as grandezas lineares "*x*", "*v*", "*a*", diferem quanto à dimensão das correspondentes angulares "θ", "ω" e "α" por um fator de comprimento [*L*].

Observamos ainda que no caso do movimento de translação retilíneo, podemos tratar as variáveis cinemáticas como escalares, uma vez que basta um sinal para especificar a direção. Assim por exemplo para um movimento segundo o eixo X teremos uma velocidade positiva quando o deslocamento for na direção positiva do eixo X e uma velocidade negativa quando for no sentido negativo. Assim para a grandeza essencialmente vetorial que é a velocidade, e que, portanto para ser especificada precisa-se dar um módulo e uma direção, dando o sinal da velocidade já estamos especificando a direção. Daí a possibilidade do tratamento de deslocamento, velocidade e aceleração, no caso de um movimento de translação unidimensional, como escalares.

Da mesma maneira, para um ângulo de rotação, uma velocidade de rotação e uma aceleração angular, em torno de um eixo fixo, basta especificar um sentido de rotação como positivo, por exemplo, o sentido anti-horário é o sentido positivo, para podermos especificar completamente o deslocamento angular ou a velocidade angular ou a aceleração angular. Então podemos também, no caso de rotação em torno de um eixo fixo, dar um tratamento escalar a estas grandezas cinemáticas. Isto quer dizer que podemos defini-las e trabalhar com elas (fazer todas as contas necessárias), escrevendo-as simplesmente como números com sinais.

No caso das grandezas cinemáticas translacionais, sabemos que se o movimento não for retilíneo, mas sim um movimento qualquer no espaço tridimensional, devemos trabalhar com os vetores $\vec{r}$, $\vec{v}$ e $\vec{a}$, pois não podemos explicitar sua direção apenas por um sinal. É então razoável supor que no caso do movimento de rotação em torno de um eixo que não é fixo, precisemos também de um vetor para especificar as variáveis cinemáticas rotacionais. Como, e se é possível fazê-lo, é o que veremos nas próximas seções.

Equações relacionando as grandezas cinemáticas no movimento de rotação

Consideremos inicialmente o movimento de uma partícula de um corpo em rotação em torno de um eixo fixo, e suponhamos que a velocidade angular da rotação seja constante. Como o eixo é fixo, podemos tratar o problema considerando as grandezas cinemáticas como escalares. Partindo da definição de velocidade angular,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta = \omega dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \int_{t_0}^{t} \omega dt' \qquad [8\text{-}8]$$

Em [8-8] supusemos que em $t_0 = 0$, $\theta = \theta_0$ (condição inicial). Lembremos que colocamos θ' e *t'* como variáveis de integração para distingui-las dos limites θ e *t* de integração (recordar aulas 2 e 3). Então,

$$\theta' \Big|_{\theta_0}^{\theta} = \omega [t' \Big|_0^t]$$

E então tiramos:

$$\theta - \theta_0 = \omega t$$

Ou seja:

$$\theta = \theta_0 + \omega t \qquad [8\text{-}9]$$

Resolvendo por integral indefinida, e com a mesma condição inicial $\theta(t = 0) = \theta_0$, temos:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta = \omega dt$$

$$\int d\theta = \int \omega dt + C$$

$$\int d\theta = \omega \int dt + C$$

$$\theta = \omega t + C \qquad [8\text{-}10]$$

Como $\theta(t=0) = \theta_0$ (condição inicial)

$$\theta_0 = C$$

E substituindo em [8-10]

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

Seja agora, ainda no caso de um eixo fixo no nosso sistema de referência, um movimento de rotação uniformemente variado, isto é, com aceleração angular constante (α = const.) e com as condições iniciais $\theta(t=0) = \theta_0$ e $\omega(t=0) = \omega_0$. Então partimos de

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$d\omega = \alpha dt$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega' = \int_{t_0}^{t} \alpha dt'$$

Como α é constante,

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega' = \alpha \int_{t_0}^{t} dt'$$

$$\omega'\Big|_{\omega_0}^{\omega} = \alpha [t'\Big|_0^t]$$

$$\omega - \omega_0 = \alpha t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad [8\text{-}11]$$

Por integral indefinida

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$d\omega = \alpha dt$$

$$\int d\omega = \int \alpha dt + C$$

$$\int d\omega = 2\int dt + C$$

$$\omega = 2dt + C$$

Como $\omega(t=0) = \omega_0$

$$\omega_0 = C$$

e ficamos com:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Para encontrar $\theta = \theta(t)$, fazemos

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta = \omega dt$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \int_0^t \omega dt'$$

Como agora ω não é constante, mas vale ([8-11]) $\omega = \omega_0 + \alpha t$, não podemos tirar ω da integral, mas sim, temos que integrar ω. Obtemos então:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t')dt'$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \int_0^t \omega_0 dt' + \int_0^t \alpha t' dt' \qquad [8\text{-}12]$$

Em [8-12] ω_0 é uma constante, pois é a condição inicial dada, e α também é uma constante segundo o enunciado de nosso problema. Então:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \omega_0 \int_0^t dt' + \alpha \int_0^t t dt'$$

$$\theta' \Big|_{\theta_0}^{\theta} = \omega_0 \left[t' \Big|_0^t \right] + \alpha \left[\frac{t'^2}{2} \Bigg|_0^t \right]$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \qquad [8\text{-}13]$$

Deixemos a você, a tarefa de reduzir a equação [8-13] por integral indefinida. Deixamos também ao aluno interessado a tarefa de deduzir para as variáveis rotacionais uma expressão análoga à da fórmula de Torricelli para as variáveis cinemáticas de translação com direção fixa, que é

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \qquad [8\text{-}14]$$

Sugerimos que recorde a dedução correspondente na aula 3.

Podemos então construir a seguinte tabela de comparação das fórmulas cinemáticas de translação com direção fixa e de rotação com eixo fixo. Inicialmente, para o movimento com velocidade de translação constante e com velocidade angular constante

	Movimento de translação (Direção fixa)	Movimento de rotação (Eixo fixo)
1-	$x = x_0 + vt$	$\theta = \theta_0 + \omega t$

Em seguida para os movimentos com aceleração constante

	Movimento de translação (Direção fixa)	Movimento de rotação (Eixo fixo)
2-	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
3-	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
4-	$v^2 = v_0^2 + 2ax$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

Tabela [8-1]

Nestas tabelas podemos constatar a completa analogia entre os dois conjuntos de fórmulas. Observamos ainda, que poderíamos ter tratado o movimento circular, com as variáveis $\vec{r}$, $\vec{v}$ e $\vec{a}$. De certa forma já o fizemos quando consideramos as componentes tangencial e normal de aceleração em um movimento no espaço tridimensional. Tínhamos mostrado que a componente tangencial é $\frac{dv}{dt}$ e a componente normal é $\frac{v^2}{r}$. Então observamos (recordar aula 3) que no caso de um movimento circular uniforme $\vec{\alpha} = \vec{0}$, a componente tangencial é nula, pois $\frac{dv}{dt}$=0, mas existe uma aceleração centrípeta constante dada por $\frac{v^2}{r}$.

O estudo da cinemática com as grandezas definidas pelos valores $\vec{r}$, $\vec{v}$ e $\vec{a}$, que fizemos na aula 3, é o mais geral possível e inclui, portanto, a cinemática do movimento rotacional. O problema é que o movimento circular é bidimensional e portanto, usando as grandezas de que dispúnhamos para descrever o movimento translacional, teríamos que necessariamente lidar com vetores. Vemos na Fig [8-4] que a velocidade $\vec{v}$ de um movimento circular, seja uniforme ou uniformemente variado, ou com uma aceleração qualquer, varia de direção à medida que a partícula percorre a circunferência. Então esta velocidade $\vec{v}$ jamais poderia ser tratada como um escalar. Ao definir outra velocidade, apropriada ao caso do movimento circular, que foi a velocidade angular ω, mostramos que esta sim pode ser tratada como um escalar. Isto porque ela fica perfeitamente definida pelo seu módulo e um sinal que estabeleça a sua direção. Definimos assim as variáveis cinemáticas angulares θ, ω e α, exatamente para permitir a analogia das fórmulas que aparecem na Tabela [8-1].

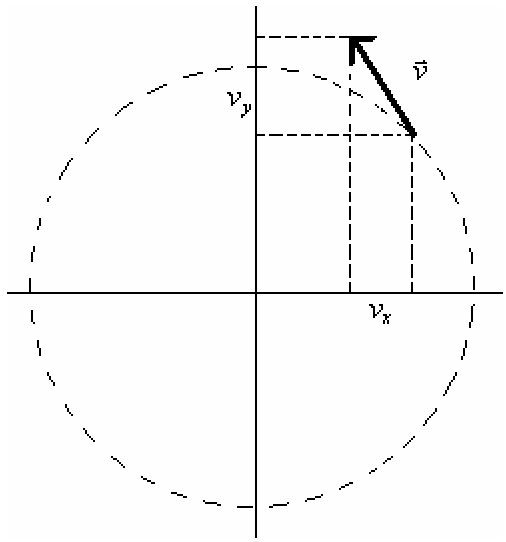


Fig. [8-4]

Vejamos agora um exemplo de aplicação destas fórmulas:

Exemplo 1-Um esmeril partindo do repouso, tem uma aceleração angular constante α de *3,0 rad/s²*. Consideremos uma linha *OP* (ver Fig. [8-5]) inicialmente na posição horizontal. Determine: a) o deslocamento angular da linha *OP* (e, portanto do esmeril); b) a velocidade angular do esmeril *2,0s* depois.

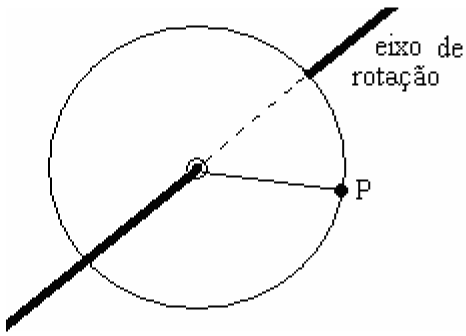


Fig. [8-5]

Solução: a) são dados α e *t*, queremos calcular θ. Usando a equação $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ (onde então consideramos θ_0 =0, ou seja, começamos a contar o tempo quando começamos a contar o ângulo). Como o esmeril parte do repouso, então $\omega_0 = 0$ e ficamos com

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Sendo $\alpha = 3{,}0\ rad/s^2$

$$\theta = \frac{1}{2} \times 3{,}0 \times (2{,}0)^2\, rad = 6{,}0 rad$$

b) Para achar a velocidade angular após 2,0s usamos, lembrando que $\omega_0 = 0$:

$$\omega = \alpha t$$

$$\omega = (2 \times 3{,}0)\left(\frac{rad}{s}\right) = 6{,}0\left(\frac{rad}{s}\right)$$

Uma vez que no item a) tínhamos determinado θ, podemos a título de verificação usar

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta,$$

que no caso fica:

$$\omega^2 = (2 \times 3{,}0 \times 6{,}0)\left(\frac{rad}{s}\right)^2 = 36\left(\frac{rad}{s}\right)^2$$

donde

$$\omega = 6{,}0\left(\frac{rad}{s}\right)$$

comprovando o que havíamos obtido.

Grandezas vetoriais na rotação

A utilidade e importância do uso das grandezas cinemáticas angulares no estudo da rotação, é que elas descrevem a situação não de uma única partícula de um corpo, mas sim de todo o corpo. Seja o corpo da Fig [8-6]. O ponto *P* tem uma velocidade $\vec{v}$, já o ponto *P'* que está a menor distância do eixo de rotação, tem uma velocidade $\vec{v}'$ menor. Entretanto ω, a velocidade angular é a mesma para qualquer ponto do corpo.

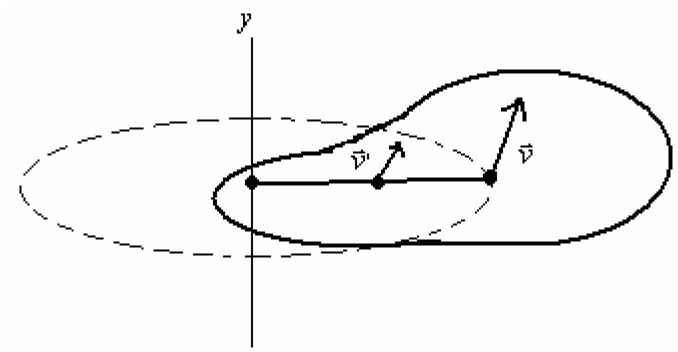


Fig. [8-6]

Mas, já notamos que o fato de podermos tratá-las como escalares, e também toda analogia com as equações das grandezas cinemáticas lineares *x*, *v* e *a*, (Tabela [8-1]) decorre do fato de termos considerado o eixo de rotação fixo, da mesma maneira que só podemos tratar as grandezas cinemáticas lineares como escalares quando o movimento é unidimensional. Vimos também que isto acontece porque quando temos um eixo fixo, só temos dois sentidos possíveis de rotação (o sentido horário e o anti-horário) e assim a grandeza é completamente determinada por um número (que é sem módulo) e um sinal, que por convenção, fazemos corresponder a um dos dois possíveis sentidos de rotação. Fica sendo assim uma grandeza escalar.

Se, porém o eixo de rotação variar com o tempo, já não podemos caracterizar a rotação somente por um módulo e um sentido; teríamos que determinar também, a cada momento, qual é o plano de rotação. Sabemos que este plano é perpendicular ao eixo de rotação. A direção do eixo de rotação é então um bom candidato para caracterizar completamente nossas grandezas cinemáticas escalares. Desta maneira, caracterizadas por um módulo e uma direção, elas passam a ser grandezas vetoriais.

Fomos assim levados à conclusão, de que para descrever movimentos de rotação em torno de eixos, cuja direção varia com o tempo, as variáveis cinemáticas rotacionais θ, ω e α, que definimos acima, têm que se transformar em vetores, cuja direção é, em cada momento, a direção do eixo de rotação.

Mas para definir estas novas grandezas cinemáticas rotacionais, agora como vetores, temos que nos assegurar que elas têm as propriedades matemáticas dos vetores. Comecemos então pelo deslocamento angular θ. O valor do deslocamento angular de um corpo é o ângulo de que ele gira. Vamos mostrar que eles não podem ser tratados como vetores. Isto porque não obedecem à uma propriedade dos vetores. Vimos (Aula 2) que a soma de vetores é comutativa, a saber:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \qquad [8\text{-}15]$$

Mas se considerarmos duas rotações no espaço, θ_1 e θ_2, veremos que elas não comutam. Para tanto, examine atentamente as figuras [8-7]. Na Fig. [8-7] temos um livro deitado sobre uma mesa. Considerando um eixo vertical, portanto perpendicular à mesa, e passando pelo centro do livro (centro de simetria), definimos na Fig. [8-7] uma rotação de 90º em torno deste eixo, e em sentido horário quando vista de cima. Na parte b) da Fig. [8-7], vemos a posição do livro após esta rotação θ_1.

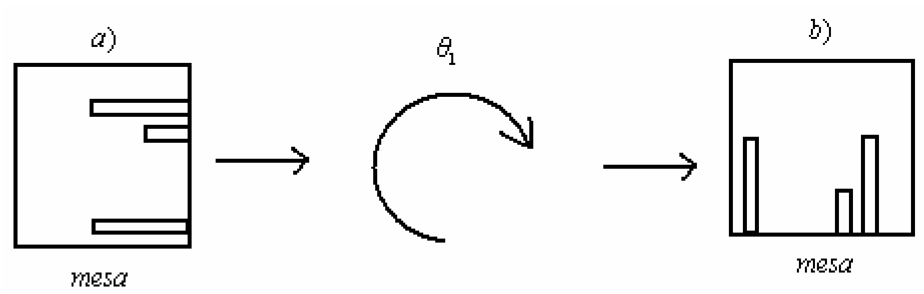


Fig. [8-7]

Vamos definir agora um novo eixo de rotação. Este é um eixo, ao longo da mesa, em uma direção que chamamos sul-norte (Fig. [8-8]).

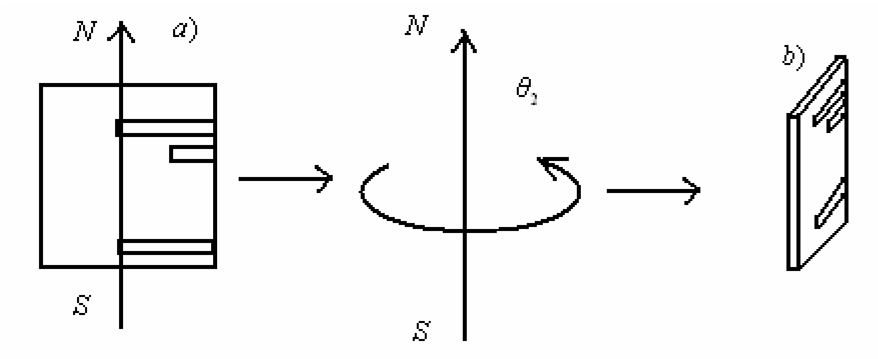


Fig. [8-8]

Na parte b) da Fig. [8-8], mostramos em perspectiva o resultado desta rotação de 90º em torno do eixo sul-norte da figura. O plano do livro é, depois da rotação perpendicular ao plano da mesa. Para realizar esta rotação teríamos que suspender um pouco o eixo de rotação sul-norte e o livro ficaria apoiado em uma de suas bordas (a borda da direita da figura a)). A rotação tem sentido horário quando vista do sul.

Na Fig. [8-9] mostramos o resultado da aplicação da rotação θ_2 sobre o livro na posição da Fig. [8-7] b). Este resultado é a soma das rotações θ_1 e θ_2 (É portanto $\theta_1 + \theta_2$).

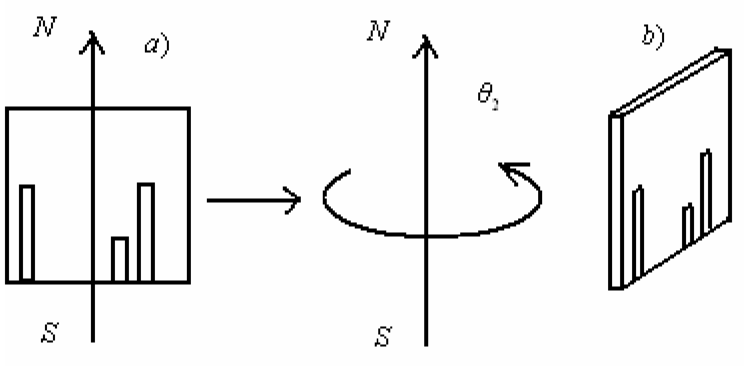


Fig. [8-9]

Na Fig. [8-10] mostramos o resultado da aplicação da rotação θ_1, sobre a posição b) da Fig. [8-8].Este resultado é a soma de θ_2 com θ_1 (ou seja, $\theta_2 + \theta_1$).

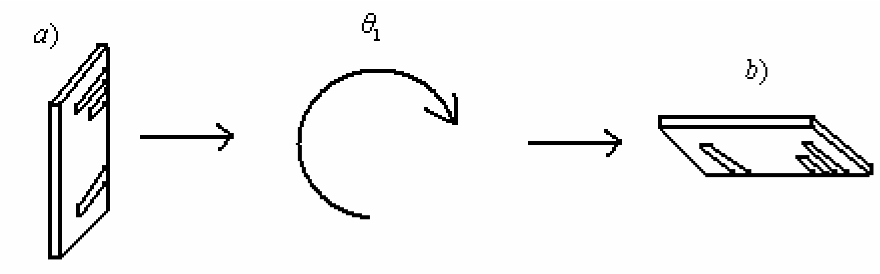


Fig. [8 –10]

Comparando o lado b) da Fig. [8-9], que é $\theta_1 + \theta_2$, com o lado b) da Fig. [8-10] que é $\theta_2 + \theta_1$, vemos que a aplicação de $\theta_1 + \theta_2$ e de $\theta_2 + \theta_1$ em uma mesma posição do livro, resulta em duas posições finais diferentes. Isto quer dizer que $\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$. A conclusão é que a soma das rotações no espaço não comutam. Uma rotação não pode ser tratada então como um vetor, pois vimos na Aula 2 as propriedades do espaço vetorial, e vimos que a soma de vetores é comutativa.

Isto significa então que todo o ferramental matemático do cálculo vetorial não pode ser aplicado às variáveis cinemáticas rotacionais θ, ω e α? veremos em seguida como contornar este problema e como as variáveis cinemáticas rotacionais ω e α podem ser tratadas como vetores.

Em primeiro lugar queremos recomendar fortemente que esta experiência de aplicação sucessiva de duas rotações, que desenhamos às páginas anteriores, devem ser realizadas por cada um de vocês da *UAB*. É mais fácil fazer pessoalmente esta experiência, tomando cuidado para lembrar quais são os eixos de rotação de cada uma das rotações (você pode escolher outros eixos que lhe pareçam melhores), que acompanhar um desenho em um texto, ou mesmo que acompanhar a experiência feita por outra pessoa (Aliás, isto vale para qualquer demonstração ou dedução-só que neste caso esta verdade é particularmente evidente).

Nas figuras abaixo, desenhamos a sucessão das mesmas duas rotações θ_1 e θ_2 explicadas acima, aplicadas uma em seguida à outra, mas com um ângulo de 45º.

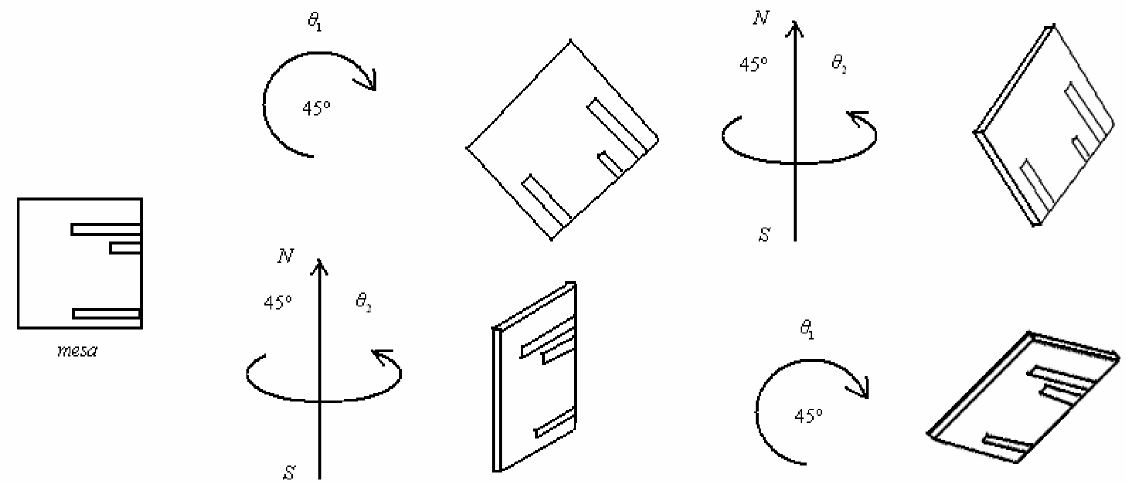


Fig. [8 –11]

Finalmente na Fig. [8-12] mostramos a mesma sucessão de rotações, inicialmente $\theta_1 + \theta_2$ e em baixo $\theta_2 + \theta_1$, onde os eixos de rotação, são os mesmos definidos desde o início, mas agora os ângulos, tanto de θ_1 quanto de θ_2 são de 20º.

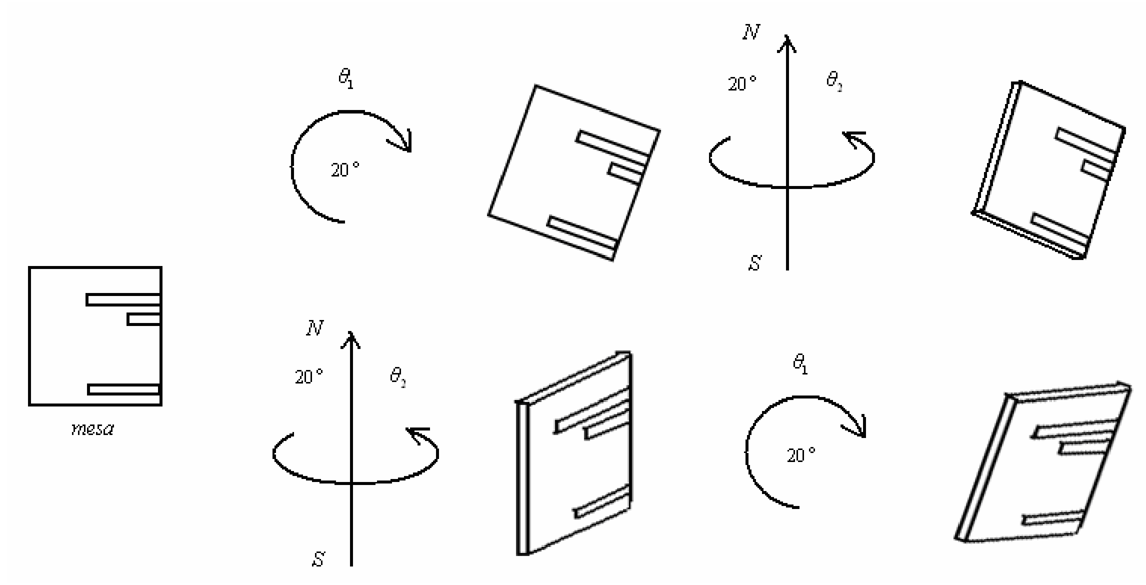


Fig. [8 –12]

Observando as figuras [8-11] e [8-12], vemos que a medida que diminuímos os ângulos de rotação de θ_1 e de θ_2, a diferença entre $\theta_1 + \theta_2$ e $\theta_2 + \theta_1$ vai se tornando cada vez menor. Com ângulo de 45º a diferença é bem menor que com um ângulo de 90º. Com um ângulo de 20º a diferença passa a ser muito pequena. Para um ângulo de 3º (que seria muito difícil desenhar) a diferença é insignificante. Vemos que quando $\Delta\theta$ tende a zero, as rotações espaciais em eixos diferentes, tendem a poderem ser somadas comutativamente. Assim concluímos que embora os deslocamentos angulares finitos $\Delta\theta$ não possam ser tratados como vetores, os deslocamentos infinitesimais $d\theta$, podem. Com isto podemos definir o vetor velocidade angular, pois

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\theta}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \qquad [8\text{-}15]$$

e podemos tratar o deslocamento $\Delta\vec{\theta}$ como vetor, na medida que quando $\Delta t \to 0$ o deslocamento finito $\Delta\theta$ também tende a zero e aí a soma destes deslocamentos ganha, como vimos, a propriedade comutativa.

Então definimos o vetor velocidade angular ω (ver Fig. [8-13]) como o vetor cujo módulo é

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

e cuja direção é a do eixo de rotação. Já analisamos acima que tomando o eixo de rotação como a direção do vetor velocidade angular, estamos definindo o plano de rotação. E de um modo geral ambos podem agora variar com o tempo. A direção do vetor $\vec{\omega}$ que está situado no eixo de rotação é dada pela regra do saca-rolha ou da mão direita. Se curvarmos os dedos da mão direita em torno do eixo acompanhando a rotação do ponto *P*, o polegar estendido apontará na direção do vetor velocidade angular. Ou alternativamente, se um saca-rolha for girado no sentido do ponto *P*, avançará na direção do vetor velocidade angular. Observemos que não há nenhum movimento na direção do vetor velocidade angular. Ele representa a velocidade angular de um movimento de rotação que se processa em um plano perpendicular a ele. Assim o vetor velocidade angular é o ente matemático adequado para a descrição do movimento de rotação, e para os cálculos que se necessite fazer envolvendo este vetor.

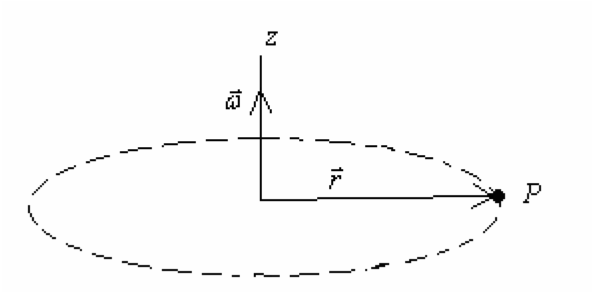


Fig. [8 –13]

Podemos definir a aceleração angular como vetor. O vetor aceleração angular é dado por

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt},$$

que é o escalar $\frac{1}{dt}$ aplicado (ou multiplicando) o vetor $d\vec{\omega}$. Para uma rotação em torno de um eixo fixo, o vetor aceleração tem sua reta suporte no eixo de rotação. Quanto à direção (sentido) se a aceleração é positiva, temos para a direção, a mesma regra do saca-rolha, e aceleração negativa, sentido contrário.

1.5 Dinâmica Rotacional I

Torque

Iniciamos esta seção, discutindo em maior detalhe, uma definição que já temos utilizado: a definição de torque. Sabemos que uma força aplicada a um corpo produz uma aceleração (aceleração linear) no corpo. Este é o conteúdo da segunda lei de Newton. Se considerarmos uma força atuando sobre um corpo que pode girar em torno de um eixo, vemos que esta força também pode promover um movimento de rotação do corpo em torno do eixo, ou seja, pode promover uma aceleração angular, mas agora é importante para caracterizar esta aceleração, que consideremos as direções relativas da força e do eixo de rotação.

De fato se aplicarmos uma força à uma porta que gira em torno de uma dobradiça, que no caso é o eixo de rotação da porta, o resultado é muito diferente dependendo do ponto de aplicação da força na porta, e de sua direção com relação à dobradiça. De fato, uma força aplicada em direção à linha da dobradiça não produz nenhum deslocamento angular, enquanto uma força de determinado valor (módulo) produzirá uma aceleração máxima se for aplicada à porta perpendicularmente ao plano desta e em sua extremidade exterior. Este é um fato corriqueiro do dia a dia, mas como sempre, recomendamos a você, aluno da *UAB*, que teste este fato, agora de uma forma mais intencional e consciente.

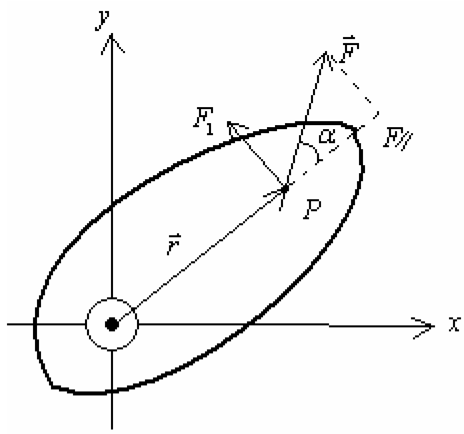


Fig. [8-14]

A grandeza matemática adequada para a medida da rotação, e da aceleração angular, é o torque. Começaremos definindo o torque de uma força em um ponto *P* de um corpo rígido que pode girar em torno de um eixo. Na Fig. [8-14] desenhamos o ponto *P* e a força $\vec{F}$. O eixo de rotação e o eixo *Z* que é perpendicular ao plano *XY,* quer dizer, é perpendicular ao plano da página e sua direção (sentido positivo) é saindo da página em direção ao leitor. Como sabemos:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [8\text{-}16]$$

Então o torque é um vetor cujo módulo é

$$|\vec{\tau}| = rF sen\alpha,$$

e cuja direção é perpendicular ao plano de $\vec{r}$ e $\vec{F}$, isto é ao plano *XY* com sentido do sentido positivo ao eixo *Z*. O sentido é dado pela regra da mão direita ou do saca-rolha. Recordemos esta regra. Se colocarmos os dedos da mão direita na direção de $\vec{r}$, e fechando os dedos formos à direção de $\vec{F}$, então o polegar estendido apontará na direção do torque. Agora pela regra da saca-rolha: se girarmos um saca-rolha da direção de $\vec{r}$ para a direção de $\vec{F}$, que no nosso desenho é o sentido anti-horário, a direção do torque é a direção na qual avança o saca-rolha. Indicamos um vetor perpendicular à página e vindo da página em direção ao leitor pelo símbolo: $\odot$ Se o vetor, perpendicular à página tivesse direção oposta a este (ou seja, entrando na página) indicaríamos por $\otimes$. Vemos ainda na Fig. [8.2-1], que se decompusermos $\vec{F}$ em uma componente paralela a $\vec{r}$ e uma componente perpendicular a $\vec{r}$, a componente paralela a $\vec{r}$ não exerce torque. Todo o torque é exercido pela componente perpendicular a $\vec{r}$. E de fato o módulo de $\vec{F}_\perp$ é $F sen\theta$. O módulo do torque de $\vec{F}_\perp$ é:

$$\left|\vec{\tau}_{\vec{F}_\perp}\right| = rF_\perp sen\, \widehat{F_\perp r} \qquad [8\text{-}17]$$

onde indicamos por $sen\, \widehat{F_\perp r}$, o seno do ângulo entre $\vec{F}_\perp$ e $\vec{r}$. Mas este ângulo é 90º e portanto o seno é 1. Ao mesmo tempo $F_\perp = F sen\theta$ como vimos. Então

$$\left|\vec{\tau}_{\vec{F}_\perp}\right| = rF sen\theta \qquad [8\text{-}18]$$

Mas [8-18] nada mais é que o módulo do torque de $\vec{F}$. Mostramos assim que o torque de $\vec{F}$ é o torque de $\vec{F}_\perp$, ou, como havíamos afirmado, todo torque de $\vec{F}$ é exercido por sua componente perpendicular a $\vec{r}$.

Momento angular

O análogo rotacional do momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$ é o momento angular definido por:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad [8\text{-}19]$$

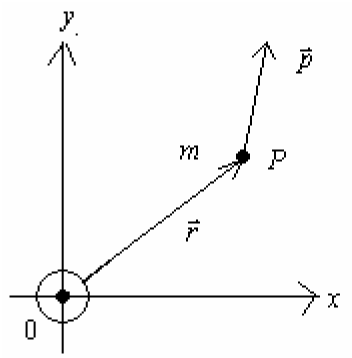


Fig. [8-15]

Vamos entender a equação [8-19] observando a Fig. [8-15]. Seja no ponto **P** uma partícula de massa *m* e momento linear $\vec{p}$**.** O momento linear desta partícula é definido com relação a um ponto 0. Na Fig. [8-15] colocamos neste ponto a origem de um sistema de coordenadas *XY*, e vemos que $\vec{r}$ é o vetor posição que localiza o ponto *P*. Lembrando a definição do produto vetorial, vemos que o momento angular de massa *m* de nossa Fig. [8-2], é um vetor perpendicular ao plano *XY* e saindo do papel em direção ao leitor (lembrar a regra do saca-rolha ou da mão direita), cujo módulo é:

$l = rp sen\theta$ [8-20]

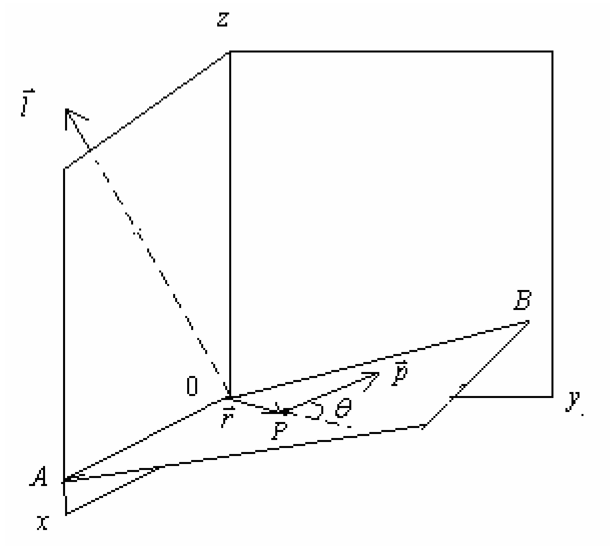


Fig. [8-16]

Na Fig. [8-15] situamos *P* no plano *XY*. Mas é claro que *P* é um ponto qualquer do espaço tridimensional. Vamos então na Fig. [8-16] considerar um ponto *P* qualquer e situando o vetor posição $\vec{r}$ deste ponto *P* bem como desenhando o vetor $\vec{p}$ (momento linear da partícula de massa *m* em *P*), mostramos o vetor $\vec{l}$, que é o momento angular da partícula de massa m situada em *P***.** Os segmentos *AO* e *OB* na Fig. [8-16], são as interseções do plano definido por $\vec{r}$ e $\vec{p}$ com os planos *XZ* e *YZ*. Subentende-se que como $\vec{p}$ é um vetor não nulo, a partícula tem, neste referencial uma velocidade $\vec{v}$ (instantânea) que é na direção de $\vec{p}$. Então o vetor $\vec{p}$ é tangente à trajetória da partícula neste instante. O vetor $\vec{l}$ é o momento angular da partícula neste instante em relação ao ponto 0.

A equação [8-20] pode ser escrita como:

$$l = (rsen\theta)p = pr_{\perp} \quad [8\text{-}21]$$

onde $r_{\perp}$ é a componente de $\vec{r}$ segundo a direção de $\vec{p}$, ou a distância de $\vec{p}$ à reta suporte do vetor $\vec{p}$. Ver Fig. [8-17] onde, novamente por simplicidade situamos o plano $\vec{r}$ e $\vec{p}$ coincidente com o plano *XY*. No triângulo retângulo *OAP* vemos que

$$sen\theta = \frac{OA}{r} \quad [8\text{-}22]$$

OA é a componente de $\vec{r}$ na direção perpendicular a reta suporte do vetor $\vec{p}$. Esta componente, às vezes chamada de braço de alavanca é o que chamamos $r_{\perp}$ na equação [8-21]. Então como $r_{\perp} = rsen\theta$ (de [8-22], lembrando $AO = r_{\perp}$) temos imediatamente [8-20].

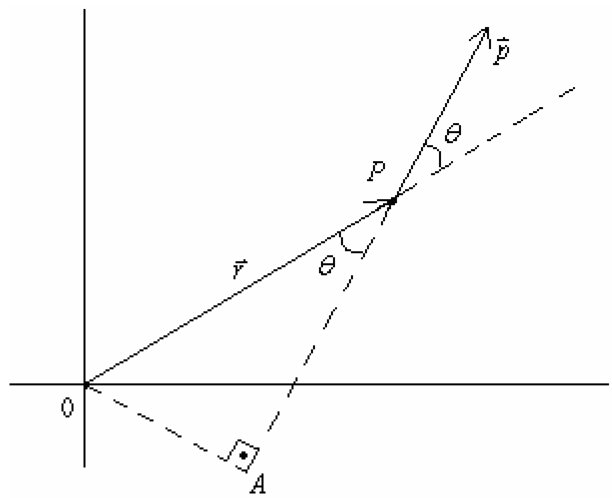


Fig. [8-17]

De maneira análoga, a equação [8-20] da definição do momento angular, ou melhor da expressão de seu módulo ([8-21]-$l = rpsen\theta$), pode ser colocada na forma

$l = r(psen\theta)$. [8-23]

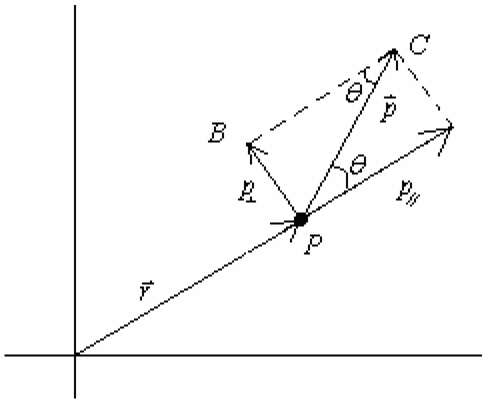


Fig. [8-18]

Vemos na Fig. [8-18], que $\vec{p}$, por sua vez pode ser decomposta em uma componente paralela a $\vec{r}$ e em uma componente perpendicular a $\vec{r}$. No triângulo retângulo *PBC*, vemos que o ângulo $B\hat{C}P$ (ângulo cuja vértice é *C*) é igual a θ (alternos internos). Então $sen\theta = \frac{p_\perp}{p}$, ou seja:

$$p_\perp = psen\theta$$

E então [8-23], fica

$$l = r(p\,sen\theta) = rp_\perp \quad [8\text{-}24]$$

Analogamente ao que acontecia na definição do torque de uma força, só a componente do momento linear perpendicular à direção do vetor posição $\vec{r}$, contribui para o momento angular.

Segunda lei de Newton na forma rotacional

A segunda lei de Newton $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, tem um análogo em termos das variáveis rotacionais. Recordemos que na Aula 5, tínhamos mostrado que Newton não escreveu sua famosa 2ª lei na forma $\vec{F} = m\vec{a}$, e sim na forma $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Lembremos que de $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, tiramos $\vec{F} = m\vec{a}$, na suposição da massa ser uma constante. De fato

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \qquad [8\text{-}25]$$

supondo *m* constante, o que não é mais verdadeiro no caso da Relatividade de Einstein (recordar Aula 4), então tiramos:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Vamos então partir de $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, que é a segunda lei Newton tal como ele a escreveu, e multipliquemos ambos os membros desta equação pela esquerda, pelo vetor $\vec{r}$ (produto vetorial).

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad [8\text{-}26]$$

Mas $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$ (da definição de torque), então

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad [8\text{-}27]$$

Tomemos agora a equação [8-19] a saber:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

E façamos a deriva temporal dos dois membros de [8-19]. Temos

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \qquad [8\text{-}28]$$

Se você ainda não aprendeu a derivada de um produto de vetores, saiba que ela segue a mesma regra da derivada de um produto, somente que agora temos que ter o cuidado de manter a ordem dos produtos vetoriais (Isto porque trocando a ordem de um produto vetorial, troca-se a direção do vetor produto pelo vetor oposto $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$). Então,

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) \qquad [8\text{-}29]$$

mas $\vec{p} = m\vec{v}$ e $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$. Então o primeiro termo do segundo membro de [8-29] é

$$(\vec{v} \times m\vec{v}),$$

que é o valor nulo, pois $\vec{v}$ é paralelo a $m\vec{v}$. A equação [8-29] fica:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad [8\text{-}30]$$

Comparando agora [8-30], a saber, $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$, com [47-2], a saber, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$, tiramos a expressão:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt} \qquad [8\text{-}31]$$

Esta expressão é a que corresponde, na dinâmica rotacional, à segunda lei de Newton. Em [8-31] $\vec{\tau}$ corresponde à força $\vec{F}$ da segunda lei de Newton e o $\vec{l}$, o momento angular, corresponde a $\vec{p}$, o movimento linear da segunda lei de Newton.

Observemos que ao chegarmos à expressão [8-31], não estamos chegando a novas leis fundamentais da mecânica. Tanto é assim, que partimos, nesta dedução de $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, esta sim uma lei fundamental. A expressão [8-31], apesar de sua enorme importância e utilidade, nada mais é que uma conseqüência da lei, esta sim uma lei fundamental da Física, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

Como sempre a equação vetorial

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt} \qquad [8\text{-}31],$$

corresponde a três equações escalares, que são suas componentes nos eixos *X, Y* e *Z*.

$$\tau_x = \frac{dl_x}{dt} \ , \quad \tau_y = \frac{dl_y}{dt} \quad \text{e} \quad \tau_z = \frac{dl_z}{dt} \qquad [8\text{-}32].$$

Exemplo 1

Uma partícula de massa *m* cai do ponto *a* (Fig. [8-19]) na vertical (Eixo *Y*). a) Calcular o torque que atua sobre *m* em relação à origem *O*, em um instante *t* qualquer. b) Calcular o momento angular *m* em um instante *t* qualquer, em relação à mesma origem. c) Mostrar que a relação $\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}$ conduz, quando aplicada a este problema a um resultado correto.

Solução:

a) O torque é dado pela equação [8-16] que é $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ e seu módulo vale:

$$\tau = rFsen\theta \qquad [8\text{-}32]$$

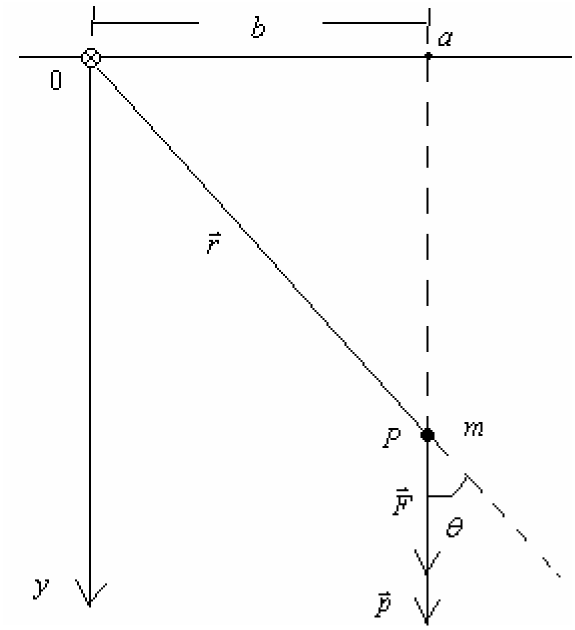


Fig. [8-19]. Temos $\vec{F} = m\vec{g}$ e $\vec{p} = m\vec{v}$

Vemos na Fig. [8-19] que $b = r\, sen\theta$ (do triângulo *OPa* onde o ângulo $O\hat{P}a = \theta$). Como $\vec{F} = m\vec{g}$, [8-32] fica:

$\tau = mgb$ [8-33]

Vemos em [8-33]que como *m, g* e *b* são constantes, então o torque é constante. Isto, aliás, é evidente porquanto embora $\vec{r}$ varie em direção e módulo com o tempo, o braço *b* da força $\vec{F}$ é constante. Por sua vez esta força é constante, pois é o produto da massa pela aceleração $\vec{g}$ que é constante. O movimento da massa *m* é, porém acelerado (uniformemente acelerado). O torque está orientado perpendicularmente à página da figura (isto é, na direção horizontal do espaço real) entrando na página.

b) Sendo o momento angular $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$, seu módulo é dado por:

$l = rp\, sen\theta$

Como $r\,sen\theta = b$, e $p = mv$, lembrando a equação do movimento uniformemente acelerado que é $v = v_0 + gt$, e no nosso caso $v_0 = 0$, temos:

$$l = bmgt \qquad [8\text{-}34]$$

Vemos que o vetor $\vec{l}$ tem a mesma direção do vetor $\vec{\tau}$. Mas observando [8-34] vemos que contrariamente ao torque que é constante, o momento angular varia com o tempo. Na verdade é proporcional ao tempo, sendo o módulo do torque o coeficiente de proporcionalidade.

c) Projetando a equação $\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}$ no eixo vertical (que é a direção de $\vec{\tau}$ e de $\frac{d\vec{l}}{dt}$) temos:

$$\tau = \frac{dl}{dt} \qquad [8\text{-}35]$$

(Vendo a Fig. [8-19] vemos que $\tau_y = -\tau$ e $\frac{dl_y}{dt} = -\frac{dl}{dt}$ donde [8-35]). Usando as expressões obtidas de τ e de l em a) e b) temos:

$$\frac{d}{dt}(mgbt) = mgb \qquad [8\text{-}34]$$

O fato de termos chegado em [8-32] à uma identidade tendo partido de [8-34] mostra a correção de [8-34].

Se em

$$\frac{d}{dt}(mgbt) = mgb$$

cancelarmos *b* (que como constante que é sai da derivada) ficamos

$$\frac{d}{dt}(mgt) = mg$$

Como $v = gt$, e como $mg = F$ temos:

$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

ou seja

$$F = \frac{dp}{dt} \quad [8\text{-}35]$$

O que fizemos? Partimos de $\tau = \dfrac{dl}{dt}$ e chegamos a $F = \dfrac{dp}{dt}$. Vemos assim mais luma vez, o que já havíamos observado acima, ou seja, que as fórmulas da dinâmica rotacional, nada mais são que uma reformulação da dinâmica que estudamos na parte intermediária de nosso curso. Esta reformulação, mais do que útil, em muitos casos absolutamente necessária, não constitui, porém novos postulados básicos da Mecânica Clássica. Discutiremos ainda de forma mais geral este ponto em nossas conclusões deste capítulo.

Vamos agora considerar o momento angular $\vec{L}$ de um sistema de partículas, com relação a um dado ponto. Para tanto, temos que adicionar vetorialmente o momento angular de cada partícula em relação a este mesmo ponto. Podemos escrever então:

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \ldots + \vec{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i \quad [8\text{-}36]$$

Temos até agora colocado o ponto com relação ao qual definimos o momento angular, como sendo a origem de um sistema inercial. Adiante veremos outras situações. Mas mesmo sendo a origem de um sistema inercial o ponto de referência com relação ao qual definimos o momento angular, vimos que este pode variar com o tempo. Para uma partícula mostramos que $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{l}}{dt}$. Vamos considerar agora a variação do momento angular de um sistema de muitas partículas. Tendo em vista nossa definição [8-36] vemos que a variação do momento angular total L exprime a variação do momento angular de cada partícula do sistema de partículas. Cada partícula tem sua variação devida ao torque sobre ela exercido. Mas agora este torque tem duas origens: pode ser o torque de uma força interna ao sistema ou externa. Força interna é aquela que provém da interação da partícula com outra partícula do sistema. Mas pela terceira lei de Newton estas forças se dão em pares de ação e reação, que são iguais em módulo e de direção contrária. Os respectivos torques também são iguais mais de direções contrárias (Ver Fig. [8-20]).

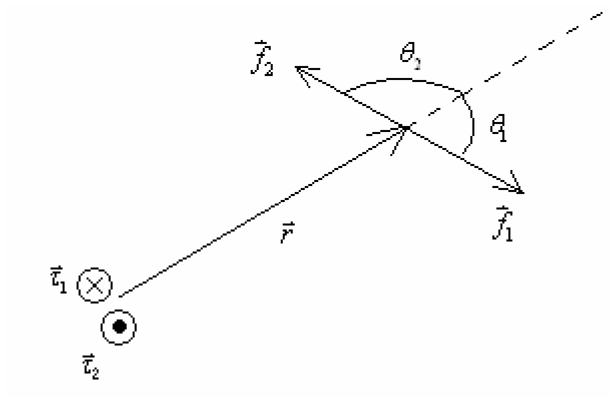


Fig. [8-20]

$\vec{\tau}_1 = \vec{r} \times \vec{f}_1$ [8-37]

Cujo módulo é

$\tau_1 = rf_1 sen\theta_1$

Enquanto

$\vec{\tau}_2 = \vec{r} \times \vec{f}_2$ e $\tau_2 = rf_2 sen\theta_2$ [8-38]

Como $sen\theta_1 = sen\theta_2$ vemos que

$\tau_1 = \tau_2$

Mas pela regra do sacar rolhas $\vec{\tau}_2$ é perpendicular à página do desenho e sai da página na direção do leitor, enquanto $\vec{\tau}_1$ também é perpendicular à página, mas entra na página. Então $\vec{\tau}_1 = -\vec{\tau}_2$ e temos

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{0} \quad [8\text{-}39]$$

A equação [8-39] mostra que todos os torques internos se anulam mutuamente. Então levando em conta que o torque no sistema de partículas é a soma vetorial dos torques em cada partícula, temos, inicialmente para uma partícula

$$\vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{i\,\mathrm{int}} + \vec{\tau}_{i\,ext}$$

Então

$$\vec{\tau}_{i\,\mathrm{int}} + \vec{\tau}_{i\,ext} = \frac{d\vec{l}_i}{dt}$$

Fazendo agora a soma para todas as partículas e chamando

$$\vec{\tau}_{\mathrm{int}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{i\,\mathrm{int}} \quad \text{e} \quad \vec{\tau}_{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{i\,ext} \quad \text{temos}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\tau}_{i\,\mathrm{int}} + \vec{\tau}_{i\,ext} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{l}_i}{dt} \quad [8\text{-}40]$$

Pela propriedade da derivada da soma:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\tau}_{i\,\mathrm{int}} + \vec{\tau}_{i\,ext} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i \quad [8\text{-}41]$$

Mas já mostramos que $\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{i\,\text{int}} = \vec{0}$ (a soma dos torques provindos das forças internas em um sistema de partícula é nulo), ao mesmo tempo usando [8-36] a equação [8-41] fica

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad [8\text{-}42]$$

A importante relação [8-42] pode ser traduzida cursivamente como:

"A derivada em relação ao tempo do momento angular total de um sistema de partículas em relação à origem de um referencial inercial, é igual à soma dos torques externos que atuam no sistema."

A equação [8-42] é válida para um sistema de partículas quer elas estejam em movimento umas em relação às outras, quer elas mantenham relações espaciais fixas, o que caracteriza um corpo rígido. Esta equação é análoga à outra que vimos na Aula 7 qual seja

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

a qual exprime que a força externa que atua em um sistema de partículas é igual à taxa de variação do momento linear do sistema.

Deduzimos a equação [8-42] considerando tanto os torques quanto os momentos angulares com relação à origem de um sistema de referência inercial. Podemos, porém nos perguntar se [8-42] continuaria válida se tomássemos torques e momentos angulares em relação à um ponto que não fosse fixo à um sistema inercial. Por exemplo, uma partícula qualquer do próprio sistema de partículas, a qual como estamos vendo não é imóvel em relação à um sistema inercial pois executa uma complicada soma de movimentos de rotação e translação. Com relação a este ponto [8-42] não é válida. Porém:

"Se o ponto de referência for o Centro de Massa do sistema de partículas então [8-42], ou seja a equação $\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$*, continua valendo (mesmo que o* ***CM*** *não esteja imóvel em um sistema de referência inercial)".*

Esta importantíssima propriedade do *CM* que não vamos demonstrar aqui (ver referência 2 de nossa bibliografia desta aula) é que permite separar o movimento geral de um sistema de partículas em um movimento geral de seu centro de massa, dado por $\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, e um movimento de rotação em torno do seu centro de massas dado pela equação $\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, onde o ponto de referência do torque total e do momento angular do sistema é o centro de massa.

Energia cinética de rotação e momento de inércia

Vamos nos concentrar neste tópico ao estudo do movimento de rotação de um corpo rígido, que pode ser definido como um sistema de partículas que mantêm sempre as mesmas distâncias, cada uma em relação à todas as outras. Para especificar a rotação de um corpo rígido temos que caracterizar um eixo de rotação. Vamos então iniciar nosso estudo, tomando a rotação do corpo rígido em torno de um eixo fixo em um sistema de referência inercial. Mesmo se tomarmos esta condição bastante restritiva, para início de nosso estudo, pelo que acabamos de ver no tópico anterior, nossos resultados vão ser válidos para um eixo não fixo à um sistema de coordenadas inercial, mas para um eixo que passe pelo *CM* de nosso sistema e que mantenha uma direção constante ao longo do tempo (quer dizer, que mesmo sofrendo uma translação ao longo do tempo, mantenha-se sempre paralelo a si mesmo).

Seja então um corpo rígido girando com velocidade angular ω em torno de um eixo fixo à um referencial inercial (Ver Fig. [8-21]). Neste caso, cada partícula deste corpo tem uma determinada energia cinética. Seja uma partícula de massa m à uma distância r do eixo de rotação. Ela descreve então uma circunferência de raio r, e como a velocidade angular do corpo é ω, sua velocidade linear é $v = \omega r$. Sendo sua energia cinética $\frac{1}{2}mv^2$ então ela é em termos de velocidade angular de rotação $\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Então a energia cinética total do corpo devido ao seu movimento de rotação é

$$K = \frac{1}{2}(m_1 r_1 + m_2 r_2 + \ldots)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i\right)\omega^2 \quad [8\text{-}43]$$

onde pusemos em evidência ω que é comum a todas as partículas.

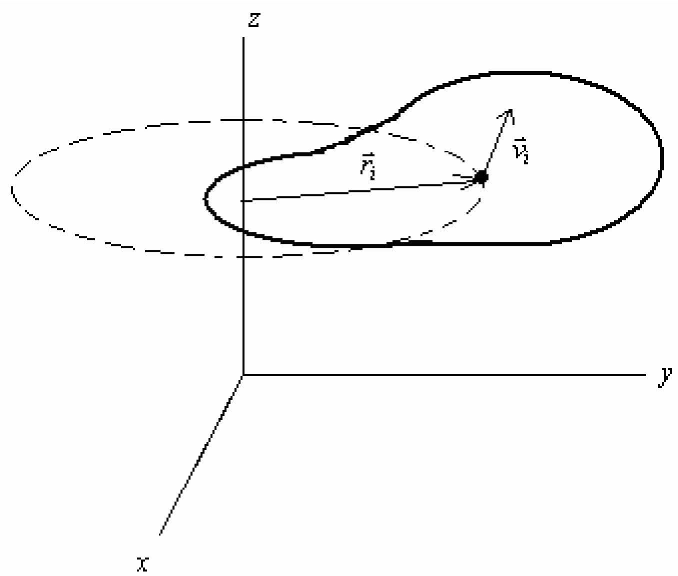


Fig. [8-21]

O produto $m_i r_i^2$ que é o produto da massa de cada partícula pela sua distância ao eixo de rotação ao quadrado, quando somado para todas as partículas é uma grandeza inerente ao corpo em rotação. Esta grandeza é representada por *I* e chama-se momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação considerado.

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad [8\text{-}44]$$

O momento de inércia depende do eixo em que está girando, o corpo e da distribuição de sua massa em relação ao eixo de rotação. Tem dimensão ML^2 e é expresso em termos de $kg.m^2$ (no *S I*).

Da expressão [8-44] vemos que a energia cinética devida ao movimento de rotação é:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad [8\text{-}45]$$

Comparando com a energia cinética de translação de um corpo que é $\frac{1}{2}Mv^2$, vemos que o momento de inércia *I* no movimento de rotação, faz o papel da massa no movimento translacional. Observemos que a energia cinética dada pela equação [8-45] não é uma nova forma de energia. É somente uma forma cômoda e conveniente de expressar a energia cinética de um corpo em rotação. De fato vimos que chegamos a esta expressão de energia cinética, somando a energia cinética $\frac{1}{2}m_i v_i^{\ 2}$ de cada partícula, e depois relacionando a velocidade translacional v_i de cada partícula com sua velocidade angular ($v = \omega r$).

Exemplo 2

Seja um corpo constituído de duas massas esféricas de 5,0 kg cada uma, ligadas por uma barra rígida, de massa desprezível e 1,0 m de comprimento (Ver Fig. [8-22]).

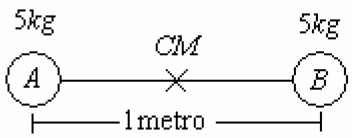


Fig. [8-22]

Determinar o momento de inércia do corpo: a) em relação a um eixo perpendicular à barra e passando pelo *CM* do sistema; b) em relação a um eixo perpendicular à barra e que passe por uma das esferas.

Solução:

a) $I_{CM} = \sum m_i r_i^{\ 2} = m_A r_A^{\ 2} + m_B r_B^{\ 2} = 5{,}0kg \cdot (0{,}5m)^2 + 5{,}0kg \cdot (0{,}5m)^2 = 2{,}5kg \cdot m^2$

b) $I_{CM} = 5{,}0kg \cdot (0{,}0m)^2 + 5{,}0kg \cdot (1{,}0m)^2 = 5kg \cdot m^2$

Vemos que no caso b) de um eixo perpendicular à barra mas passando por uma das massas, o momento de inércia é o dobro daquele de um eixo perpendicular à barra mas passando pelo *CM* do sistema.

Cálculo do momento de inércia de corpos rígidos

A passagem das fórmulas que dão o momento da inércia de um sistema de partículas para de um corpo rígido contínuo, é em tudo análoga à mesma passagem de um sistema de partículas para um corpo rígido contínuo que fizemos no caso do cálculo do centro de massa. Da mesma maneira que fizemos naquele caso, do cálculo do *CM*, também aqui vamos dividir o corpo em porções infinitesimais e tratarmos cada uma destas porções como uma partícula. No limite da soma destas divisões quando o número de divisões tende a infinito, esta soma é o momento de inércia do corpo. Passamos assim de $\sum m_i r_i^2$ para $\int r^2 dm$.

Tal como mostramos no estudo do cálculo do *CM* de corpos contínuos, podemos considerar corpos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, e as densidades pontuais destes corpos são dadas por $\lambda = \dfrac{dm}{dx}$ (para um corpo unidimensional-densidade linear), $\sigma = \dfrac{dm}{dA}$ (para um corpo bidimensional-densidade de superfície) e $\rho = \dfrac{dm}{dV}$ (para um corpo tridimensional-densidade volumétrica).

Vejamos em alguns exemplos como calcular, e como formular a integral $\int r^2 dm$.

Exemplo 3

Calcular o momento de inércia de uma vareta homogênea de comprimento L e massa M em relação à um eixo perpendicular ao eixo da vareta e que passa por uma de suas extremidades. Tratar a vareta como um corpo unidimensional. Isto significa que a única dimensão relevante é o comprimento da vareta.

Solução:

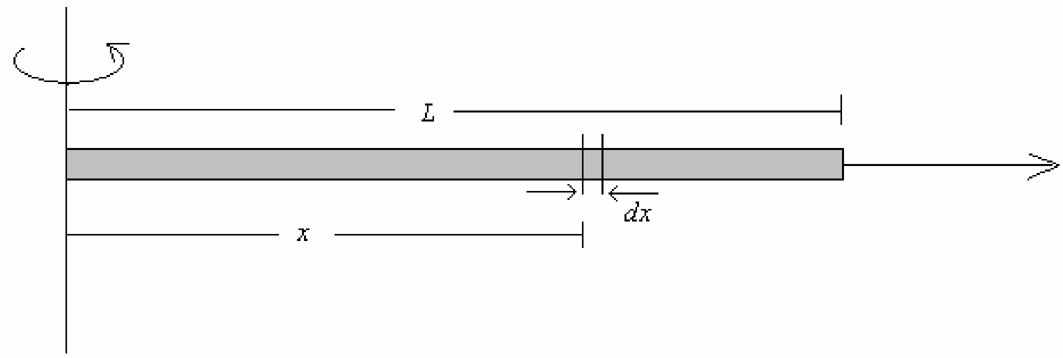


Fig. [8-23]

$$I = \int r^2 dm$$

Nosso problema é escrever esta integral no caso do nosso problema. Tomando o eixo x ao longo da vareta, e sendo nosso problema unidimensional ficamos com:

$$I = \int x^2 dm$$

Lembrando que a densidade linear é dada por $\lambda = \dfrac{dm}{dx}$, escrevemos $dm = \lambda dx$. Ao mesmo tempo a vareta é homogênea, então λ é constante e vale: $\lambda = \dfrac{M}{L}$. Logo

$I = \int x^2 \lambda dx = \lambda \int x^2 dx$, porque λ é constante.

Integrando e substituindo o valor de λ ficamos:

$$I = \frac{M}{L}\left[\left. \frac{x^3}{3} \right|_0^L \right] = \frac{M}{L}\frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

A resposta é portanto

$$I = \frac{ML^2}{3}$$

Exemplo 4

Achar o momento de inércia *(MI)* de um aro circular em relação à um eixo perpendicular a seu plano, passando pelo próprio centro. O aro é homogêneo.

Solução:

Trata-se novamente de um corpo unidimensional.

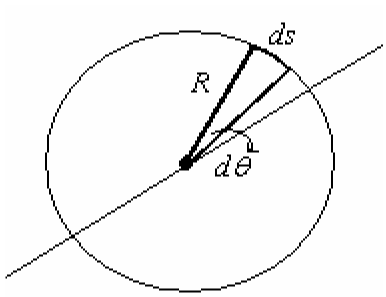


Fig. [8-24]

$$I = \int r^2 dm$$

A variável *r*, é a distância de cada ponto do corpo do eixo de rotação. No nosso caso esta distância é R e é uma constante. A densidade linear, por sua vez e $\lambda = \dfrac{dm}{ds}$, onde no caso ds é o infinitésimo do comprimento, e vale (ver Fig. [8-24]) $ds = Rd\theta$. Então

$$I = \int_0^{2\pi} R^2 \lambda R d\theta = R^3 \lambda \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\lambda R^3 \qquad [8\text{-}46]$$

Mas λ é uma densidade constante e então é

$$\lambda = \frac{M}{2\pi R} \qquad [8\text{-}47]$$

(No caso de uma densidade constante, ela é a massa total *M* dividida pelo comprimento total $2\pi R$). Substituindo em [8-46] ficamos:

$$I = 2\pi\lambda R^3 = 2\pi \frac{M}{2\pi R} R^3 = MR^2$$

A resposta é

$$I = MR^2$$

Podemos, neste caso simples, usar um truque esperto.

Temos

$$I = \int r^2 dm$$

Como r = R = const., temos

$$I = R^2 \int dm$$

Mas $\int dm$ é a soma, em toda extensão do corpo, de todos os elementos infinitesimais de massa. Então é a massa total M. Ficamos assim com:

$$I = R^2 M$$

Exemplo 5

Achar o momento de inércia de um disco homogêneo em relação a um eixo perpendicular ao seu plano e passando pelo próprio centro.

Solução:

Trata-se agora de um corpo bidimensional.

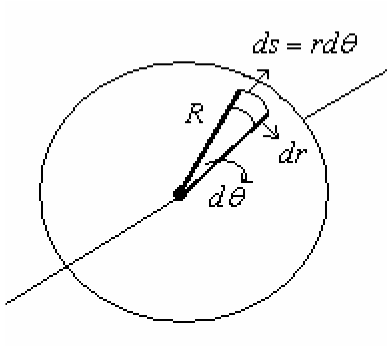


Fig. [8-25]

Então $\sigma = \dfrac{dm}{dA}$. Donde

$$dm = \sigma\, dA\,.$$

Temos que escrever o elemento da área *dA*. Vimos na Fig. [8-25] que

$$dA = dr\, ds,$$

onde

$$ds = rd\theta$$

Então a integral $I = \int r^2 dm$ fica

$$I = \iint r^2 \sigma\, dr\, r\, d\theta$$

$$I = \iint r^3 \sigma\, dr\, d\theta$$

$$I = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

onde $\sigma = \dfrac{M}{\pi R^2}$

$$I = \frac{M}{\pi R^2}\left[\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R\right] 2\pi$$

$$I = \frac{M}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}2\pi$$

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

Exemplo 6

Calcular o momento de inércia de uma esfera maciça de raio R e massa M com relação a um seu diâmetro (Ou seja um eixo de rotação que passe pelo seu centro esfera homogênea).

Solução:

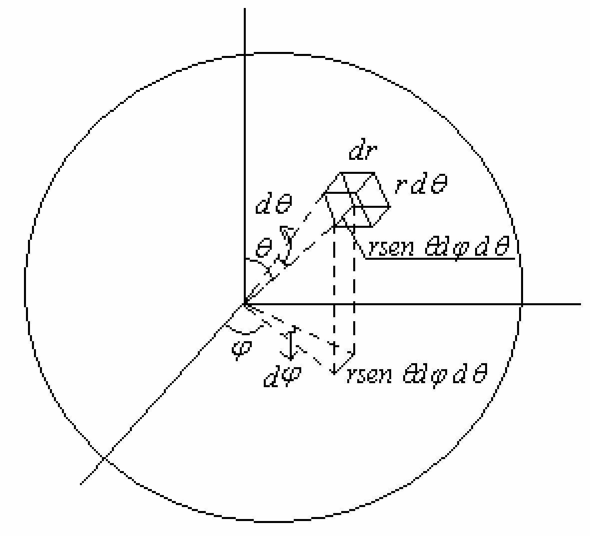


Fig. [8-26]

Lembremos que na sétima aula tínhamos mostrado geometricamente que o elemento de volume em coordenadas esféricas é: $dV = r^2 sen\theta d\varphi\, d\theta\, dr$. Na Fig. [8-26] recordamos a construção geométrica do elemento de volume dv. Temos três lados infinitesimais que são: dr, $rd\theta$ e $rsen\theta\, d\varphi$. Então:

$$dv = r^2 sen\theta d\varphi\, d\theta\, dr \qquad [8\text{-}48]$$

Tínhamos mostrado que o momento de inércia para um sistema de partículas era definido por

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad [8\text{-}44]$$

passava a ser

$$I = \int r^2 dm \qquad [8\text{-}49]$$

Lembremos que a variável r_i que aparece em [8-44] e que depois se transforma na variável continuar *r* em [8-49] é "a distância ao eixo de rotação" (Recordar a dedução de [8-44]). Ora, a variável *r* de um sistema de coordenadas esféricas, não é, no caso do cálculo do momento de inércia de uma esfera maciça com relação a um seu diâmetro, a mesma variável *r* das fórmulas [8-44] e [8-49], pois é a distância à origem do sistema de coordenadas. O *r* que comparece nas fórmulas [8-44] e [8-49] é, no caso em que situamos a esfera (Fig. [8-26]) a distância ao eixo *Z* (Observar que colocamos a esfera com o centro coincidindo com o centro do sistema de coordenadas, e estamos calculando o momento de inércia da esfera quando ela gira em torno do eixo *Z*).

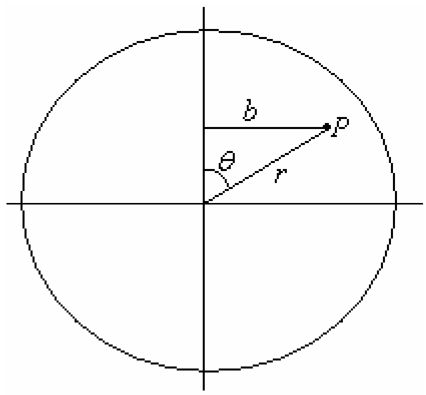


Fig. [8-27]

Desenhando um corte da esfera pelo plano *YZ*, obtemos o círculo da Fig. [8-27]. Nesta figura colocamos o *r*, como a coordenada do sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) e chamamos *b* a distância do elemento de volume, ao eixo de rotação *Z*. Então, para evitar confusões entre a distância ao eixo de rotação e a variável *r* do sistema de coordenadas esféricas, convém escrever a fórmula [8-49], para este nosso caso, como:

$$I = \int b^2 dm \qquad [8\text{-}50]$$

Em seguida, procedendo como nos demais exemplos:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV$$

e então,

$$I = \int b^2 \rho dV$$

Como a esfera é homogênea e é constante, $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ ou seja, $\rho = \dfrac{3M}{4\pi R^3}$, e lembrando o valor de dV, equação [8-48], temos

$$I = \frac{3M}{4\pi R^3} \int b^2 r^2 sen\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

Resta agora escrever a variável *b* em termos das variáveis do sistema de coordenadas esféricas. Na Fig. [8-27] vemos que

$$b = rsen\theta \qquad [8\text{-}51]$$

Levando em conta este valor, a integral em [8-50] fica

$$I = \frac{3M}{4\pi R^2} \int r^2 sen^2\theta \, r^2 sen\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$I = \frac{3M}{4\pi R^3} \underbrace{\int_0^R r^4 dr}_{I_1} \underbrace{\int_0^\pi sen^3\theta \;\, d\theta}_{I_2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{I_3} \qquad [8\text{-}52]$$

Cálculo de I_1

$$I_1 = \int_0^R r^4 dr = \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R = \frac{R^5}{5}$$

Cálculo de I_2

$$I_2 = \int_0^\pi sen^3\theta \ d\theta = \int_0^\pi sen\theta \, sen^2\theta \ d\theta = \int_0^\pi \left(1 - cos^2\theta\right) sen\theta \, d\theta$$

Fazendo a seguinte mudança de variável

$$y = cos\theta$$
$$dy = -sen\theta \, d\theta$$

E lembrando que quando $\theta = 0$, $y = 1$, e quando $\theta = \pi$, $y = -1$ ficamos:

$$I_2 = \int_1^{-1} \left(1 - y^2\right)(-dy) = \int_1^{-1} \left(y^2 - 1\right) dy$$

$$I_2 = \int_1^{-1} y^2 dy - \int_1^{-1} dy$$

$$I_2 = \left.\frac{y^3}{3}\right|_1^{-1} - \left.y\right|_1^{-1}$$

$$I_2 = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - 1\right)$$

$$I_2 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{-2+6}{3} = \frac{4}{3}$$

Então $I_2 = \dfrac{4}{3}$ e $I_3 = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$.

Substituindo estes valores em [8-51], ficamos

$$I = \frac{3M}{4\pi R^2} \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} 2\pi$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Teorema dos eixos paralelos

O teorema dos eixos paralelos, relaciona o momento de inércia de um corpo que gira em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa, com o momento de inércia do mesmo corpo girando em torno de um eixo paralelo ao primeiro. Seja I_{CM} o momento de inércia em relação à um eixo que passa pelo centro de massa de um corpo de massa M. Seja I o momento de inércia em relação à um outro eixo paralelo ao primeiro e a uma certa distância h do mesmo. Pelo teorema dos eixos paralelos temos

$$I = I_{CM} + Mh^2 \qquad [8\text{-}53]$$

Demonstração:

Já mencionamos, quando introduzimos o conceito de ponto material, que podemos analisar o movimento de um corpo, separando este movimento em um movimento de translação do corpo como um todo, através do movimento de translação do seu centro de massa, e outro movimento de rotação (em torno de um eixo fixo).

Então a energia cinética do corpo será a soma de sua energia cinética de translação, mais a energia cinética de rotação. Vamos discutir com mais vagar este resultado na 9ª aula. Podemos porém adiantar aqui, que se o centro de massa de um corpo tem um movimento de translação e ao mesmo tempo o corpo tem um movimento de rotação em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa, então:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + K_{rel} \qquad [8\text{-}54]$$

Onde $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ é a energia cinética devido ao movimento do centro de massa (v_{CM} é a velocidade do CM) e K_{rel} é a energia cinética de rotação do corpo em torno de seu centro de massa.

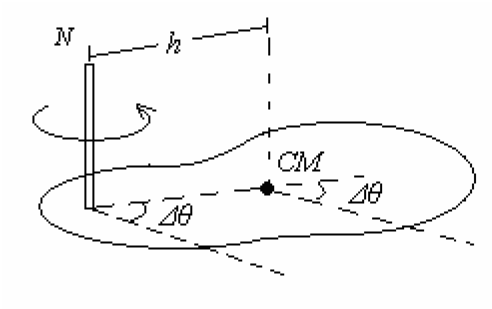


Fig. [8-28]

Na Fig. [8-28] representamos um corpo girando com velocidade angular ω em torno de um eixo, que está a uma distancia *h* de outro eixo paralelo, mas passando pelo centro de massa. Quando o corpo gira de um ângulo $\Delta\theta$ em torno de seu eixo de rotação, ele gira do mesmo ângulo $\Delta\theta$, em torno de qualquer eixo paralelo. Portanto gira também do ângulo $\Delta\theta$ em torno de um eixo paralelo que passa pelo seu centro de massa. Este resultado está mostrado na Fig. [8-53], onde vemos que os dois $\Delta\theta$ indicados são iguais, pois se trata de duas paralelas cortadas por uma transversal. O movimento de rotação em torno do eixo que passa pelo seu centro de massa tem a mesma velocidade angular, que o movimento de rotação em torno do eixo situado à uma distancia *h* do eixo que passa pelo centro de massa (eixo *N*). A energia cinética do movimento de rotação em torno do eixo que passa pelo centro de massa, K_{rel}, é:

$$K_{rel} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 .$$

A velocidade do centro de massa em relação ao eixo *N* é $v_{CM} = h\omega$ (como se pode ver na Fig. [8-52] então a energia cinética do centro de massa é

$$\frac{1}{2} M v_{CM}^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 h^2 ,$$

e a equação [8-54] fica

$$K = \frac{1}{2} M \omega^2 h^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \qquad [8\text{-}55]$$

A expressão [8-54] é a energia cinética do corpo em questão. Visto porém com relação ao eixo *N* este mesmo movimento, é um puro movimento de rotação em torno do eixo *N*.

Então a energia cinética, quando calculada como um movimento de rotação em torno do eixo *N* é dada por:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad [8\text{-}56]$$

onde *I* é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo *N*. Mas a energia cinética de um corpo é a mesma independentemente da maneira como descrevemos o seu movimento, portanto o *K* em [8-55] é o mesmo *K* de [8-56], e podemos escrever:

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} M\omega^2 h^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2$$

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = \left(\frac{1}{2} Mh^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\right)\omega^2$$

Donde:

$$I = Mh^2 + I_{CM}$$

que é o teorema dos eixos paralelos.

Algumas vezes é possível simplificar cálculos do momento de inércia usando o teorema dos eixos paralelos.

Exemplo 7.

Calcule o momento de inércia de uma vareta homogênea em relação ao eixo *y'* que passa pelo seu centro de massa.

Solução: Seja L o comprimento da vareta e M sua massa, já vimos que o momento de inércia com relação á extremidade da vareta é $I = \frac{ML^2}{3}$. A distancia entre a extremidade e o centro de massa é $L/2$ (vareta homogênea).

Então, pelo teorema dos eixos paralelos

$$I = I_{CM} + Mh^2$$

Temos:

$$I_{CM} = I - Mh^2 = I - M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_{CM} = \frac{1}{3}ML^2 - \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{12}ML^2$$

CONCLUSÃO

Um resultado conceitual importante desta aula é aquele em que mostramos que um deslocamento angular no espaço (uma rotação $\Delta\theta$), não pode ser tratado como vetor. Isto nos leva à consideração de que, embora a matemática tenha sua inspiração e encontre sua origem no mundo físico, ela, na medida em que abstrai e idealiza elementos no mundo físico, na medida em que se constrói dentro de uma sistemática de axiomatização, na medida em que cria suas regras de inferência (a lógica matemática), vai se construindo de uma forma autônoma do mundo físico. É claro que ela é a linguagem da física, a qual é em essência a possibilidade de descrever, e de estudar o mundo físico com a matemática. Mas é preciso examinar com cuidado, que parte da matemática podemos usar em uma teoria física que descreve uma situação ou aborde uma categoria de problemas. Vimos que foi possível descrever as variáveis cinemáticas rotacionais, velocidade angular e aceleração angular, por meio de vetores, mas ao mesmo tempo um deslocamento angular $\Delta\theta$, não pode ser tratado como vetor. Há portanto uma grandeza do mundo físico, que não pode ser descrita usando a aparelhagem do calculo vetorial.

É claro, e é isto que temos visto e enfatizado neste curso, que há uma imediata correspondência entre a mecânica e o calculo integral e diferencial. Mas neste caso isto era de se esperar, pois, em boa parte, o desenvolvimento do cálculo integral e diferencial que Newton realizou, foi com o objetivo de formular sua teoria da mecânica e da gravitação, mas nem sempre isto é assim e o físico às vezes tem que escolher áreas da matemática, já previamente desenvolvidas, para usar em suas teorias.

Outro ponto de interesse desta aula, foi a possibilidade de conceituação de grandezas rotacionais, tanto cinemáticas (velocidade e aceleração angulares) quanto dinâmicas (momento de inércia, e momento angular, torque) que nos permitiram o estabelecimento de equações para descrever os movimentos rotacionais, análogos as equações da cinemática e dinâmica lineares.

RESUMO

Vamos resumir as formulas desta aula em, uma tabela, que mostra ao mesmo tempo a analogia entre as formulas da cinemática e dinâmica rotacional e as da cinemática e dinâmica linear.

	Movimento de rotação		Movimento linear
Deslocamento angular	$\Delta\theta$	Deslocamento	Δx
Velocidade angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	Velocidade	$v = \frac{dx}{dt}$
Aceleração angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	Aceleração	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
Equações de movimento com aceleração angular constante	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	Equações de movimento com aceleração constante	$v = v_0 + at$
	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$		$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$		$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$
Torque	τ	Força	F
Momento de inércia	I	Massa	M
Energia cinética	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$	Energia cinética	$K = \frac{1}{2}Mv^2$
Segunda lei de Newton	$\tau_{res} = I\alpha = \frac{dl}{dt}$	Segunda lei de Newton	$F_{res} = ma = \frac{dp}{dt}$

ATIVIDADE

A-Questionário

1) Compare as dimensões das variáveis cinemáticas rotacionais θ, ω e α, com as correspondentes lineares *x, v e a.*

2) Deduza, por integração, a equação da velocidade angular $\omega = \omega(t)$ e do deslocamento angular $\theta = \theta(t)$ para o caso do movimento com aceleração angular constante α, e condições iniciais $\theta(t=0) = \theta_0$ e $\omega(t=0) = \omega_0$

3) Em que condição podemos tratar as grandezas cinemáticas rotacionais ω e α como escalares? Faça a analogia com as grandezas cinemáticas lineares.

4) Explique porque o deslocamento angular θ não pode ser tratado como vetor (Apenas diga suas conclusões, não precisa fazer nenhum desenho das rotações no espaço tridimensional; mas verifique por você mesmo, com a ajuda de um objeto, por exemplo, um livro, o que está desenhado no texto).

5) Explique como, apesar do problema levantado na quarta questão, é possível definir $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$ (vetores) .

6) Defina torque. (mostrando em um desenho o vetor resultante).

7) Defina momento angular. (também desenhando os elementos de sua definição).

8) Deduza, a partir da 2ª lei de Newton, a 2ª lei de Newton rotacional, qual seja $\vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}$.

9) Deduza novamente a 2ª lei de Newton na forma rotacional, considerando um sistema de partículas (ou um corpo rígido).

10) Defina momento de inércia e energia cinética de rotação.

11) Defina momento de inércia de corpos contínuos e explique como se dá a passagem da definição do momento de inércia de um sistema de partículas, para a definição do momento de inércia no caso de um corpo continuo.

12) Enuncie e demonstre o teorema dos eixos paralelos.

13) Calcule o momento de inércia de um cilindro maciço homogêneo de massa *M*, raio *R* e comprimento *L*, com relação á um eixo perpendicular ao eixo do cilindro passando pelo ponto de centro de massa.

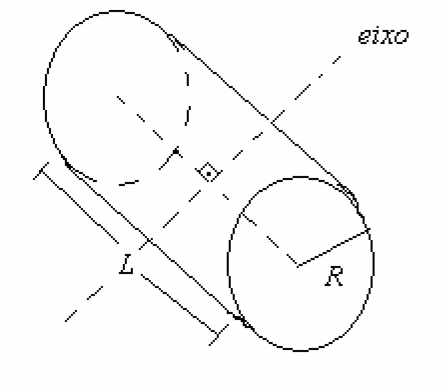
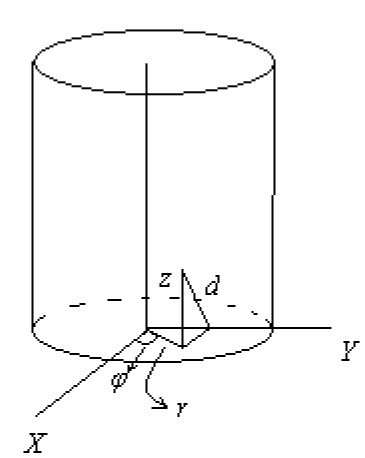


Fig. [8-29]

Sugestão: calcule inicialmente em relação à um eixo passando pelo diâmetro de uma das bordas circulares do cilindro. (ver Fig. [8-29]) calcule o momento de inércia com relação ao eixo *y*, em termos das coordenadas cilíndricas r, θ e *z*. (verificar que o elemento de volume em coordenadas cilíndricas é $rdrd\phi dz$). Em seguida usar o teorema dos eixos paralelos para resolver o problema pedido.



Resposta: $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$

14) Achar o momento de inércia de um cilindro oco com relação a seu eixo. (raio externo R_2, raio interno R_1) dada ainda a massa *M* do cilindrio.

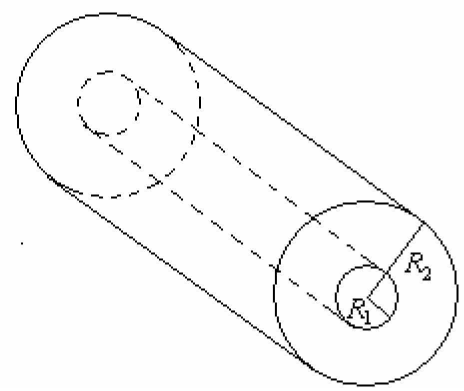


Fig. [8-30]

Resposta: $I = \frac{1}{2} M\left(R_1^2 + R_2^2\right)$

B-Problemas

1 - Uma roda parte do repouso com a aceleração angular constante de 2,6 rad/s^2 e rola durante 6 s. No final deste intervalo de tempo, *(a)* qual a velocidade angular? *(b)* Qual o ângulo varrido na rotação da roda? (c) Quantas voltas fez a roda? *(d)* Qual a velocidade e qual a aceleração de um ponto a 0,3 m de distância do eixo da roda?

2 - Uma roda gigante, com 12 m de raio, dá uma volta em 27 s. *(a)* Qual a velocidade angular em radianos por segundo? *(b)* Qual a velocidade linear de um passageiro da roda? (c) Qual a aceleração centrípeta do passageiro?

3 - O comprimento de uma fita de vídeo VHS é L = 246 m e a fita toca durante t= 2,0 h (Fig. [8-31]). Na partida, o raio externo do rolo de fita é cerca de R = 45 mm e o interno de r = 12 mm. Num certo instante, os dois discos têm a mesma velocidade angular. Calcular esta velocidade angular em rad/s e em rev/ min.

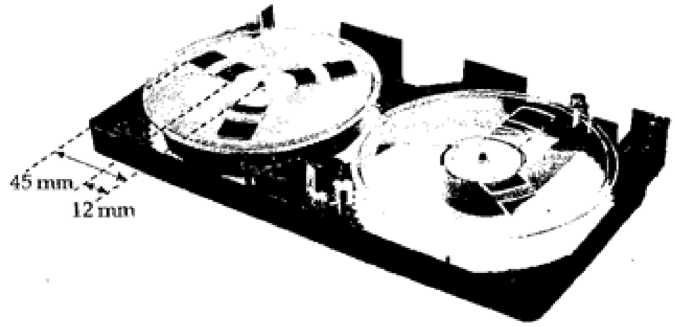


Fig. [8-31]

4 - Um cilindro de 2,5 kg e raio de 11 cm está inicialmente em repouso. Uma corda de massa desprezível está enrolada no cilindro e é puxada com a força constante de 17 N. Calcular *(a)* o torque exercido pela corda, *(b)* a aceleração angular do cilindro e (c) a velocidade angular do cilindro em $t = 5$ s.

5 - Uma barra homogênea, de massa M e comprimento L, pode girar, sem atrito, em torno de um eixo que passa por uma das suas extremidades e está na vertical, como na Fig. [8-32]. A barra é atingida por uma força F_0, durante pequeno intervalo de tempo Δt, num ponto à distância x do eixo. *(a)* Mostrar que a velocidade do centro de massa da barra, imediatamente depois do golpe, é dada por $v_a = 3F_0 x\ \Delta t / 2ML$. *(b)* Calcular a força exercida pelo eixo sobre a barra e mostrar que esta força é nula quando x = 2L/3. {*Observação:* O ponto x = 2L/3 é o *centro de percussão* da barra.)

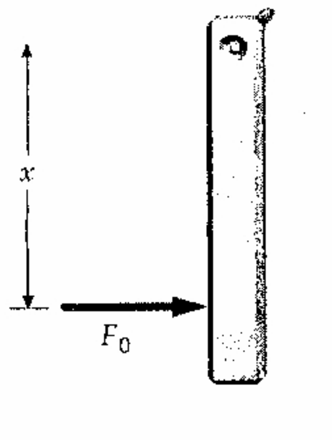


Fig. [8-32]

6 - Quatro corpos estão localizados nos vértices de um quadrado com lado L = 2 m e ligados por hastes de massa desprezível (Fig. [8- 33]). As massas dos corpos são $m_2 = m_3 = 3\ kg$ *e* $m_2 = m_4 = 4\ kg$. Calcular o momento de inércia do sistema em torno do eixo dos z.

7 - Com o teorema dos eixos paralelos e com a resposta do Problema 6, calcular o momento de inércia do sistema esquematizado na Fig. [8- 33]. em torno de um eixo perpendicular ao plano do quadrado e que passa pelo centro de massa do sistema. Verifique o resultado obtido por um cálculo direto.

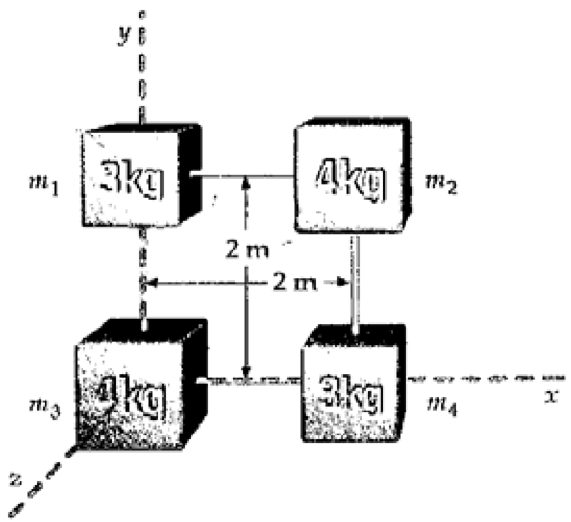


Fig. [8-33]

8 - As partículas esquematizadas na Fig. [8-34] estão ligadas por hastes muito leves que têm momentos de inércia desprezíveis. As partículas giram com a velocidade angular $\omega = 2$ rad/s em torno do eixo dos *y*. *(a)* Calcular a velocidade de cada partícula e depois a energia cinética do sistema pelo somatório $\sum \frac{m_i v_i^2}{2}$. *(b)* Calcular o momento de inércia em relação ao eixo dos *y* e a energia cinética pela fórmula $K = \frac{I\omega^2}{2}$.

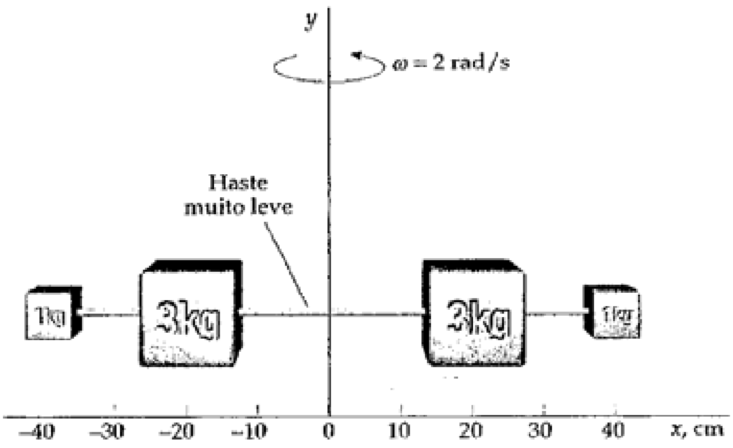


Fig. [8-34]

9 - Um corpo de 4 kg está sobre uma superfície horizontal sem atrito, preso a um cordel que passa por uma polia e no qual se pendura um outro corpo de 2 kg (Fig. [8-35]). A polia é um disco homogêneo, com raio de 8 cm e massa de 0,6 kg. *(a)* Calcular a velocidade do corpo de 2 kg ao cair 2,5 m a partir do repouso, *(b)* Qual a velocidade angular da polia no instante correspondente à queda de 2,5 m?

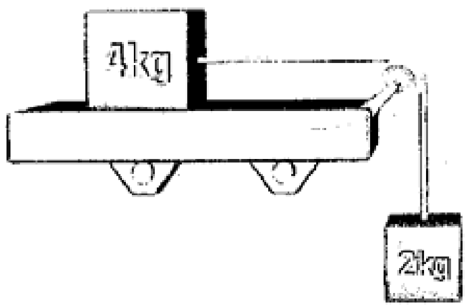


Fig. [8-35]

10 - No sistema esquematizado na Fig. [8-36], os dois corpos estão inicialmente em repouso. O corpo de 30 kg está 2 m acima da superfície do suporte horizontal. A polia é um disco homogêneo, com raio de 10 cm e massa de 5 kg. Calcular (í?) a velocidade do corpo de 30 kg ao colidir com o suporte horizontal, *(b)* a velocidade da polia no instante desta colisão, (c) as tensões nos dois ramos do cabo e *(d)* o tempo de queda do bloco de 30 kg até o suporte. Admitir que não haja escorregamento do cabo na polia.

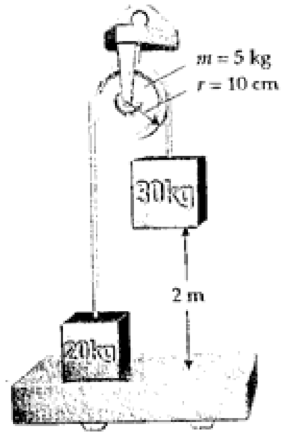


Fig. [8-36]

11 - Os dois corpos de uma máquina de Atwood têm as massas $m_1 = 500\ g$ e $m_2 = 510\ g$, respectivamente, e estão ligados por um fio de massa desprezível que passa por uma roldana sem atrito (Fig. [8- 37]). A roldana é um disco homogêneo de 50 g de massa e 4 cm de raio. Não há escorregamento do fio sobre a roldana. (a) Calcular a aceleração dos dois corpos, *(b)* Qual a tensão no ramo do fio que suporta a massa m_1? E no ramo que suporta m_2? Qual a diferença entre as duas? (c) Quais seriam as respostas anteriores se fosse desprezada a massa da polia?

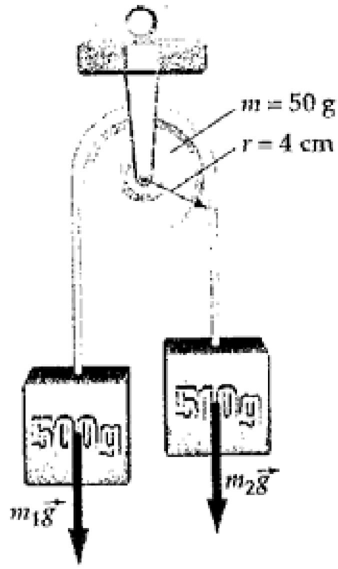


Fig. [8-37]

12 - Um cilindro homogêneo de massa m, e raio *R* está montado num eixo horizontal com rolamentos sem atrito. Um cordel de massa desprezível, enrolado na superfície do cilindro, prende um corpo de massa m_2 que está sobre um plano inclinado de

θ, como mostra a Fig. [8-38].0 sistema principia a se mover quando a massa m_2, em repouso, está à altura *h* acima do pé do plano inclinado, *(a)* Que aceleração tem m_2? (b) Qual a tensão no cordel? (c) Qual a energia do sistema quando m_2 está à altura *h*? (d) Qual a energia do sistema quando m_2 chega ao pé do plano e tem a velocidade *v?* (c) Que valor tem *v? (J)* Estimar as respostas obtidas nos casos extremos θ == 0º, θ = 90° e m_1= 0.

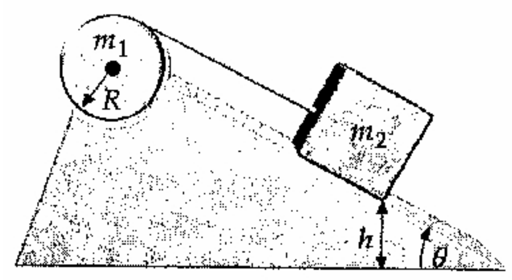


Fig. [8-38]

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Tipler, P.A., Física Volume 1, LTC 4ª edição, ano 2000

Resnick, R. e Halliday, Física 1, D., LTC 3ª edição, ano 1979