Aula 10

TEORIA DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

META

Mostrar aos alunos a teoria da gravitação de Newton, pedra de toque da Mecânica newtoniana, elemento fundamental da primeira grande síntese da Física.

OBJETIVOS

Abrir a perspectiva, para o alunado, do que foi a primeira grande síntese em Física, a qual se consubstancia na Mecânica e na Teoria da Gravitação Universal de Newton. Mostrar o extraordinário alcance desta síntese, que se tornará nos séculos seguintes, o modelo de elaboração científica. Seus extraordinários resultados, e seu poder de previsão construíram a confiança nas ciências e em particular na Física que passou a ser a característica dos períodos modernos e contemporâneos da história da civilização.

PRÉ-REQUISITOS

O curso de Cálculo I. ter dominado à nível conceitual e operacional os elementos do cálculo integral e diferencial trabalhados nas aulas anteriores.

INTRODUÇÃO

A Teoria da Gravitação Universal de Newton é o feixo desta extraordinária realização que nasce com a publicação dos "Princípios Matemáticas da Filosofia Natural" por Newton em 1686.

Por que esta obra é considerada a primeira grande síntese da Física? Porque ela reúne em três leis e em uma expressão para a força de atração entre as massas, tudo que até então havia sido pensado e observado sobre o movimento durante toda história da humanidade. Se nos lembrarmos que as primeiras observações astronômicas sistemáticas, das quais temos notícia, ou seja, que já são do período histórico da evolução da humanidade, datam de 5.000 à 6.000 anos antes de Cristo, no Egito e na Mesopotâmia, vemos a quantidade de pesquisa e informação que estão sintetizadas nos "Princípios Matemáticos ...". Mas muito mais que isto, estas observações esparsas e desconexas, e mais todas as idéias sobre o movimento, que apareceram na Grécia antiga, as controvérsias astronômicas sobre a organização do universo, iniciadas na Grécia antiga, e retomadas na Renascença, ganham agora uma explicação que lhes descortina o sentido. E esta explicação, ao mesmo tempo absolutamente precisa, mas muito curta, dá coerência e sentido, tanto as observações astronômicas, como ao movimento na superfície da Terra, unificando, sob uma mesma lei, o movimento nos céus e o movimento na Terra.

Daí a expressão "primeira grande síntese da Física". Mas por que primeira? Há uma segunda? Esta 2ª síntese ainda não aconteceu. O extraordinário avanço da Física na virada do século XIX para o XX e nas primeiras décadas do século XX que trouxeram as duas novas teorias, a Teoria da Relatividade e a Mecânica Quântica, teoria estas que estabelecem os limites da mecânica newtoniana, que agora passa a ser vista como um caso partículas destas outras mais gerais, não levaram a uma unificação, a uma síntese como a de Newton. Pelo contrário, o aprofundamento do conhecimento que tem sido trazido pela física do século XX não tem levado a uma unificação de conceitos. Já a própria Mecânica Quântica e a Teoria da Relatividade, que são os dois pilares da Física contemporânea, não encontram, apesar de imensas tentativas, nenhuma facilidade de construir um substrato conceitual e operacional comum. O ideal de uma nova síntese como a grande síntese newtoniana, uma teoria do campo unificado tão arduamente perseguido pelos maiores físicos da atualidade, não foi ainda alcançada.

Assim uma nova síntese como a newtoniana, não foi mais alcançada no mundo contemporâneo.

A grande obra de Newton, além de se tornar no dizer de Einstein "um programa de 200 anos de pesquisa em Física", pois é na base de seus resultados e seus métodos, que se desenvolvem toda a elaboração científica até o início do século XX, transformou-se em um ideal de unificação, que jamais foi atingido novamente, pelo qual ainda se espera e que seria a 2ª grande síntese da Física.

A Teoria da gravitação tem, dentro desta grande obra que inclui além dela a Mecânica, particular importância. Ela foi a grande inspiradora da elaboração por Newton, do cálculo integral e diferencial. De fato, vimos a aplicação do Cálculo em praticamente todas as nossas aulas. Mas foi para poder chegar à sua famosa fórmula:

$$F = G\frac{(Mm)}{d^2}, \qquad [10–1]$$

partindo das leis de Kepler, que Newton teve a necessidade de desenvolver o Cálculo.

Fórmula [10–1] onde está dado o módulo da força $\vec{F}$, a constante *G* é a chamada constante da gravitação universal e vale:

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \qquad [10-2]$$

Newton estimou *G* a partir do valor aproximado da massa da Terra. A determinação experimental de *G* foi feita somente um século depois por Cavendish.

A fórmula [10-1] exprime que a "matéria atrai a matéria, na razão direta do produto de suas massas e na razão inversa do quadrado da distância entre elas". Vetorialmente a expressão [10-1] fica:

$$\vec{F}_{1,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2}\hat{r}_{1,2} \qquad [10-3]$$

Na Fig. [10-1], vemos que $\vec{F}_{21}$ é a força que a massa m_1 faz sobre a massa m_2. O vetor $\vec{r}_{1,2}^{\,2}$, é, como podemos ver na Fig. [10-1], o vetor que vai de m_1 a m_2. Vemos que a força $\vec{F}_{1,2}$ tem direção contrária à $\hat{r}_{1,2}$, donde o sinal menos. E vemos também que força é a de atração.

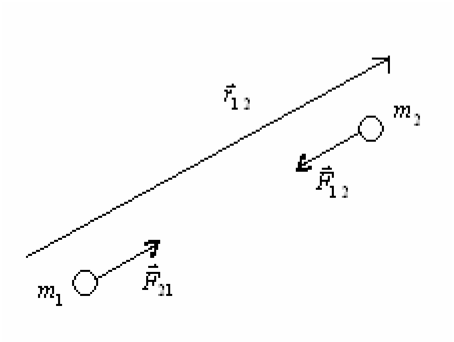

Fig. [10-1]

Das quatro interações da Física que são: Gravitacional; Eletromagnética; Interação Forte; e Interação Fraca, a interação gravitacional é a mais fraca. A interação eletromagnética é a interação entre as cargas. Ela é em última análise responsável pela consistência dos corpos, porque ela determina as dimensões dos átomos (elétrons unidos aos núcleos pela força de atração entre elétrons e prótons, moléculas formadas pela interação eletromagnética dos átomos através dos elétrons) e a estrutura das moléculas. A interação forte é que mantém prótons e nêutrons formando os núcleos atômicos e a interação fraca é que rege os processos de decaimento radiativo. Ambas estas interações são nucleares.

Podemos verificar o quanto é débil a interação gravitacional calculando a atração entre duas pessoas uma de *65 kg* e outra de *50 kg*. Usando a fórmula [10-1] vamos verificar que a força de atração entre elas é $8{,}67 \times 10^{-7}\,N$. O peso de uma pessoa de *50 kg* é *491 N*, ou seja, cerca de um bilhão de vezes a atração entre as duas pessoas que calculamos. Isto porque no caso do peso, uma das massas é a massa da Terra.

Assim a força de atração gravitacional só vai se tornando importante quando grandes massas são envolvidas. Isto acontece na formação dos buracos negros. Em estrelas de grandes dimensões, quando se esgota o processo de fusão nuclear que transforma o hidrogênio em hélio, todas as interações vão sendo superadas pela interação gravitacional. Há então o colapso da estrela (estamos omitindo as diferentes fases deste processo da evolução das estrelas), quando toda a matéria, já sem nenhuma estrutura se concentra em um único ponto (chamado de uma singularidade). Aí a atração gravitacional é de tal monta, que nem a luz pode escapar. Daí o nome de buraco negro.

As leis de Kepler

Na primeira aula já mencionamos que Newton conseguiu obter sua lei da gravitação universal, partindo das leis de Kepler e usando o ferramental, em grande parte por ele inventado, do Cálculo Integral e Diferencial.

Vejamos agora as três leis de Kepler:

1° lei - Todos os planetas descrevem órbitas elípticas, com o Sol ocupando um dos focos.

2° lei-O raio vetor que une o Sol a qualquer planeta, varre áreas iguais em tempos iguais.

3° lei-O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita.

A elipse é uma curva com a propriedade de que a somas das distâncias de cada um de seus pontos a dois pontos fixos chamados focos é constante. (Ver Fig. [10-2]).

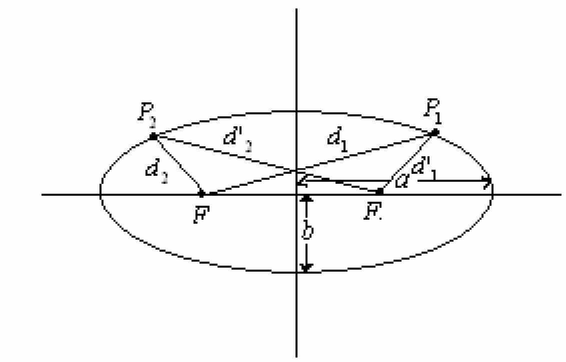

Fig. [10-2]

Na Fig. [10-2] a distância de P_1 a cada foco é de d_1 e d'_1, e de P_2 a cada foco é d_2 e d'_2. Temos então $d_1 + d'_1 = d_2 + d'_2$. Notemos que tanto P_1 quanto P_2 são pontos quaisquer da elipse. Ainda na Fig. [10-2] *a* é o semi eixo maior e *b* o semi eixo menor. No caso da órbita da Terra, ela é quase uma circunferência: a distância do ponto de maior afastamento do Sol (o afélio) a distância ao Sol é $1{,}52 \times 10^{11} m$, e na de menor afastamento (o periélio) é $1{,}48 \times 10^{11} m$.

A Fig. [10-3] ilustra a 2° lei de Kepler.

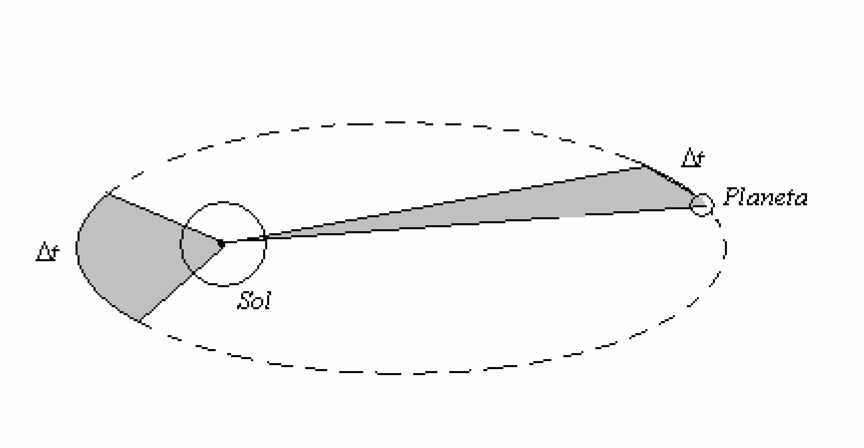

Fig. [10-3]

As duas áreas indicadas na Fig. [10-3] são iguais. Com isto vemos que o planeta se desloca com maior velocidade quando está mais próximo do Sol.

Podemos colocar a terceira lei em forma algébrica como:

$T^2 = Cr^3$

Onde T é o tempo para uma translação completa do planeta em torno do Sol, e r a distância média entre o planeta e o Sol.

No caso, por exemplo, do Sol e Júpiter a distância média é $5{,}2UA$. Podemos achar o período de evolução de jupiter em torno do Sol usando a 3° lei.

1 UA é a distância média entre a Terra e o sol

1 UA= $1{,}50 \times 10^{11} m$

A constante C é a mesma para todos os planetas. Aplicando então a 3° lei de Kepler a Terra temos:

$T_T^2 = Cr_T^3$

Donde:

$$C = \frac{T_T^2}{r_T^3}$$

Então:

$T_j^2 = Cr_J^3$

$$T_j^2 = \frac{T_T^2}{r_T^3} r_J^3$$

$$T_J = \left(\frac{r_J}{r_T}\right)^{\frac{3}{2}} T_T = \left(\frac{5{,}20UA}{1UA}\right)^{\frac{3}{2}}.1\,ano = 11{,}9\,anos\,.$$

Dedução das leis de Kepler

Newton mostrou que quando um corpo (planeta ou cometa) se desloca em torno do Sol, sujeito a uma força que varia com $\frac{1}{r^2}$, a trajetória do corpo ou é elipse, ou uma parábola ou hipérbole.

No caso de parábola ou hipérbole, são então corpos que passam nas imediações do Sol e depois não mais retornam. Para os planetas então Newton concluiu que a trajetória era elíptica.

Observação:

Na verdade, o raciocínio de Newton foi o inverso. Ele sabia pela 1° lei de Kepler que as órbitas eram elípticas. Daí chegou à conclusão que a força entre o sol e o planeta tem a dependência $\frac{1}{r^2}$ da distância entre o planeta e o sol (*r* é esta distância).

Mostraremos agora que a segunda lei é uma conseqüência da força central, ou seja, a força sobre o planeta é uma força sempre dirigida para o Sol, e da conservação do momento angular.

Na Fig. [10-4], mostramos o deslocamento infinitesimal $\vec{v}dt$ durante o tempo *dt.* A área varrida por uma reta que une o planeta ao Sol é:

$$dA = \frac{1}{2}\left|\,\vec{r} \times \vec{v}dt\,\right|$$

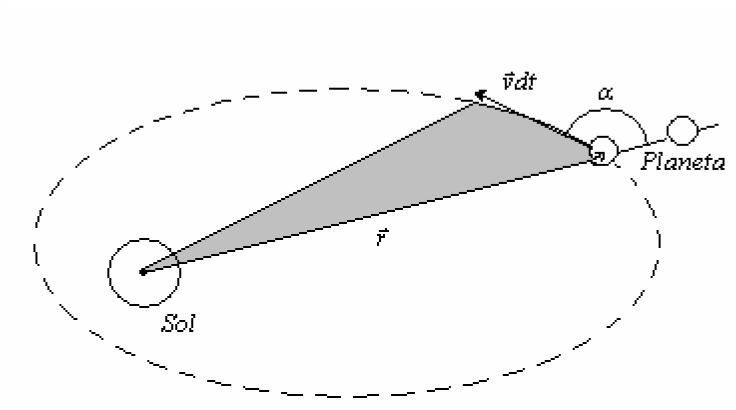

Fig. [10-4]

De fato, podemos ver que a área do paralelogramo da Fig. [10-5] é:

$$A = r \times h \qquad [10\text{-}4]$$

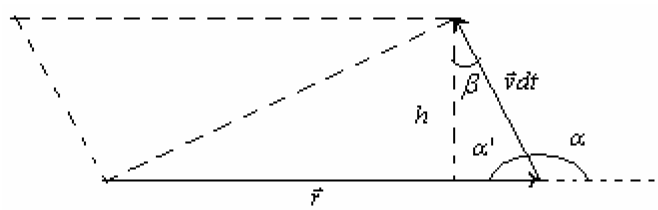

Fig. [10-5]

Mas,

$$\cos\beta = \frac{h}{vdt}.$$

Portanto:

$$h = vdt\cos\beta$$

Por sua vez sendo β e α' ângulos complementares $\left(\beta + \alpha' = \frac{\pi}{2}\right)$.

Então:

$\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha'$.

Mas:

$\operatorname{sen}\alpha' = \operatorname{sen}\alpha$

Então:

$h = vdt\operatorname{sen}\alpha$ [10-5]

Por sua vez:

$|\vec{r}\times\vec{v}dt| = r\,v\,dt\operatorname{sen}\alpha$ [10-6]

Então vemos, levando em conta o valor de *h* em [10-5] e colocando na expressão da área do paralelogramo, que a área do paralelogramo é dada por [10-6] e então a área varrida *dA* é:

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}dt| = \frac{1}{2m}|\vec{r}\times m\vec{v}|dt$$

Mas:

$|\vec{r}\times\vec{v}dt| = |\vec{r}\times\vec{p}| = L$, o módulo do momento angular.

E, então:

$dA = \frac{1}{2m}Ldt$ [10-7]

Como a força de atração entre o planeta e o Sol é uma força dirigida ao eixo de rotação, seu torque é nulo. Então o momento angular é constante e de [10-7] tiramos que:

$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ [10-8]

Onde $\frac{L}{2m}$ é uma constante. A equação [10-8] nos diz que a taxa de variação instantânea da área é a mesma em todos os pontos. Isto equivale a dizer que a área varrida é proporcional ao tempo (ou, o que é o mesmo, o tempo de percurso é proporcional à área). De fato, chamando em [10-8] $\frac{L}{2m} = k$ temos:

$$\frac{dA}{dt} = k \qquad [10\text{-}9]$$

Então:

$$dA = kdt \qquad [10\text{-}10]$$

Integrando a equação [10-10] de um instante *t = 0* e fazendo neste instante a área também ser *0*, até um tempo genérico t com área A, temos:

$$\int_0^A dA' = k \int_0^t dt'$$

$$A'\Big|_0^A = k\left[t'\Big|_0^t\right]$$

$$A = k\,t \qquad [10\text{-}11]$$

A equação [10-11] é a proporcionalidade pedida entre a área varrida e o tempo gasto em percorrer a órbita da 2° lei de Kepler.

Por último mostraremos que a lei da gravitação de Newton, acarreta a terceira lei de Kepler. Mas mostraremos isto, por simplicidade, para o caso de uma órbita circular. Seja um planeta descrevendo com velocidade *v* uma órbita circular de raio *r* em torno do Sol. A força de atração gravitacional entre a Terra e o Sol é a que dá a aceleração centrípeta do movimento.

$$F = m_P a$$

Onde *a* é a aceleração centrípeta, e, portanto é $\frac{v^2}{r}$. Então:

$$G\frac{M_S m_P}{r^2} = m_P \frac{v^2}{r} \qquad [10\text{-}12]$$

Então:

$$v^2 = \frac{GM_S}{r} \qquad [10\text{-}13]$$

Ao mesmo tempo, como o planeta cobre a distância $2\pi r$ em um tempo *T* temos:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad [10\text{-}14]$$

Então de [10-13] e [10-14] temos:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM_S}{r}$$

Donde:

$T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_S} r^3$, que é a terceira lei de Kepler.

Energia Potencial Gravitacional

Já temos muitas vezes mostrado neste curso que a aceleração da gravidade perto da superfície da Terra é *g*, ($g = 9{,}81 m/s^2$). Isto acontece quando consideramos corpos à uma altura *h* muito menor de R_T, o raio da Terra. Desprezando *h* diante de R_T (escrevemos $h << R_T$) todos estes corpos perto da superfície da Terra estão à uma mesma distância do centro da Terra. E já mostramos também que esta é a distância que aparece na fórmula de atração gravitacional quando consideramos a força peso de um corpo qualquer na superfície da Terra. Neste caso então, tomando o nível zero de energia potencial como sendo a própria superfície da Terra, a energia potencial de um corpo de massa *m*:

$$v = mgh \qquad [10\text{-}15]$$

Compreendemos agora um pouco mais que esta conhecida fórmula é fruto de uma aproximação, qual seja $h << R_T$.

Mas o que acontece se nos afastamos significativamente da superfície da Terra e a aproximação ($h << R_T$) que consiste em considerar a distância de qualquer corpo ao centro da Terra como sendo *h,* não mais puder ser tomada? Neste caso temos que usar a definição de energia potencial (Recordar a aula 6). Fazemos:

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad [10\text{-}16]$$

Como $\vec{F}$ e $d\vec{s}$ tem mesma direção (a direção radial), temos:

$$dU = -Fdr = -\left(-G\frac{M_T m}{r^2}\right)dr = G\frac{M_T m}{r^2}dr$$

Integrando:

$$U = \int dU = \int G\frac{M_T m}{r^2}dr$$

$$U = GMm\int r^{-2}dr + U_0$$

$$U = GMm\left(-\frac{1}{r}\right) + U_0$$

$$U = -\frac{GMm}{r} + U_0 \qquad [10\text{-}17]$$

Atribuir um valor a U_0 é escolher um nível como nível de energia de referência de energia potencial. (nível zero).

Uma escolha bastante conveniente neste caso é tomar $r = \infty$ como nível zero de energia potencial. Neste caso fazemos $U_0 = 0$ e temos:

$$U = -\frac{GMm}{r}, \text{ com } U = 0 \text{ em } r = \infty . \qquad [10\text{-}18]$$

Velocidade de escape

Se fizermos um gráfico da energia potencial pela distância ao centro da Terra temos (Fig. [10-5]):

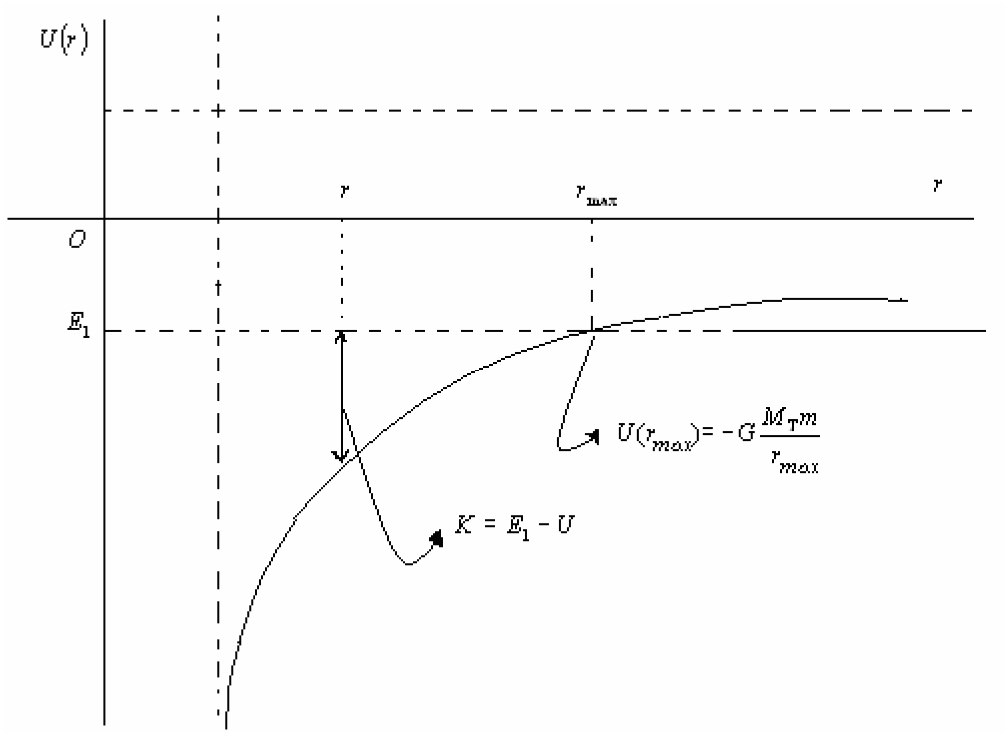

Fig. [10-5]

Seja uma energia mecânica total E_1. Vemos que em um ponto *r* (raio *r*) do eixo das abscissas a energia cinética K é dada por $E_1 - U$. Em r_{MAX} não há energia cinética, e a energia mecânica total é exclusivamente potencial. Os estados ligados são aqueles em que a energia mecânica total é menor que zero. Um estado em que à energia mecânica total seja maior que zero é um estado não-ligado (no nosso gráfico, e, portanto na escolha de nível de referência de energia potencial dado por [10-18], ou seja, $U = 0$ em $r = \infty$).

A velocidade de escape é aquela então em que a energia cinética mais a potencial é igual a zero. Fazemos então:

$$E = K + U = 0$$

Donde:

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = 0$$

$$v_e^2 = \frac{2GM_T}{R_T}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \qquad [10\text{-}19]$$

Por outro lado:

$$F = G\frac{M_T m}{r^2}$$

Como $a = \dfrac{F}{m}$

$$a = \frac{GM_T}{r^2}$$

Na superfície da Terra temos:

$$g = \frac{GM_T}{{R_T}^2} \qquad [10\text{-}20]$$

Voltando a [10-19]:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T^2}R_T}$$

Introduzindo agora *g* de [10-20] obtemos a velocidade de escape:

$$v_e = \sqrt{2gR_T}$$

A velocidade de escape é a velocidade mínima para que um corpo tenha energia cinética suficiente para escapar do campo gravitacional da Terra.

CONCLUSÃO

Na "dedução" das leis de Kepler, mostramos como é possível admitindo a lei da gravitação universal de Newton, chegar às leis de Kepler. A primeira lei (das órbitas elípticas dos planetas) é conseqüência da força de atração gravitacional ser inversamente proporcional ao quadrado da distância. A segunda vem do fato que da força de atração ter direção do eixo de rotação (força central) e não exercer torque. Assim o momento angular é constante e tiramos a proporcionalidade entre as áreas varridas e o tempo gasto em percorrer a trajetória correspondente. Quanto à terceira lei, ela foi simplesmente comprovada experimentalmente.

Esta é uma possível abordagem pedagógica do problema, destinada a pelo menos mostrar alguma relação entre as leis de Kepler e a lei da gravitação universal de Newton. Na realidade a construção da teoria foi pelo caminho inverso. As três leis de Kepler significaram um enorme e extraordinário esforço para traduzir os dados de Ticho Brahe, de uma precisão ímpar para a época, em uma sistematização através de leis, mas leis empíricas, que pudessem de alguma forma descrever o movimento dos planetas. A passagem destas leis para a fórmula da gravitação é um passo cuja genialidade nunca será suficientemente exaltada. Em primeiro lugar foi preciso admitir uma força à distância, o que consistiu em uma hipótese extraordinariamente imaginativa e ousada. Em seguida, foi preciso encontrar a forma desta força de tal maneira que ela pudesse dar o movimento descrito pelas leis de Kepler.

RESUMO

Na introdução procuramos dar uma perspectiva da Teoria da Gravitação de Newton, como pedra de toque da 1° Grande Síntese de Física. Discutimos o significado desta designação, mostrando o ideal, ainda não alcançado de uma 2° Grande Síntese.

Comparamos a interação gravitacional com as demais interações e mencionamos sua importância na evolução das estrelas e na criação dos buracos negros.

Explicamos as leis de Kepler e vimos a relação destas leis com a grande lei da gravitação universal. Em seguida deduzimos a energia potencial**,** tanto na superfície da Terra, quanto afastado dela. Definimos estado ligado e não ligado e calculamos a velocidade de escape.

ATIVIDADE

1 - Porque dizemos que a Mecânica newtoniana e sua teoria da gravitação universal constituem a 1° grande síntese de Física.

2 - Mostre que a 2° lei de Kepler é uma decorrência da direção da força de atração entre o Sol e os planetas.

Problemas

1 - Imagine que a interação atrativa entre uma estrela de massa M e um planeta de massa *m,* muito menor do que M, teima a forma $F = KMm/r$, com K a constante gravitacional. Qual a relação entre o raio da órbita circular do planeta e o seu período de revolução em torno da estrela?

2 - A massa da Terra é de $5{,}97 \mathbf{x} 10^{24}$ kg e o seu raio é de 6370 km. O raio da Lua é de 1738 km. A aceleração dá gravidade na superfície da Lua é $1{,}62 \; m/s^2$. Qual a razão entre a densidade média da Lua e a da Terra?

3 - Uma massa puntiforme m_0 está sobre a superfície de uma grande esfera de massa M e raio R. Que trabalho é necessário para remover a pequena massa até uma grande distância da esfera?

4 - Um corpo cai, do repouso, de uma altura de 4×10^6 m acima da superfície terrestre, qual a sua velocidade ao atingir o solo, sem levar em conta a resistência do ar?

5 - Uma sonda espacial, disparada da Terra com a velocidade inicial v_i, deve ter a velocidade de 60 km/s a uma grande distância da Terra. Qual o valor de v_i?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Tipler P.A. Física, volume 1. LTC- Livros Técnicos e Científicos S. A,1999.
Stewart, J. Cálculo, 4° Edição, Learning Thomsom-Pioneira,Ano 2001.