Aula 9

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

META

Introduzir a terceira grande lei de conservação da mecânica, que é a lei de Conservação do Momento Angular. Mostrar como resolver os problemas de cinemática e dinâmica envolvendo movimento de rotação.

OBJETIVOS

Que os alunos tenham clareza da importância e do papel da Lei de Conservação do Momento Angular. Que os alunos possam, através dos exemplos e das atividades desta aula, adquirir a mesma proficiência na solução dos problemas envolvendo rotação, que devem ter adquirido nos problemas de cinemática e dinâmica das aulas anteriores.

PRÉ-REQUISITOS

O domínio da dinâmica e cinemática rotacional vista na aula 8.

INTRODUÇÃO

A Lei de Conservação do Momento Angular pode ser entendida a partir da aplicação da Segunda Lei de Newton na sua forma rotacional, da mesma maneira que a Lei de Conservação do Momento Linear é uma conseqüência da Segunda Lei de Newton. Neste último caso tínhamos $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (se tivermos um corpo rígido $\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, onde $\vec{F}_{ext}$ é a somatória das forças externas exercidas sobre o corpo). Se $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ então $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ e como conseqüência $\vec{p}$ = *constante*. Esta última igualdade é a expressão matemática de Lei de Conservação do Momento Linear – "*e se a soma das forças externas sobre um corpo for nula, seu momento linear se conserva*". Da mesma maneira, partindo da Segunda Lei de Newton na sua forma rotacional, que é, $\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, vemos que se $\vec{\tau}_{ext} = \vec{0}$, então $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ e consequentemente $\vec{L}$ = constante. Esta última igualdade exprime a Lei de Conservação do Momento Angular, que é:

"*Se a resultante dos torques das forças externas que atuam sobre um corpo for nula, seu momento angular é conservado*".

Quando na 8° aula, mostramos a Segunda Lei de Newton na sua forma rotacional, observamos que ela era uma mera conseqüência da Segunda Lei de Newton na forma linear, e não uma nova lei fundamental da Física. Entretanto a Lei de Conservação do Momento Angular é uma lei fundamental da Física, em pé de igualdade de estado com as demais leis de conservação da Mecânica – a conservação da energia, e a conservação do momento linear. E é uma lei que tem validade, tanto quanto as demais leis de conservação que acabamos de mencionar, em domínios em que a própria mecânica newtoniana não é mais válida, como na escala microscópica da física atômica e da física nuclear. Vamos tentar desfazer esta aparente contradição.

A grande obra de Newton: "Princípios Matemáticos da Filosofia Natural", foi escrito no final do século XVII. No século XVIII ela sofre uma enorme transformação na sua formulação matemática, pelos grandes matemáticos franceses, entre os quais Lagrange, Laplace, D'Alembert. Estes foram homens do iluminismo.

Iluminismo: movimento cultural (político e filosófico) do século XVIII na França. Este movimento foi o substrato teórico da Revolução Francesa.

Tratou-se de uma modificação do ferramental matemático da teoria, que não alterou o conteúdo físico da mecânica newtoniana. Vocês da Universidade Aberta, vão estudar esta nova formulação em uma disciplina do curso de Física chamada, Mecânica Clássica. Nesta reformulação, as equações de movimento não decorrem da Segunda Lei de Newton, mas de um princípio mais geral, chamado "Princípio de Mínima Ação". Mostra-se, no âmbito desta reformulação, que as três grandes leis de conservação da Mecânica, a saber, a "Conservação do Momento Linear" e a "Conservação do Momento Angular", são conseqüências de propriedades do espaço e do tempo da mecânica newtoniana. Assim, a Conservação da Energia Mecânica é conseqüência da uniformidade do tempo. A conservação do Momento Linear é conseqüência da homogeneidade do espaço e a Conservação do Momento Angular é conseqüência da isotropia do espaço. (Ver referência 3° desta aula).

Isotropia do espaço: significa que todas as direções têm a mesma importância. Não há uma direção privilegiada no espaço.

Desta maneira, na reformulação matemática da mecânica newtoniana, à qual estamos nos referindo, as três grandes leis de conservação, surgem de três propriedades fundamentais do tempo e do espaço. Fica assim claro, porque são três leis fundamentais da mecânica, não sendo nenhuma uma mera reformulação de qualquer outra, da mesma forma que as três propriedades do espaço e do tempo que lhes deram origem, são também propriedades fundamentais e independentes.

Grande parte deste capítulo será dedicada à exemplos de soluções de problemas envolvendo rotação. Vamos tentar sistematizar estas soluções em um conjunto de procedimentos, como fizemos nas aulas sobre cinemática e dinâmica lineares. Mas alertamos mais uma vez os alunos do ensino à distância, que mesmo seguindo uma forma, até certo ponto padronizada, de abordagem dos problemas, mesmo contando com um bom número de exemplos de problemas fundamentais, mesmo dominando e se lembrando de todas as fórmulas, o real domínio e segurança na solução dos problemas de qualquer área da Física, só se obtém tentando resolver, por si mesmo, um bom número de problemas que estão relacionados nas atividades, mostrando suas soluções aos tutores, discutindo com eles, ou com o professor coordenador, suas dúvidas, errando, e aprendendo com os erros cometidos.

9-1 Problemas envolvendo a aplicação da Segunda Lei de Newton à rotação Energia Cinética de Rotação

Inicialmente recordaremos o conceito de energia cinética de rotação. A energia cinética de um corpo que gira é a soma das energias cinéticas de suas partículas. A energia cinética de um elemento de massa m_i é:

$$K = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad [9\text{-}1]$$

Usando a relação $v_i = r_i \omega_i$, podemos escrever a energia cinética de rotação de todo o corpo como:

$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega_i)^2$$

$$K_{rot} = \frac{1}{2} (\sum_i m_i r_i^2) \omega^2$$

Como vimos na 8° Aula, $\sum_i m_i r_i^2$ é o momento de inércia, *I* do corpo. Então a energia cinética de rotação é:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad [9\text{-}2]$$

Que é o análogo de $\frac{1}{2} mv^2$ do movimento linear.

Exemplo 9-1

"Um volante, que é um dispositivo usado para armazenar energia, é um disco homogêneo de $(1{,}5\times10^5)kg$ e raio *2,2m,* que gira à $3.000\,rev/min$ em relação ao seu centro de massa. Calcular a energia cinética deste volante."

Solução:

A energia cinética é:

$$K_{rot}=\frac{1}{2}I\omega^2$$

Lembrando que o momento de inércia de um disco com relação a um eixo que passa em seu centro é:

$$I=\frac{1}{2}mR^2=\frac{1}{2}(1{,}5\times10^5\,kg)(2{,}2m)^2=3{,}63\times10^5\,kg.m^2$$

Escrevendo a velocidade angular ω em *rad/s,* temos:

$$\omega=\frac{3.000}{60}\frac{rev}{s}=\frac{2\pi\times3.000}{60}=314\,rad/s$$

Colocando estes valores na expressão da energia cinética:

$$K_{rot}=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}(3{,}63\times10^5\,kg.m^2)(314rad/s)^2=1{,}79\times10^{19}\,J$$

Movimento combinado de translação e rotação de um corpo rígido

Um corpo que rola em uma superfície, está em rotação em torno de um eixo passando por seu CM e tem ao mesmo tempo um movimento de translação, que pode ser dado pelo movimento de seu centro de massa. Vamos mostrar que podemos escrever a energia cinética deste corpo seja tratando o movimento como uma rotação pura, seja como uma combinação de movimento de translação e de rotação.

Consideremos um cilindro que rola ao longo de uma superfície horizontal. (Ver Fig. [9-1]).

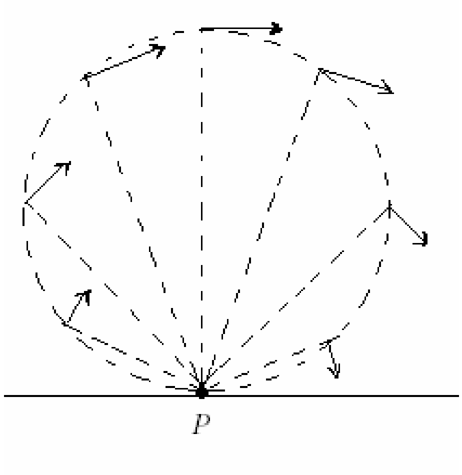

Fig. [9-1]

Se a rotação se dá sem escorregamento, em qualquer instante o ponto de contato do cilindro com a superfície está em repouso. O eixo perpendicular à Fig. [9-1], e, portanto à nossa pagina, e que passa pelo ponto P é chamado eixo instantâneo de rotação. Neste instante a velocidade linear de qualquer partícula do cilindro é perpendicular à linha que une a partícula ao ponto P, e seu valor é proporcional à distância deste segmento ($v = \omega r$). Isto é o mesmo que dizer que nesse instante o cilindro está girando em torno de um eixo que passa por P, com uma velocidade angular ω. Portanto nesse instante o movimento do corpo é equivalente à uma rotação pura, e por isto a energia cinética total do corpo pode ser expressa como:

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \qquad [9\text{-}3]$$

Onde I_P é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa por P.

Pelo Teorema dos Eixos Paralelos temos:

$$I_P = I_{CM} + MR^2 \qquad [9\text{-}4]$$

Onde I_{CM} é o momento de inércia em relação ao centro de massa (CM) do cilindro de massa M e raio R, ou seja, é o momento de inércia com relação a um eixo paralelo aquele que passa por P, e que passa pelo CM. Substituindo este valor (eq. [9-4]) ver equação [9-3], obtemos:

$$K = \frac{1}{2}\left(I_{CM} + MR^2\right)\omega^2$$

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 \qquad [9\text{-}5]$$

A quantidade $R\omega$ é a velocidade do CM, quando consideramos o cilindro em rotação em torno do eixo de rotação instantâneo que passa por P, então:

$$v_{CM} = R\omega \qquad [9\text{-}6]$$

E a expressão [14-3] pode ser escrita como:

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \qquad [9\text{-}7]$$

Partimos então de [9-3] que é a expressão da energia cinética do cilindro rolando, tratado como uma rotação pura em torno do eixo instantâneo de rotação, e chegamos à [9-7] que tem uma interpretação clara: é a energia cinética de rotação do cilindro em torno de um eixo que passa por seu centro de massa e é paralelo ao eixo de rotação instantâneo do cilindro, mais a energia cinética de translação do CM. O eixo que passa pelo CM é simplesmente o eixo do cilindro que é obviamente paralelo à qualquer eixo de rotação instantâneo. Observe-se que na equação [9-7] não há nenhuma referência ao eixo de rotação instantâneo. Na verdade a equação [9-7] aplica-se à qualquer movimento combinado de translação e rotação, que se dê em um plano, ou seja, o movimento de translação seja um movimento plano, e o eixo de rotação seja perpendicular ao plano do movimento.

Voltando ao caso de um corpo que rola sobre uma superfície, podemos sintetizar nossa conclusão dizendo que:

“Os efeitos combinados de translação do centro de massa e de rotação em torno do centro de massa, são equivalentes à uma rotação pura, com a mesma velocidade angular, em torno de um eixo que passe pelo ponto de contato de um corpo que rola.”

Podemos compreender melhor esta questão de um corpo que rola, considerando as velocidades de diferentes pontos de vistas de diferentes referenciais. Se a velocidade do CM (medida por uma observador fixo à superfície em que o corpo está rolando) é v_{CM}, a velocidade angular instantânea do CM em torno de um eixo que passa por P(o ponto de contato com a superfície) é tirada de $v_{CM} = R\omega$, e portanto é $\omega = \frac{v_{CM}}{R}$. Já um ponto Q na parte superior do cilindro, terá, com relação à superfície, a velocidade $v = 2R\omega$, portanto $v = 2v_{CM}$. Como o ponto P está em repouso com relação ao solo, as velocidades instantâneas de P, do CM (ponto C) e do ponto Q, são as mostradas na Fig. [9-2], que é um corte transversal no cilindro por um plano passando pelo seu centro de massa, e perpendicular ao eixo do cilindro.

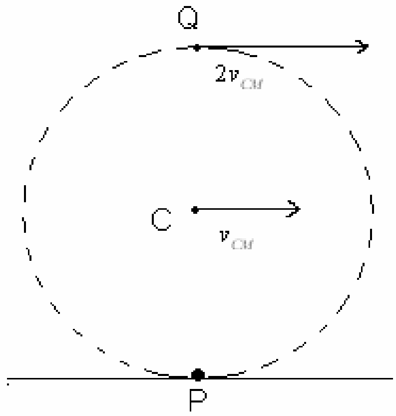

Fig. [9-2]

Consideremos agora o rolamento com uma combinação da translação do centro de massa e da rotação do eixo do cilindro que passa por C. Considerando-se apenas a translação, todos os pontos do cilindro têm a mesma velocidade v_{CM}, que é a velocidade do centro de massa. (Ver Fig. [9-3] (a)).

Considerando-se apenas a rotação, o centro de massa está em repouso, o ponto Q tem velocidade $+\omega r$ e o ponto P tem velocidade $-\omega r$ (Fig. [9-3] (b)). Na Fig. [9-3] (c), temos a soma destes resultados para cada ponto.

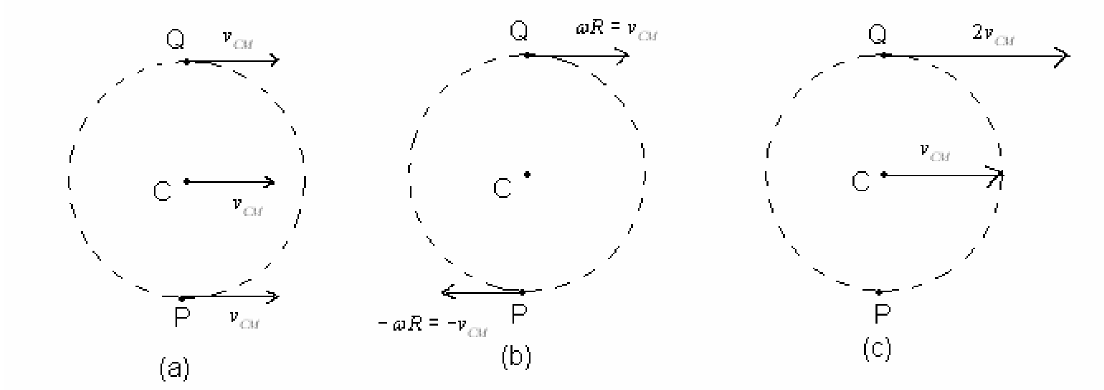

Fig. [9-2]

A soma dos resultados de (a) e (b) para cada ponto é:

Para o ponto Q: $v = v_{CM} + \omega R = v_{CM} + \dfrac{v_{CM}}{R} R = 2v_{CM}$

Para o ponto C: $v = v_{CM} + 0 = v_{CM}$

Para o ponto P: $v = v_{CM} - \omega R = v_{CM} - \dfrac{v_{CM}}{R} R = 0$

A soma dos resultados é a velocidade instantânea de cada um destes três pontos considerados do cilindro com relação ao solo. Este resultado coincide com o mostrado na Fig. [9-2], quando analisamos o movimento como uma rotação passando por P que esta instantaneamente em repouso com relação ao solo.

Da Fig. [9-3], partes (b) e (c), vemos que as velocidades tangenciais de qualquer ponto da borda do cilindro têm módulo $\omega R = v_{CM}$, quando medidas no referencial do centro de massa, onde v_{CM} é a velocidade de translação do centro de massa com relação ao solo. Nos problemas faremos uso deste resultado.

Exemplo 9-2

"Seja um cilindro maciço homogêneo de massa *M* e raio *R*, rolando sem deslizar, por um plano inclinado. Determinar a velocidade do seu centro de massa, quando o cilindro chegar à base do plano". (O plano tem altura h).

Solução:

Resolveremos inicialmente por conservação de energia. Observemos então que os problemas de dinâmica envolvendo rotação podem como os problemas envolvendo apenas translação, que estudamos na 5° e 6° aulas, serem resolvidos, tanto pelas equações de movimento decorrentes da aplicação da 2° Lei de Newton quanto usando a lei de conservação de energia.

A energia cinética adquirida pelo cilindro é:

$$E = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}{}^2 \qquad [9\text{-}8]$$

Onde v_{CM} é a velocidade linear do centro de massa, e ω é a velocidade angular em torno do centro de massa, ambas quando o cilindro chega à base do plano. No início a cilindro esta no alto do plano e sua velocidade é zero. (Ver Fig. [9-4]).

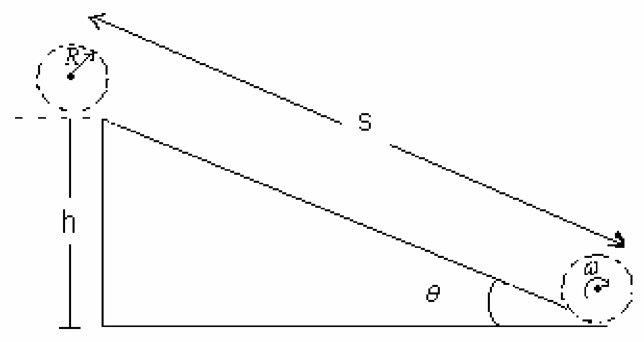

Fig. [9-4]

Igualando a energia inicial, inteiramente potencial, com a energia final, inteiramente cinética, pois escolhemos a base do plano como nível zero de energia potencial, temos:

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}{}^2$$

Como o momento de inércia de um cilindro homogêneo maciço é:

$$I_{CM} = \frac{1}{2} M R^2$$

e

$$\omega = \frac{v_{CM}}{R} \qquad [9\text{-}9]$$

Onde escrevemos [9-9] por causa do resultado anterior, e que o leitor deve neste momento recordar. Então:

$$Mgh = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \left(\frac{v_{CM}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}{}^2$$

$$Mgh = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) M v_{CM}{}^2$$

$$v_{CM}{}^2 = \frac{4}{3} gh$$

$$v_{CM} = \sqrt{\left(\frac{4}{3} gh \right)} \qquad [9\text{-}10]$$

Se o cilindro deslizasse pelo plano inclinado sem atrito, o equilíbrio energético levaria como já vimos à equação:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{CM}^{\ 2},$$

Donde resultaria:

$$v_{CM} = \sqrt{2gL} \qquad [9\text{-}11]$$

Comparando [9-11] com [9-10], vemos que na presença do atrito estático, a energia cinética total do cilindro ao atingir a base do plano, tem além do termo da energia cinética de translação, um termo que representa a energia cinética de rotação. Mas como a energia cinética total do cilindro é a mesma, pois é igual à energia potencial inicial, concluímos que a velocidade final do centro de massa é menor quando existe a força de atrito. Notemos, porém que esta força de atrito é uma força de atrito estático, que não é dissipativa, tanto que usamos a lei de conservação de energia. O que a força de atrito faz é tão somente, obrigando o cilindro a rodar, pois exerce um torque com relação ao eixo do cilindro, dividir a energia cinética em uma parte devida à translação e uma parte devida à rotação.

Vamos agora resolver o mesmo problema usando a 2° Lei de Newton tanto na sua forma linear quanto rotacional.

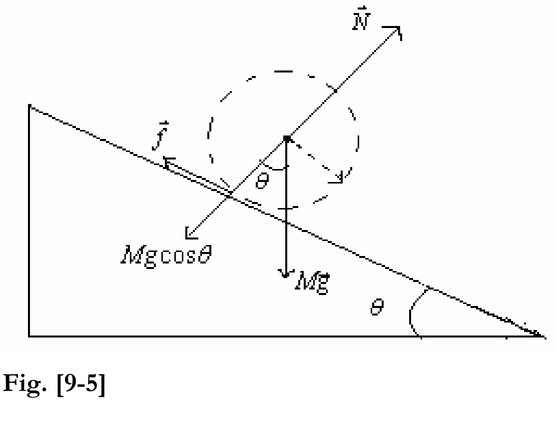

Fig. [9-5]

Na Fig. [9-5] vemos o esquema de forças. A força peso do cilindro é $M\vec{g}$. Temos a força de atrito $\vec{f}$ que atua ao longo do plano inclinado do cilindro e a força $\vec{N}$ que o plano exerce sobre o cilindro. Escolhemos o eixo X ao longo do plano inclinado (que é a direção da aceleração linear), e o Y perpendicular a X.

Partindo da equação:

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} \qquad [9\text{-}12]$$

Vamos decompor esta equação segundo o eixo Y e segundo X, obtendo as equações escalares respectivas, a saber:

$$N - Mg\cos\theta = 0 \qquad \text{(segundo Y) (a)}$$

e [9-13]

$$Mg\,\mathrm{sen}\,\theta - f = Ma \qquad \text{(segundo X) (b)}$$

O movimento de rotação é descrito pela equação:

$$\tau = I_{CM}\alpha$$

Observemos que $\vec{N}$ e $M\vec{g}$ tem torque nulo porque são dirigidos segundo direções que passam pelo centro de massa. Temos:

$$\vec{\tau}_F = \vec{R} \times \vec{f}$$

$$\vec{\tau}_F = R\,f\,\mathrm{sen}\,90° = R\,f$$

Mas:

$$f\,R = I_{CM}\alpha$$

$$I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2 \quad \text{(momento de inércia do cilindro)} \qquad [9\text{-}14]$$

Observemos agora que sendo $v = R\omega$, e como mostramos que a velocidade v de um ponto da borda do cilindro em relação ao centro de massa é um módulo igual à velocidade do centro de massa em relação ao plano inclinado, ou seja, $v = v_{CM}$, como $\frac{dv_{CM}}{dt} = a_T$ e $a_T = R\alpha$, então também $\frac{dv_{CM}}{dt} = R\alpha$. Mas $\frac{dv_{CM}}{dt} = a_{CM} = R\alpha$.

Concluímos que a aceleração do centro de massa com relação ao plano inclinado, que em [9-14] (b) chamamos a é:

$$a = R\alpha \qquad [9\text{-}16]$$

De [9-14] tiramos:

$$f = \frac{I_{CM}\alpha}{R},$$

E levando em conta o valor de ($I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$; eq. [9-15]):

$$I_{CM} = \frac{\frac{1}{2} MR^2 \alpha}{R}$$

Mas mostramos que $\alpha = \frac{a}{R}$ (Eq. [9-16]). Então:

$$f = \frac{MR^2 a}{2R^2} = \frac{1}{2} Ma$$

Substituindo este resultado em [9-13] (b), temos:

$$Mg \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} Ma = Ma$$

$$g \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2} a$$

$$a = \frac{2}{3} g \operatorname{sen}\theta \qquad [9\text{-}17]$$

Observemos que temos também para aceleração, um resultado análogo ao que obtivemos para a velocidade. A aceleração do cilindro que rola $\left(\frac{2}{3} g \operatorname{sen}\theta\right)$ é menor que a do cilindro que desliza sem atrito $(g \operatorname{sen}\theta)$.

Como o cilindro parte do repouso a equação de Torricelli fornece:

$$v^2 = 2as$$

onde *s* é o comprimento do plano inclinado. (Ver Fig. [9-9]).

Então:

$$v^2 = 2\left(\frac{2}{3} g \operatorname{sen}\theta\right) s$$

Mas,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{s} \qquad \text{(Ver Fig. [9-9])}$$

Então:

$$v^2 = \frac{4}{3} g \frac{h}{s} s = \frac{4}{3} g\, h$$

Donde concluímos o mesmo resultado que tínhamos obtido por conservação de energia, qual seja:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} g\, h}$$

Sistemática para solução dos problemas

Nos exemplos que se seguem, vamos usar a sistemática de solução de problemas, com a aplicação da segunda Lei de Newton, que mostramos na quinta aula, e que agora recapitularemos:

1. Desenhar o problema. Entender corretamente seu enunciado, qual a situação física em questão e quais os resultados teóricos possíveis de serem utilizados;
2. Fazer um diagrama do problema, isolando os diferentes corpos e desenhando as forças que atuam em cada corpo;
3. Escolher os sistemas de eixos cartesianos, colocando, no caso do movimento linear, um eixo na direção da aceleração do corpo;
4. Efetuar a resultante das forças em cada corpo, trabalhando com as componentes em cada eixo;
5. Escrever a 2° Lei de Newton, decompondo-a em cada eixo.
6. Resolver as questões obtidas.

Exemplo 9-3

"Uma bicicleta tem uma corrente que aplica um torque em sua roda traseira, através de uma corrente dentada que movimenta um cilindro de *7cm* de raio. Admitimos que a roda seja um aro de *35cm* de raio e com uma massa de *2,4kg*. Supondo que a força exercida pela correia dentada seja constante e igual à *18N*, qual a velocidade angular da roda depois de *5s* ? (A roda gira livremente, ou seja, não está apoiada no chão)."

Solução:

1. São dadas: a força $\vec{F} = 18N$, o raio do cilindro $r_C = 7cm$; o raio da roda $R = 35cm$; a massa da roda $M = 2,4kg$. Pela 2° Lei de Newton (na forma rotacional)

calculamos a aceleração angular, que é constante, pois o torque é constante, e então a velocidade angular a partir da aceleração.

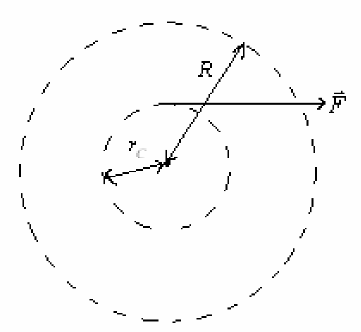

Fig. [9-6]

2. O diagrama está na Fig. [9-6]. Se a roda é livre para se mover ela está sustentada no ar. Existe então uma força peso, cuja resultante (de todos os elementos de massa da roda e do eixo) tem direção que passa pelo eixo e, portanto não exerce torque sobre a roda, e uma força igual e contrária, também passando pelo centro de massa e que também não exerce torque (tem direção apontada para o eixo). Não colocamos estas duas forças que se anulam e não exercem torque, no nosso diagrama da fig. [9-6];

3. A roda da bicicleta não se movimenta, alem da rotação. Seu centro de massa é imóvel. Não usamos neste caso um sistema de eixos cartesianos;

4. Há uma única força $\vec{F}$;

5. A segunda lei de Newton é $\sum \tau_{ext} = I\alpha$. Donde $\alpha = \frac{\sum \tau_{ext}}{I}$. O único torque vale $\tau_{ext} = Fr_c$. O momento de inércia da roda é $I = MR^2$, assim a aceleração fica: $\alpha = \frac{F_{r_s}}{MR^2}$.

6. Lembrando que $\omega = \omega_0 + \alpha t$ (movimento de rotação uniformemente acelerado) e sendo $\omega_0 = 0$ (a roda parte do repouso), ficamos com:

$$\alpha = \frac{(18N)(0{,}07m)}{(2{,}4kg)(0{,}35m^2)} = 4{,}29\,rad/s^2;$$

$$\omega = 2t = (4{,}29rad/s^2)5\,s = 21{,}4\,rad/s.$$

Resposta: $\omega = 21{,}4\,rad/s$

Exemplo 9-4

"Um corpo de massa está pendurado em um cordel que passa por uma placa cujo momento de inércia em relação ao próprio eixo é *I* e o raio é *R*. A polia roda sem atrito e o cordel não escorrega pela sua borda. Calcular a tensão no cordel e a aceleração do corpo."

Solução:

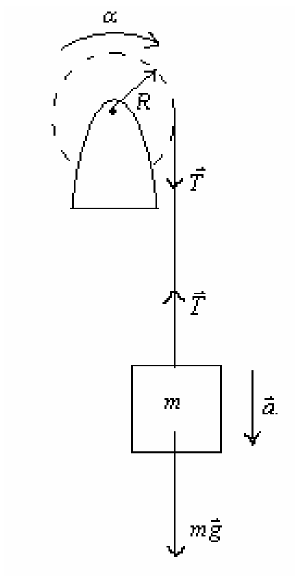

Fig. [9-7]

1. O problema está desenhado na fig. [9-7]. O corpo desce com aceleração constante $\vec{a}$ e a polia gira com aceleração constante $\vec{\alpha}$. Como o cordel se desenrola sem escorregar a aceleração tangencial de qualquer ponto da corda da polia a_T, é a aceleração *a* do cordel. Então como $a_T = R\alpha$, temos:

$a = R\alpha$ [9-7];

2.

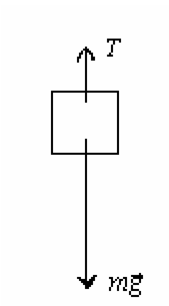

Fig. [9-8]

Na fig. [9-8] está feita o diagrama de forças da massa *m*;

3. Escolhemos o eixo Y na direção da aceleração $\vec{a}$. Ao mesmo tempo estabelecemos como sentido positivo de rotação o sentido horário;

4. A resultante das forças aplicadas sobre a massa *m*, é quando projetada no eixo Y:

$R = mg - T$ [9-18]

5. Escrevemos então a 2° Lei de Newton, para o movimento linear da massa *m*, já projetada no eixo *Y*:

$mg - T = ma$ [9-19]

Ao mesmo tempo escrevemos a 2° Lei de Newton, para o movimento rotacional da polia:

$\tau_{ext} = I\alpha$ [9-20]

Temos ainda:

$\tau_{ext} = TR$ [9-21]

6. Resolvendo as equações, exprimimos α em função de i.

$$TR = I\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{TR}{I}$$

Como $a = R\alpha$, então:

$$\alpha = \frac{TR^2}{I} \qquad [9\text{-}22]$$

Substituindo este resultado na 2° lei de Newton (equação [9-22]), temos:

$$mg - T = m\frac{TR^2}{I}$$, e então:

$$T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{I}} = \frac{I}{I + mR^2}mg \qquad [9\text{-}23] \quad \text{Resposta (a).}$$

Substituindo este valor de t (equação [9-23]) em [9-22]) chegamos finalmente à:

$$a = \frac{mR^2}{1 + mR^2}g \qquad \text{Resposta (b).}$$

Observação:

(i) Notemos que aqui, como no exemplo 2, a força de atrito, sendo o atrito estático, não é uma força dissipativa. Naquele exemplo (exemplo 2) ela fazia rodar o cilindro, aqui ela faz rodar a polia.

(ii) Se a corda simplesmente deslizasse sobre a polia, sem atrito, a aceleração da massa *m* seria maior, pois seria simplesmente g (queda livre).

Exemplo 9-5

"Dois corpos estão presos a um cordel que passa por uma polia de raio *R*, e momento de inércia *I*. O corpo de massa m_1 desliza sobre uma superfície horizontal sem atrito. O corpo de massa m_2 está pendurado no cordel. Calcular a aceleração a dos dois corpos e as tensões T_1 e T_2 admitindo que não haja escorregamento do cordel na polia."

Solução:

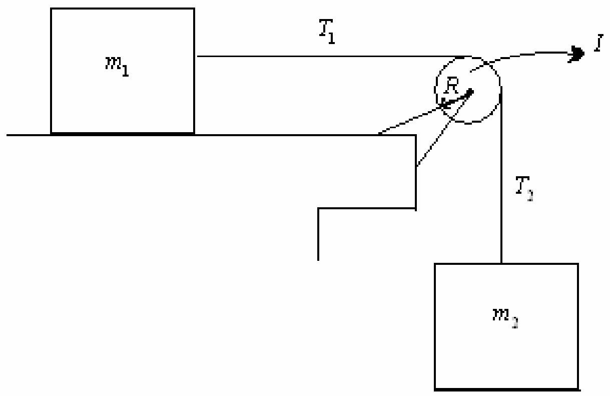

Fig. [9-8]

1. Na Fig. [9-8], temos o desenho do problema. As tensões T_1 e T_2 não são iguais, pois a polia é rodada. Os torques de T_1 e T_2 têm direções opostas.

2. Na Fig. [9-9]. Temos o diagrama de forças que atuam em cada um dos corpos do problema 9as massas m_1 e m_2, e a polia). Notemos que o eixo da polia sendo fixo, deve haver uma força $\vec{F}_s$ que equilibre as forças $\vec{T}_1 e \vec{T}_2$.

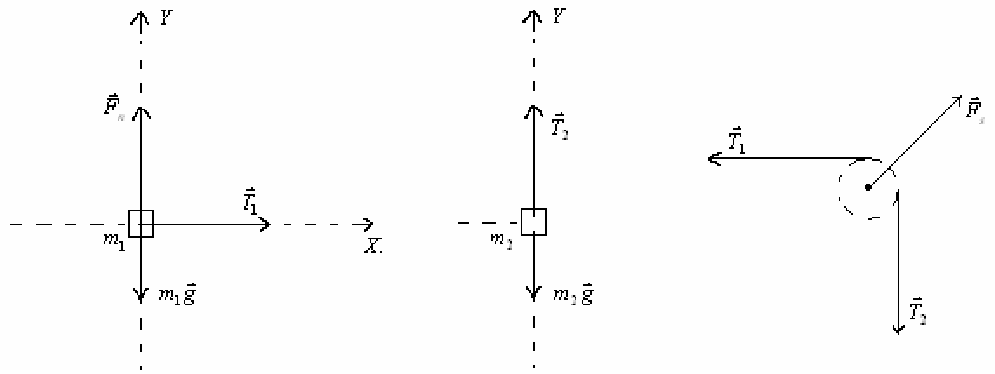

Fig. [9-9]

3. Colocamos o sistema de eixos XY para a descrição do movimento de m_1. Os eixos são tais que a superfície sobre a qual se desloca à massa m_1, está em repouso neste referencial (dos eixos X e Y) e a direção de X é a direção da aceleração da massa m_1. Em m_2 temos o mesmo eixo y já descrito e, portanto neste caso a aceleração de m_2 tem direção oposta a do eixo.

4. A resultante das forças em m_1 é $\vec{T}_1$, pois $m_1\vec{g}$ é contrabalançada pela normal $\vec{F}_n$. A projeção (escalar) de $\vec{T}_1$ no eixo X é T_1. (Em Y é 0). A resultante dos torques na polia é $(T_2 - T_1)R$. Onde adotamos o sentido horário de rotação como positivo. A resultante das forças $\vec{T}_2$ e $m_2\vec{g}$ sobre a massa m_2 é um vetor apontando para baixo. Então sua projeção escalar sobre o eixo Y é $T_2 - m_2 g$.

5. A segunda lei de Newton aplicada às massas m_1 e m_2, e a segunda lei de Newton para o movimento rotacional, que são:

$$\vec{T}_1 = m_1\vec{a}$$

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a} \qquad [9\text{-}24]$$

$$\sum \tau_{ext} = I\vec{\alpha}$$

Fornecem quando projetadas sobre os eixos indicados e com sinal escolhido para o sentido de rotação:

$$T_1 = m_1 a$$

$$T_2 - m_2 g = -m_2 a \qquad [9\text{-}25]$$

$$(T_2 - T_1)R = I\alpha$$

6. De posse das equações [9-25], tiramos todas as incógnitas pedidas. Temos:

$$(T_2 - T_1)R = m_2 g - (m_1 + m_2)a \qquad [9\text{-}26]$$

De $(T_2 - T_1)R = I\alpha$, tiramos:

$$(T_2 - T_1) = \frac{I}{R}\alpha;$$

Mas, como $\alpha = R\alpha$. Ficamos com:

$$T_2 - T_1 = \frac{I}{R}\frac{a}{R} = \left(\frac{I}{R^2}\right)a$$

Então:

$$a = \frac{T_2 - T_1}{\frac{I}{R^2}} \qquad [9\text{-}27]$$

Substituindo em [9-27] o valor de $T_2 - T_1$ tirado de [9-26], ficamos:

$$a = \frac{m_2 g - (m_1 + m_2)a_1}{\frac{I}{R^2}} \qquad [9\text{-}28]$$

Podemos escrever [9-28] na forma:

$$a + \frac{(m_1 + m_2)a}{\frac{I}{R^2}} = \frac{m_2 g}{\frac{I}{R^2}},$$

O que é o mesmo que: multiplicando por $\left(\frac{I}{R^2}\right)$.

$$\frac{I}{R^2}a + (m_1 + m_2)a = m_2 g$$

$$a\left(\frac{I}{R^2}+m_1+m_2\right)=m_2 g$$

Donde finalmente a primeira resposta:

Resposta 1:

$$a=\frac{m_2}{\frac{I}{R^2}+m_1+m_2}g\,.$$

Por substituição de *a* nas equações de T_1 e T_2, obtemos:

Resposta 2:

$$T_1=\frac{m_1}{m_1+m_2+\frac{I}{R^2}}m_2\,g\,.$$

Resposta 3:

$$T_2=\frac{\left(m_1+\frac{I}{R^2}\right)}{m_1+m_2+\frac{I}{R^2}}m_2\,g\,.$$

Observação:

Se $I=0$, teremos $T_1=T_2$ e a aceleração é:

$$a=\frac{m_2}{m_1+m_2}g\,.$$

Potência

A Segunda Lei de Newton na forma rotacional $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ mostra que havendo torque sobre um corpo em rotação, vai haver também uma aceleração angular. Com isto há uma variação da energia cinética. A taxa temporal desta variação é a potência do torque. Passemos à sua dedução matemática.

Seja a força F_i que atua sobre a $i^{ésima}$ partícula de um corpo girante. Quando o corpo varre um ângulo $d\theta$ a partícula cobre uma distância $ds_i = r_i d\theta$ e o trabalho da força é:

$$dW_i = F_{if}\, ds_i = F_{if}\, r_i d\theta$$

Lembrando que $\tau_i = F_{if}\, r_i$, podemos escrever a relação entre trabalho e torque de um movimento rotacional como:

$$dW_i = \tau_i\, d\theta$$

Considerando o corpo como um todo, temos:

$$dW = \tau\, d\theta$$

Para acharmos à potência do torque, basta calcular a derivada temporal da equação anterior. Ficamos então:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Ou seja:

$$P = \tau\, \omega \qquad [9\text{-}29]$$

A expressão [9-29] é a análoga rotacional da fórmula da potência $P = F\,v$.

9-2 Conservação do momento angular

Momento Angular

Nesta seção mostraremos a relação entre o momento angular e a velocidade angular.

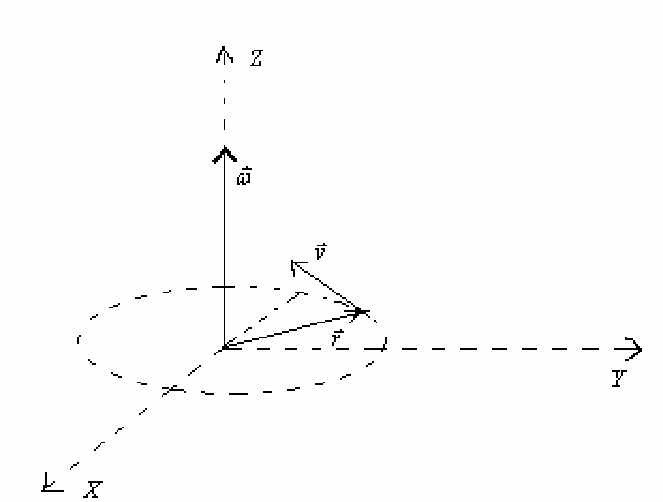

Fig. [9-10]

Seja na Fig. [9-10] uma partícula em movimento de rotação, percorrendo uma circunferência de raio *r* no plano *XY*. Seja $\vec{v}$ uma velocidade em um certo instante. Então sabemos que seu momento angular é:

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times p_i = \vec{r} \times m\vec{v}_i$$

$$\vec{l}_i = m_i r_i v_i \operatorname{sen} 90° \hat{k},$$

onde $\hat{k}$ é o versor do eixo *Z*.

Como $v = r\omega$, temos:

$$\vec{l}_i = m_i r_i^{\,2} \omega_i \hat{k} \qquad [9\text{-}30]$$

Mas $\omega_i \hat{k}$ é o vetor velocidade angular desta partícula (colocamos o índice i para indicar que esta é a $i^{ésima}$ partícula de um sistema de partículas). Então [9-30] fica:

$$\vec{l}_i = I_i \vec{\omega}_i \qquad [9\text{-}31]$$

Observemos que ao passar de [9-30] para [9-31] usamos a definição de I como sendo: $I = m_i r_i^2$ (momento de inércia). A relação [9-31] vale para o momento angular calculado com relação à um ponto que está no centro da circunferência. Se tomarmos um outro ponto O', situado no eixo Z da Fig. [9-10] (Ver Fig. [9-11]) podemos ver que a relação [9-31] não é mais válida. De fato o vetor l'_i, como é perpendicular ao plano que contém r'_i e v_i, não mais tem direção de eixo Z. (Desenhamos, em perspectiva o vetor L'_i na nossa Fig. [9-11]).

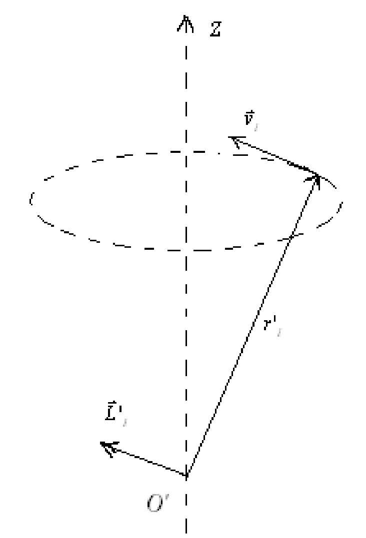

Fig. [9-11]

Se tomarmos uma outra partícula de mesma massa, situada na mesma circunferência de rotação, mas em uma posição diametralmente oposta (Fig. [9-12]), podemos ver que a soma dos momentos angulares $\vec{L}'_1 + \vec{L}'_2$ é um vetor com direção do eixo Z.

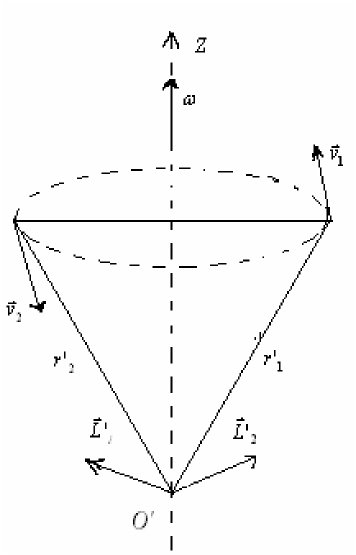

Fig. [9-12]

Se tivermos um corpo cuja distribuição de massa seja simétrica em relação à um eixo que passe por seu centro de massa, somando o momento angular de seus diferentes elementos de massa, teremos:

$$\vec{L} = I_i\vec{\omega} \qquad [9\text{-}32]$$

onde $\vec{L} = \sum \vec{l}_i$ (a soma dos momentos angulares de todas as partículas, e o eixo que descrevemos, é chamado eixo de simetria).

Observar que o corpo é homogêneo, ou seja, a densidade de massa $\rho = \frac{dm}{dV}$ é constante.

Exemplo 9-6

"Determinar em cada caso seguinte o momento angular das situações":

(a) Um carro de *1.200kg* percorrendo em sentido anti-horário uma circunferência de *20m* de raio com velocidade de *15 m/s*;

(b) O mesmo carro deslocando-se com velocidade $\vec{v} = -15m/s\,\hat{i}$ sobre a reta $y = y_0 = 20m$ (paralela, portanto ao eixo *X*);

(c) Um disco no plano *XY*, com raio *20m* e massa de *1.200kg*, girando a *0,75 rad/s* em torno do eixo *Z*.

Solução:

(a) Os vetores $\vec{r}$ e $\vec{p}$ são perpendiculares entre si e o produto $\vec{r}$ x $\vec{p}$ está na direção do eixo *Z* (Ver Fig. [9-13]). Então:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r\,\omega\,v\,\hat{k} = (20m)(1.200kg)(15m/s)\hat{k}$$

$$\vec{L} = 3{,}6 \times 10^{5}\,\frac{kg.m^{2}}{s}\,\hat{k}$$

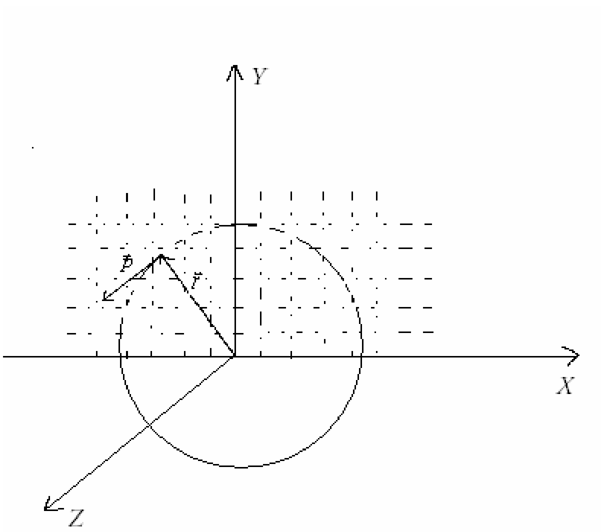

Fig. [9-13]

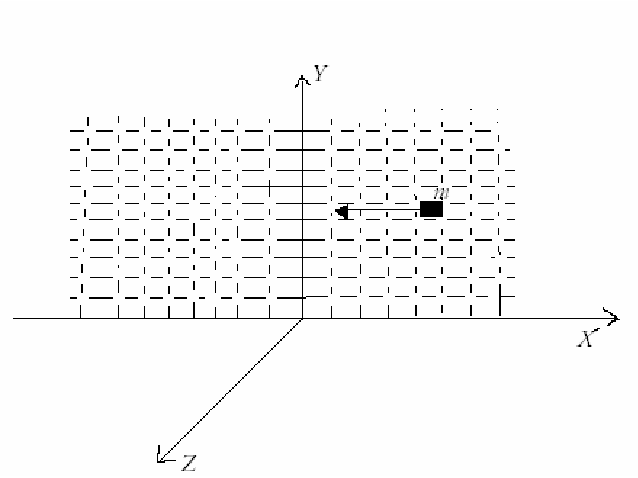

Fig. [9-14]

(b) O carro desloca-se para a esquerda sobre a reta $y = y_0 = 20m$. Exprimindo $\vec{r}$ e $\vec{p}$ em termos dos versores dos versores:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y_0\hat{j}$$

$$\vec{p} = -p\hat{i}$$

Temos:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (x\hat{i} + y_0\hat{j}) \times (-p\hat{i})$$

$$\vec{L} = -xp(\hat{i} \times \hat{i}) - y_0 p(\hat{j} \times \hat{i})$$

$$\vec{L} = -xp(\vec{0}) - y_0 p(-\hat{k}) = y_0 p\hat{k}$$

Então:

$$\vec{L} = 3{,}6 \times 10^5 \frac{kg.m^2}{s}\hat{k}$$

(c) Neste caso (Fig. [9.15]), como Z é um eixo de simetria do disco homogêneo usamos:

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega} = I\,\omega\,\hat{k} = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega\,\hat{k}$$

$$\vec{L} = (1.200kg)(20m)^2\left(0{,}75\frac{rad}{s}\right)\hat{k}$$

$$= 1{,}8\times10^5\,\frac{kg.m^2}{s}\hat{k}$$

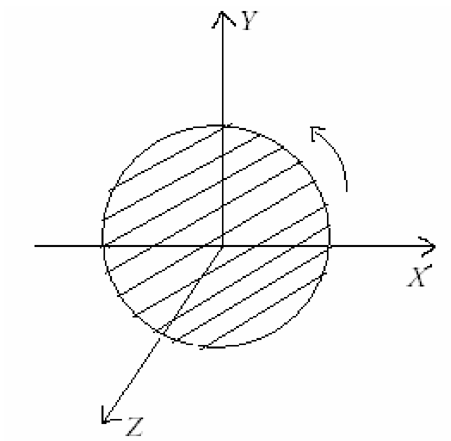

Fig. [9-15]

Conclusão:

(i) Os momentos angulares nas situações (a) e (b) são iguais; na situação (c) o momento angular do disco é metade dos momentos angulares das situações (a) e (b). Isto porque comparando o momento de inércia do carro na situação (a) (com relação ao eixo Z) que é $M\,r^2$, vemos que é o dobro do momento angular do disco que é $\frac{1}{2}M\,r^2$.

(ii) Calculamos os momentos angulares da situação (a) e (b) considerando os vetores em um dado instante. Porém na suposição de que não haja torque de forças externas, pela 2° lei de Newton da rotação $\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, o momento angular se conserva e os valores obtidos são válidos para qualquer instante dos movimentos descritos.

Conservação do Momento Angular

Quando a resultante dos torques externos é nula, temos, pela 2° lei de Newton da rotação, que é $\vec{\tau}_{ext} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$ que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

E então:

$$\vec{L} = constante \qquad [9\text{-}33]$$

A equação é a expressão da lei de conservação do momento angular.

"Se a resultante dos torques que agem sobre um sistema é nula, o momento angular do sistema é constante."

Já discutimos na introdução desta aula, que embora a 2° lei de Newton, na forma rotacional, seja uma conseqüência direta da 2° lei de Newton, e embora a direção do princípio da conservação do momento angular seja uma conseqüência direta da 2° lei de Newton na forma rotacional, esta lei (da Conservação do Momento Angular) é uma das três leis básicas de conservação da mecânica, em pé de igualdade em importância com as duas outras leis.

Na introdução desta aula, à qual remetemos neste momento o leitor, explicamos o porquê desta nossa afirmação.

Exemplo 9-7

"Uma partícula de massa *m* descreve, com a velocidade v_0, uma circunferência de raio r_0 sobre a superfície de uma mesa horizontal sem atrito. A partícula está presa a um fio que passa por um buraco da mesa, no centro de uma circunferência, como mostra a Fig. [9-7]. O fio é lentamente puxado para baixo de modo que a partícula acaba descrevendo uma circunferência de raio r_f."

(a) Calcular a velocidade final em termos de r_0, v_0 e r_f.

(b) Calcular a tensão no fio quando a partícula descreve um círculo de raio r_f em termos de *m,* r_f e do momento angular $L_0 = mv_0r_0$.

(c) Calcular o trabalho feito sobre a partícula pela tensão T, integrando o elemento infinitesimal de trabalho $d\omega = \vec{T}\, d\vec{r}$ de r_0 até r_f. (A resposta é em termos de r_0, r_f e L_0).

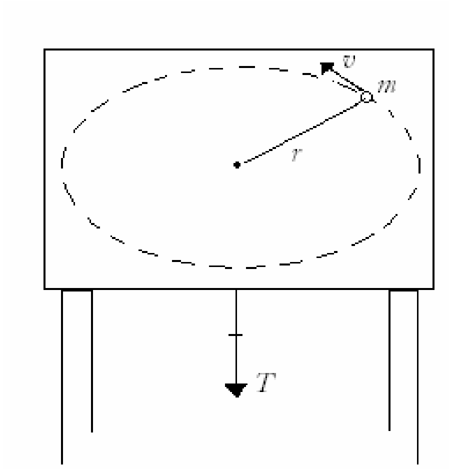

Fig. [9-16]

Solução:

A velocidade da partícula está relacionada com seu momento angular. Como a resultante das forças que agem sobre a partícula é $\vec{T}$, e $\vec{T}$ tem direção do eixo de rotação, o torque de T é nulo e o momento angular se conserva. Então, como $L_0 = mv_0r_0$ e $L_f = mv_fr_f$, temos:

$$mv_0r_0 = mv_fr_f$$

$$v_f = \frac{r_0}{r_f}v_0 \qquad \text{Resposta (a)}$$

Mas o módulo da aceleração radial (centrípeta) do movimento, quando o raio é r_f, e a tensão T na corda será, então:

$$T = m\frac{v_f^{\,2}}{r_f} \qquad [9\text{-}34]$$

Ao mesmo tempo de:

$m v_f r_f = m v_0 r_0 = L_0$ (Conservação do momento Angular).

Tiramos:

$$v_f = \frac{L_0^{\,2}}{mr_f} \qquad [9\text{-}35]$$

Substituindo [9-34] em [9-35] ficamos com:

$$T = m\frac{\dfrac{L_0^{\,2}}{mr_f}}{r_f} = \frac{L_0^{\,2}}{mr_f^{\,3}} \qquad [9\text{-}36] \qquad \text{Resposta (b)}$$

Em [9-36] escrevemos o módulo da força tensão, em um dado momento, qual seja aquele em que o raio de rotação da massa é r_f. Para acharmos o trabalho da força, integrando de r_0 a r_f, temos que exprimir a tensão em função de um raio genérico *r*, que vai ser nossa variável de integração. Então:

$$T(r) = \frac{L_0^{\,3}}{mr^3}, \qquad [9\text{-}37]$$

pois os mesmos raciocínios que fizemos para r_f, e as mesmas equações que escrevemos, valeriam para qualquer *r*. O ponto essencial é que o momento angular L_0 é o mesmo para qualquer *r*. Posto isto podemos escrever:

$$d\omega = \vec{T}\,d\vec{r} = -Tdr\,, \qquad [9\text{-}38]$$

O sinal menos que apareceu em [9-38] é devido ao fato de que $\vec{T}$ (radial, e centrípeta) tem direção oposta a do vetor posição $\vec{r}$, e portanto de sua diferencial $d\vec{r}$.

Então:

$$d\omega = \vec{T}\,d\vec{r} = -\frac{L_0^2}{mr^3}dr\,,$$

e, portanto:

$$\omega = \int_{r_0}^{r_f} -Tde = -\frac{L_0^{\ 2}}{m}\int_{r_0}^{r_f} r^{-3}dr = -\frac{L_0^{\ 2}}{m}\frac{r^{-2}}{-2}\Bigg|_0^{r_f}$$

$$\omega = \frac{L_0^{\ 2}}{2m}\left(r_f^{\ -2} - r_0^{\ -2}\right) \qquad [9\text{-}39] \qquad \text{Resposta (c)}$$

Observação:

Uma vez que $\vec{T}$ representa uma força sobre o sistema, temos a realização de trabalho. Podemos ver em [9-39] que como r_f é menor que r_0, este trabalho é positivo. Devemos ter um aumento então da energia cinética que é possível calcular. De fato como $K = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I}\left(\text{Esta fórmula é análoga à } K = \frac{p^2}{2m}\right)$, temos:

$$K_f - K_i = \frac{L_0^{\ 2}}{2mr_f^{\ 2}} - \frac{L_0}{2mr_0^{\ 2}} \qquad [9\text{-}40]$$

Em [9-40] usamos o fato que momento de inércia da massa *m* girando com um raio r é mr^2. Então:

$$K_f - K_i = \frac{L_0^{\ 2}}{2m}\left(r_f^{\ -2} - r_0^{\ -2}\right) \qquad [9\text{-}11]$$

Comprovando o que havíamos obtido por integração.

CONCLUSÃO

O mais importante desta 9° aula, é aquilo que destacamos e discutimos na introdução, e que voltamos a enfatizar no tópico 9-2, a Conservação do Momento Angular é uma das três leis fundamentais de conservação da Mecânica, em pé de igualdade com as outras duas e válida inclusive em domínios atômicos e subatômicos onde a Mecânica Clássica não mais se aplica e que fazem parte do universo Teórico da Mecânica Quântica.

RESUMO

Os pontos mais importantes desta aula e que devem ser lembrados são:

1. A expressão [9-2] da energia cinética de rotação;
2. A combinação do movimento de rotação e translação culminando na expressão [9-8];
3. Definição de potência. Expressão [9-29];
4. A dedução da relação entre momento angular e momento de inércia. Expressão [9-31].

O restante do capítulo é uma série de exemplos, nos quais demos especial ênfase à uma certa sistemática de abordagem destes problemas, análoga a sistemática que mostramos na 5° aula.

ATIVIDADE

1 - Um alto-falante de 2 kg está pendurado no respectivo fio que passa por uma polia com raio de 8 cm e massa de 0,6 kg (Fig. [9 – 17]). O fio está preso a um amplificador de 4 kg pousado sobre uma superfície horizontal. Esta superfície tem pequeno atrito e o alto-falante principia a descer quando o amplificador é solto. *(a)* Qual a resultante do torque em relação ao eixo da polia? *(b)* Qual o momento angular total do sistema 3,5 s depois de

principiar a se mover? (c) Qual o momento angular da polia neste instante? *(d)* Qual a razão entre o momento angular de cada equipamento e o momento angular da polia?

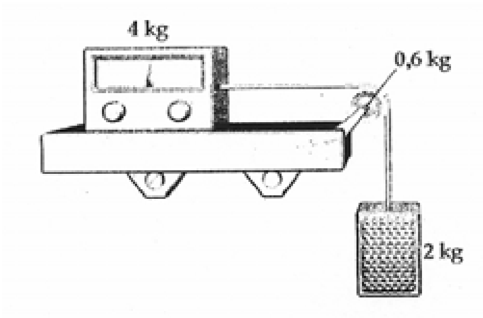

Fig. [9-17]

2 - Dois discos, de massas iguais mas raios diferentes (r e 2r) estão montados num eixo comum, sem atrito, e giram com a velocidade angular ω_0 porém em sentidos opostos (Fig. [9 – 18]). Os dois discos são lentamente reunidos. A força de atrito entre as duas superfícies acaba por levá-los a uma velocidade angular comum aos dois. Qual o módulo desta velocidade angular final em termos de ω_0?

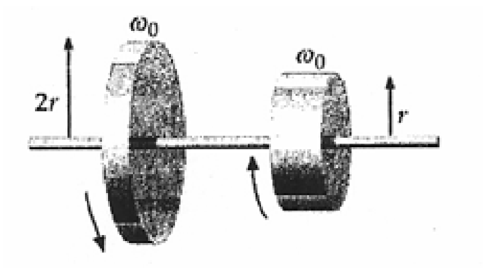

Fig. [9-18]

3 - Um corpo de massa *m,* deslizando sobre uma mesa horizontal sem atrito, está preso a um fio que passa por um buraco no centro da mesa. Inicialmente, o corpo desliza com a velocidade v_0, descrevendo um círculo de raio *r.* Calcular *(a)* o momento angular do corpo, *(b)* a energia cinética do corpo e (c) a tensão no fio. Uma pessoa, embaixo da mesa, puxa lentamente o fio. Que trabalho é efetuado para reduzir o raio do círculo de r_0 até $r_0/2$?

4 - Uma partícula de 3 kg move-se com a velocidade $\vec{v}$ = (3 m/s) î sobre a reta z = 0, y = 5,3 m. *(a)* Calcular o momento angular L em relação à origem quando a partícula estiver em x = 12 m, y = 5,3 m. *(b)* Uma força $\vec{F}$ = (3 N) î é aplicada à partícula. Calcular o torque devido a esta força, em relação à origem.

5 - O vetor posição de uma partícula de 3 kg é dado por $\vec{r} = 4\,\hat{\imath} + (3t^2)\,\hat{j}$, com r em metros e *t* em segundos. Determinar o momento angular da partícula e o torque que atua sobre ela em relação à origem.

6 - Uma bola de 2 kg, presa a um fio de 1,5 m, descreve um círculo horizontal ao modo de um pêndulo cônico (Fig. [9 – 20]). O fio faz o ângulo θ = 30° com a vertical, *(a)* Mostrar que o momento angular da bola, em relação à ponta fixa do fio *P,* tem uma componente horizontal na direção do centro do círculo e uma outra vertical; calcular estas componentes, *(b)* Calcular o módulo de *dL/dt* e mostrar que é igual ao módulo do torque da gravidade em relação ao ponto fixo P.

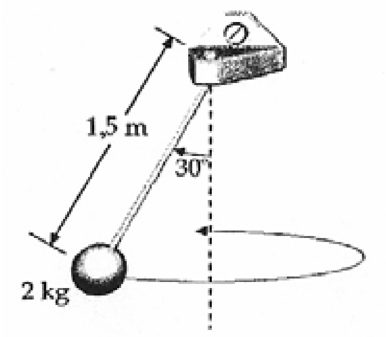

Fig. [9-18]

7 - Uma massa m sobre uma superfície horizontal, sem atrito, está ligada a uma corda que se enrola em tomo de um cilindro horizontal, de modo que, em movimento, descreve uma espiral para o eixo deste cilindro, *(a)* O momento angular da massa se conserva? (b) A energia da massa se conserva? (c) Se a velocidade da massa for v_0 quando o comprimento livre da corda for *r,* qual será a sua velocidade quando o comprimento livre estiver reduzido a r/2?

Referências Bibliográficas

Tipler, A.P. Física volume 1, 4° edição. LTC ano 2000.

Resnick, R., Halliday, D., Física volume 1, 3° edição. LTC ano 1979.