Aula 2

MECÂNICA RELATIVISTA – PARTE II

META

Dar continuidade ao estudo do movimento relativo a partir das transformadas de Lorentz; detalhando-a e observando a genial interpretação dada por Einstein àquelas *estranhas equações* desenvolvidas pelo físico holandês Lorentz. Mostrar ainda as fortes implicações dos postulados de Einstein na Dinâmica das partículas em movimento.

OBJETIVO

O estudante ao fim dessa aula deve ser capaz de compreender as transformações de Lorentz bem como seu alcance e implicações, assim como a interpretação que Albert Einstein concebeu para a aparente contradição implícita na citada transformação.

Entender as conseqüências dos postulados de Einstein nos conceitos de momento linear, energia cinética e como massa e energia relacionam-se a partir da célebre equação de Einstein ($E = æm.c^2$).

PRÉ-REQUISITOS

Postulados de Einstein para a cinemática dos movimentos. Conceito de força, energia e momento linear.

Introdução

Quando Albert Einstein formulou seus postulados da Teoria da Relatividade Especial, ele procurava responder a algumas aparentes incoerências e inconsistências entre os experimentos dos físicos americanos Michelson-Morley e as equações do grande físico holandês Hendrick Lorentz (1853-1928).

Como vimos na aula anterior; Michelson e Morley demonstraram que a velocidade da luz no vácuo era sempre a mesma, em relação à Terra, qualquer que fosse a direção de movimento desta relativamente à luz, sendo assim a idéia de um meio absoluto, o éter, seria desnecessária. Foi nesse contexto que Lorentz, *quase em um ato de desespero*, apresentou uma correção que fosse capaz de reconciliar a existência do éter com os resultados da experiência do interferômetro de Michelson e Morley. Ele corajosamente assumiu que objetos em movimento contraem seu comprimento na direção em que se movem como demonstraremos logo a seguir.

Coube a genialidade de Einstein demonstrar que não havia inconsistência alguma e que, de fato, esse "*meio mágico*" (éter) seria realmente desnecessário.

3 - Transformação de Lorentz

O 2º postulado de Einstein afirma que a velocidade da luz é a mesma para qualquer observador em movimento relativo uniforme. Como foi visto anteriormente, a transformação de Galileu é inconsistente com esta premissa. É necessário substituí-la por outra transformação onde a velocidade da luz seja invariante ou que não tenha dependência nenhuma a respeito do movimento relativo dos observadores.

Nas duas conseqüências dos postulados de Einstein, nós vimos que $t' \neq t$ (por causa da dilatação do tempo) e $l \neq l'$ (por causa da contração do espaço). Estes dois novos conceitos da mecânica relativística precisam de uma nova transformação que transforme um referencial inercial em outro, mantendo a lei de Newton válida, quando $V/_c \ll 1$, se chegue na transformação de Galileu.

Neste estudo, não estamos colocando os fatos na ordem cronológica, mas de uma maneira que os conceitos aqui abordados estejam bem claros para o aluno. Como está escrito, parece que os postulados de Einstein deram sustentação a Lorentz para deduzir a transformação de Lorentz, mas, na verdade, o que ocorreu foi exatamente o contrário.

Vamos admitir um pulso de luz (PL), na direção paralela aos eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}'$ dos sistemas de referências, sai da origem em O em t = 0 PL e parte também de O' em t´= 0, levando em consideração que as origens se coincidem teremos t = t´= 0. Depois do PL ter partido, sabe-se que $t' \neq t$, então as coordenadas que posicionam o PL são modificadas de (x,y,z) para (x,y,z,t) e (x´,y´,z´) para (x´,y´,z´,t´), conforme a figura 3.1.

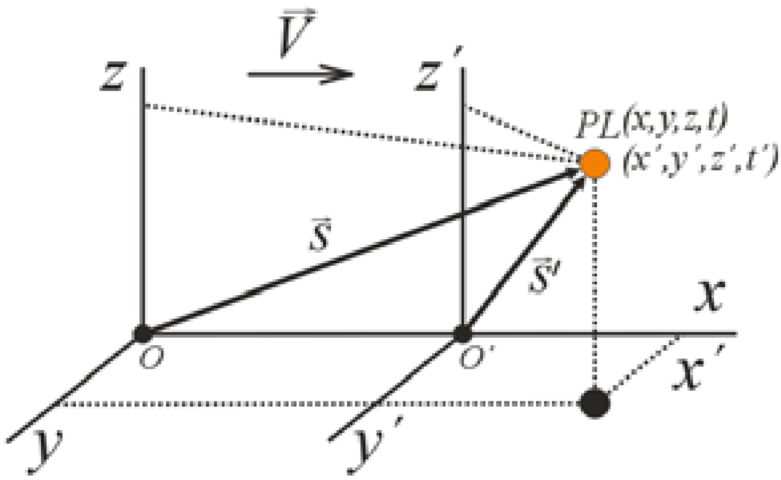


Figura 3.1 Referenciais O e $O´$ movendo-se com velocidade relativa V.

Como o PL move-se paralelo aos eixos x e x´, então os valores das outras duas coordenadas serão idênticos, tanto no sistema O como no $O´$, assim

$$\boldsymbol{y = y´, \quad z = z´} \tag{3.1}$$

A equação clássica $x = x´ + Vt$ (equação 1.3) de deslocamento no eixo $\boldsymbol{x}$ é falha para velocidades relativísticas. Uma modificação possível é multiplicá-la por uma constante de proporcionalidade (γ) que independa das coordenadas e como $\boldsymbol{t´ \neq t}$ devemos trocar t por t´ , assim

$$\boldsymbol{x = \gamma(x´ + Vt´)} \tag{3.2}$$

A transformação inversa possui a mesma forma com a velocidade negativa, então

$$\boldsymbol{x´ = \gamma(x - Vt)} \tag{3.3}$$

Os postulados de Einstein nos garante que as componentes $\boldsymbol{x}$ do PL nos referenciais $\boldsymbol{O}$ e $\boldsymbol{O´}$ são $x = ct$ e $x´ = ct´$, respectivamente. Substituindo estas duas condições nas equações 3.2 e 3.3, obtém-se

$$ct = \gamma(ct´ + Vt´) = \gamma(c + V)t´ \tag{3.4}$$

$$ct´ = \gamma(ct - Vt) = \gamma(c - V)t \tag{3.5}$$

Multiplicando membro a membro as equações 3.4 e 3.5, ficamos com

$$c^2tt´ = \gamma^2(c + V)(c - V)tt´$$

$$c^2 = \gamma^2(c + V)(c - V)$$

$$c^2 = \gamma^2(c^2 - cV + cV - V^2) = \gamma^2(c^2 - V^2)$$

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2} = \frac{1}{\frac{c^2}{c^2} - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}} \tag{3.6}$$

Onde γ é uma constante chamada ***fator de Lorentz***. Como $(1 - \frac{V^2}{c^2}) < 1$ na equação 3.6, $\gamma > 1$. Na situação que $V/c \ll 1 \rightarrow \gamma \approx 1$, as equações 3.2 e 3.3, se transformação em equações clássicas. Mostrando que o valor de γ está consistente com a mecânica newtoniana, onde os valores das velocidades são extremamente baixos em relação à velocidade da luz.

Para obter a transformação para o tempo vamos introduzir a equação 3.2 em 3.3, assim

$$x' = \gamma(\gamma(x' + Vt') - Vt)$$

$$\frac{x'}{\gamma} = \gamma(x' + Vt') - Vt$$

$$Vt = -\frac{x'}{\gamma} + \gamma(x' + Vt')$$

$$t = -\frac{x'}{\gamma V} + \gamma(\frac{x'}{V} + \frac{Vt'}{V}) = -\frac{x'}{\gamma V} + \gamma\left(\frac{x'}{V} + t'\right) = \gamma(-\frac{x'}{\gamma^2 V} + \frac{x'}{V} + t')$$

$$t = \gamma\left[\frac{x'}{V}\left(-\frac{1}{\gamma^2} + 1\right) + t'\right] = \gamma\left[\frac{x'}{V}\left(-\frac{1}{\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + 1\right) + t'\right]$$

$$t = \gamma\left[\frac{x'}{V}\left(-1 + \frac{V^2}{c^2} + 1\right) + t'\right] = \gamma\left[\frac{x'}{V}\left(\frac{V^2}{c^2}\right) + t'\right] = \gamma(\frac{Vx'}{c^2} + t')$$

$$\boldsymbol{t = \gamma(t' + \frac{Vx'}{c^2})} \tag{3.7}$$

Para obtermos a equação inversa de 3.7, deve-se introduzir a equação 3.3 em 3.2, assim

$$x = \gamma(\gamma(x - Vt) + Vt')$$

$$\frac{x}{\gamma} = \gamma(x - Vt) + Vt'$$

$$Vt' = \frac{x}{\gamma} - \gamma(x - Vt)$$

$$t' = \gamma\left(\frac{x}{\gamma^2 V} - \frac{x}{V} + t\right) = \gamma\left(\frac{x}{V}\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) + t\right) = \gamma\left[\frac{x}{V}\left(\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right) + t\right]$$

$$t' = \gamma\left[\frac{x}{V}\left(1 - \frac{V^2}{c^2} - 1\right) + t\right]$$

$$\boldsymbol{t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)} \tag{3.8}$$

A transformação de Lorentz (transformação relativística) completa é expressa pelas equações de 3.9 a 3.12.

$$\boldsymbol{x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z'} \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right)} \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z} \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right)} \tag{3.12}$$

Com a transformação de Lorentz é possível relacionar as coordenadas x, y, z e o tempo t, de um evento no referencial ***O*** às coordenadas x´, y´, z´ e o tempo t´, do mesmo evento observado pelo referencial ***O´***, o qual se move com velocidade V paralelo ao eixo x, relativa ao referencial ***O***.

Exemplo 3.1

Mostre que a dilatação do tempo continua válida com a introdução da constante de proporcionalidade (γ) (equação 3.6).

Vamos considerar dois eventos que ocorrem em um determinado ponto x_0' do referencial O' nos tempos t_1' e t_2'. Para o referencial O podemos determinar os tempos t_1 e t_2, para este mesmo evento usando a equação (3.10), então

$$t_1 = \gamma(t_1' + \tfrac{Vx_0'}{c^2}) \quad \text{e} \quad t_2 = \gamma(t_2' + \tfrac{Vx_0'}{c^2})$$

fazendo a diferença, encontramos

$$t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' + \frac{Vx_0'}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1' + \frac{Vx_0'}{c^2}\right)$$

$$t_2 - t_1 = \gamma t_2' + \gamma\frac{Vx_0'}{c^2} - \gamma t_1' - \gamma\frac{Vx_0'}{c^2}$$

$$t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1')$$

$$\boldsymbol{\Delta t = \gamma \Delta t'}$$

Sabemos que $\boldsymbol{\gamma} > 1 \Rightarrow \Delta \boldsymbol{t} > \Delta t'$, então o intervalo medido em qualquer outro referencial é sempre maior do que o tempo próprio, o que corresponde à ***dilatação do tempo***.

Exemplo 3.2

Uma nave espacial está viajando e passa pela Terra com velocidade relativa V = 0,8c. O rádio da nave sofreu uma pane e eles ficaram tentando estabelecer a comunicação e ela foi retornada depois dos pilotos concertarem o rádio, tarefa que demorou 2,5h. Qual foi o tempo esperado pela central de controle na Terra.

Usando a equação 3.6, temos

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{0{,}64c^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}64}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}36}} = \frac{1}{0{,}6} = 1{,}66$$

e finalmente temos o tempo que a torre ficou sem escuta na Terra

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = 1{,}66.2{,}5 = \mathbf{4{,}15\ h}$$

3.1 Derivação da transformação de Lorentz para velocidades

Derivando as equações 3.9 e 3.10 em relação a t, temos

$$\frac{dx}{dt} = \gamma\left(\frac{dx'}{dt} + V\frac{dt'}{dt}\right), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} \tag{3.13}$$

$$\frac{dt}{dt} = \gamma\left(\frac{dt'}{dt} + \frac{V}{c^2}.\frac{dx'}{dt}\right) \tag{3.14}$$

As equações (3.13) e (3.14), podem ser escritas como

$$dx = \gamma(dx' + Vdt') = \gamma dt'\left(\frac{dx'}{dt'} + V\right), \; dy = dy', \; dz = dz' \tag{3.15}$$

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{Vdx'}{c^2}\right) = \gamma dt'\left(1 + \frac{V}{c^2}.\frac{dx'}{dt'}\right) \tag{3.16}$$

Como $v_{x'} = \frac{dx'}{dt'}$, as equações 3.15 por 3.16, ficam

$$dx = \gamma dt'(v_{x'} + V), \;\; dy = dy', \;\; dz = dz' \qquad (3.17)$$

$$dt = \gamma dt'(1 + \frac{V}{c^2}.v_{x'}) \qquad (3.18)$$

Dividindo as equações 3.17 por 3.18, temos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\gamma dt'(v_{x'} + V)}{\gamma dt'(1 + \frac{V}{c^2}.v_{x'})}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma dt'(1 + \frac{V}{c^2}.v_{x'})}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma dt'(1 + \frac{V}{c^2}.v_{x'})}$$

Usando que $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}, v_{y'} = \frac{dy'}{dt'}, v_{z'} = \frac{dz'}{dt'}$, temos

$$v_x = \frac{v_{x'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}.v_{x'}}, \qquad v_y = \frac{v_{y'}}{\gamma(1 + \frac{V}{c^2}.v_{x'})}, \qquad v_z = \frac{v_{z'}}{\gamma(1 + \frac{V}{c^2}.v_{x'})}$$

Usando que $\beta = \frac{V}{c}$, finalmente

$$\boldsymbol{v_x = \frac{v_{x'} + V}{1 + \beta\frac{v_{x'}}{c}}} \qquad (3.19)$$

$$\boldsymbol{v_y = \frac{v_{y'}\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta\frac{v_{x'}}{c}}} \qquad (3.20)$$

$$\boldsymbol{v_z = \frac{v_{z'}\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta\frac{v_{x'}}{c}}} \qquad (3.21)$$

As equações de 3.19 a 3.21 correspondem a transformação de Lorentz da velocidade.

Para $\beta \to 0$, que corresponde a $V \ll c$ (limite da mecânica clássica), recupera-se a transformação de Galileu para velocidade, conforme

$$v_x = v_{x'} + V, \quad v_y = v_{y'}, \quad v_z = v_{z'}$$

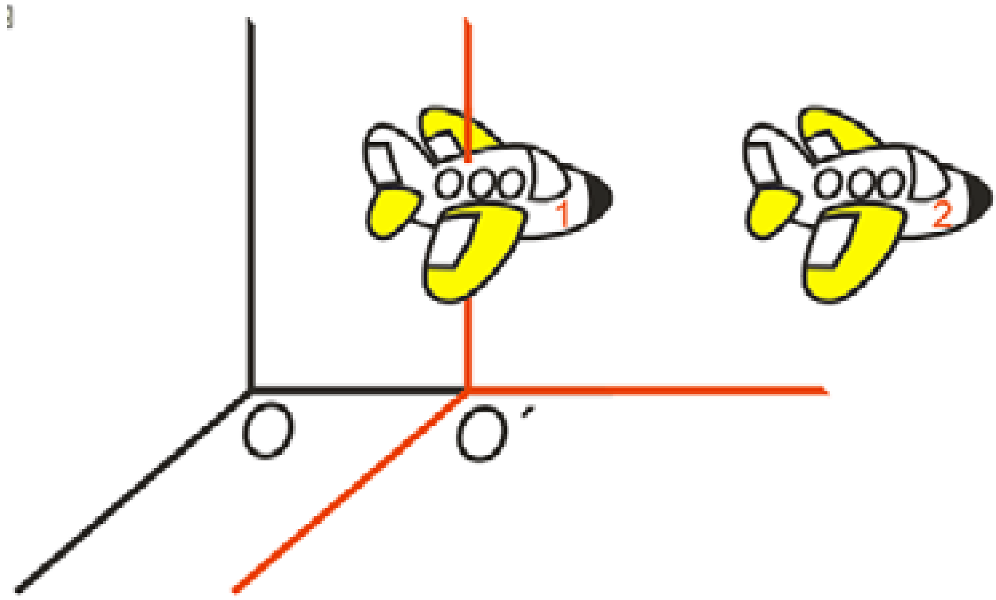
No caso especial em que o deslocamento é paralelo ao eixo x, $v_{x'} = v$ e $v_{y'} = v_{z'} = 0$, e assim

$$\boldsymbol{v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v\,V}{c^2}}} \qquad \textbf{(3.22)}$$

Exemplo 3.3

Um super avião se move ao longo do eixo x, afastando-se de um observador a uma velocidade de 0,7c. Um segundo avião se move também no eixo x, afastando-se tanto do primeiro avião como do observador com uma velocidade de 0,7c em relação ao primeiro avião. Qual é a velocidade do segundo avião em relação ao observador?

O observador está em repouso em relação a O e que o primeiro avião está em repouso em relação a $O´$, em outras palavras, o primeiro avião é o próprio referencial que se desloca com $V = 0{,}7c$ em relação a O. A velocidade do segundo avião no referencial $O´$ será $v´ = 0{,}7c$, pois esta velocidade é em relação ao primeiro avião.



Utilizando a equação 3.22 podemos determinar a velocidade do segundo avião em relação ao observador, assim

$$v = \frac{v´ + V}{1 + \frac{v\,V}{c^2}} = \frac{0{,}7c + 0{,}7c}{1 + \frac{(0{,}7c)(0{,}7c)}{c^2}} = \frac{1{,}4c}{1{,}49} = 0{,}94c$$

O resultado obtido com este exemplo é bem distinto do clássico ($0{,}7c + 0{,}7c = 1{,}4c$), que resulta em uma velocidade impossível ($v > c$). Para partículas, a velocidade c não é atingida, pois como veremos mais adiante, a massa inercial cresce muito com o aumento da velocidade, dando-lhe uma inércia muito grande. A velocidade da luz é um limite inatingível para um corpo com massa. Por outro lado, existem partículas sem massa que andam sempre a velocidade da luz, é o caso dos fótons.

Exemplo 3.4

Suponha que um fóton se desloca a velocidade da luz c em relação ao referencial O´, na direção do eixo x. Determine a sua velocidade em relação ao referencial O.

A velocidade relativa entre os referenciais O e O' não foi fornecida, então vamos supor V e utilizando a equação 3.22, temos

$$v = \frac{c+V}{1+\frac{cV}{c^2}} = \frac{c+V}{1+\frac{V}{c}} = \frac{c+V}{\frac{1}{c}(c+V)} = \frac{c(c+V)}{c+V} = c$$

Como era esperada pelos postulados de Einstein, a velocidade da luz $\boldsymbol{c}$ é mesma nos dois referenciais e é independente da velocidade $\boldsymbol{V}$.

3.2 Dinâmica relativística
3.2.1 Momento linear

Toda a cinemática newtoniana foi reformulada e agora está faltando novas formulações para uma nova dinâmica newtoniana e que esta seja compatível com a nova cinemática.

Na dinâmica relativística o momento continua sendo definido pelo produto da massa pela velocidade, porém com uma novidade, a massa depende da velocidade da partícula, então

$$p = m(v).v \tag{3.23}$$

Com uma série de deduções que não cabe no nível deste curso, chegou à conclusão que a massa relativística varia segundo a equação 3.24

$$\boldsymbol{m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \tag{3.24}$$

onde $m(massa\ de\ repouso)$ é o valor próprio de $m(v)(massa\ relativística)$ obtido quando a partícula que está em repouso. Porém, para que o denominador não se anule, a velocidade $\boldsymbol{v}$ não pode atingir (nem superar) o valor $\boldsymbol{c}$ (figura 3.2). ***O que aumenta com a velocidade não é a quantidade de matéria do corpo, mas sim sua massa inercial – aumenta a resistência da partícula ao movimento.***

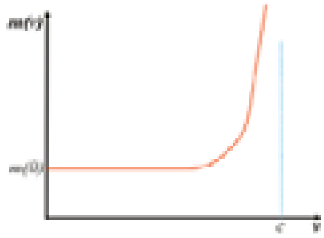


Figura 3.2 Variação da massa relativística com a velocidade. Próximo da velocidade da luz (c), a massa inercial cresce para o infinito. Para baixas velocidades, a massa inercial permanece quase inalterada, indicando o limite clássico.

Introduzindo a equação 3.24 em 3.23, temos

$$\boldsymbol{p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mv} \tag{3.35}$$

A equação 3.35 é o momento relativístico de uma partícula. Podemos notar que, para $v/c \ll 1$ temos $p = mv$, o limite da física clássica é recuperado.

Analisando a equação do momento relativístico, pode-se notar quanto mais cresce a velocidade, a resistência a aceleração crescerá também devido a massa relativística depender da velocidade. A resistência a aceleração tende para o infinito quando $v \rightarrow c$, como pode ser visto na figura 3.2.

Exemplo 3.5

Uma nave tem uma massa de repouso igual a 1 tonelada, desloca com relação a um sistema inercial O. Qual deveria ser a velocidade v da nave para que a mesma sofresse um aumento na massa inercial de 1g?

Elevando ao quadrado a equação 3.24, temos

$$m(v)^2 = \left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{m}{m(v)}\right)^2$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m}{m(v)}\right)^2 \text{ e como}$$

$$m = 1\, tonela = 1000\, kg = 1.000.000\, g$$

$m(v) = 1.000.001\, g,\ c = 3.10^8\ m/s$, então

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{1000000}{1000001}\right)^2 = 1 - (0{,}99999)^2$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - 0{,}99998 = 0{,}00002 \rightarrow v^2 = 0{,}00002.c^2$$

$$v = 0{,}0045.c = 0{,}0045.3.10^8 = 0{,}0135.10^8 = 1{,}35.10^6\ m/s$$

A nave deveria ter uma velocidade $v = 1{,}35.10^6\ m/s$, que corresponde em ordem de grandeza uma velocidade 100 vezes menor do que a velocidade da luz.

3.2.2 Energia cinética

O trabalho realizado por uma força resultante ($F_r = \frac{dp}{dt}$) de acelerar uma partícula da posição de repouso até uma velocidade (v) é a energia cinética que a partícula adquire. Este mesmo conceito é também aplicado na mecânica newtoniana. Usando que $v = \frac{ds}{dt}$, obtemos

$$E_c = \int_0^v F_r\, ds = \int_0^v \frac{dp}{dt} ds = \int_0^v \frac{dp}{dt} vdt = \int_0^v vdp$$

Integrando por partes e usando a equação 3.35, temos

$$E_c = vp - \int_0^v pdv = \frac{mv^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - m\int_0^v \frac{vdv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{mv^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - mc\int_0^v \frac{vdv}{(c^2 - v^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{mv^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - mc\left[-(c^2 - v^2)^{1/2}\right]_o^v$$

$$= \frac{mv^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + mc\left[(c^2 - v^2)^{1/2}\right]_0^v$$

$$= \frac{mv^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + mc\left[(c^2 - v^2)^{1/2} - c\right]$$

$$= \frac{mv^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} - mc^2$$

$$= \frac{mv^2 + mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - mc^2 = \frac{mv^2 + mc^2 - mv^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - mc^2$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{E_c = mc^2\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1\right] = mc^2(\gamma - 1)} \qquad (3.36)$$

onde $\gamma = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$. A equação 3.36 descreve a energia cinética relativística de uma partícula que se move em velocidade v em relação a um observador.

Usando o fato de que o denominador da equação 3.36 pode ser expandido em uma série, temos

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} + \ldots \qquad (3.37)$$

introduzindo a equação 3.37 na 3.36, ficamos

$$E_c = mc^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3v^4}{8c^4} - 1\right) = \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^4}{8c^2}$$

Levando em consideração que no limite da física clássica $v \ll c$, o primeiro termo corresponde a energia cinética da mecânica newtoniana e o segundo é muito pequeno, então ele pode ser ignorado. Seguindo este raciocínio, a mecânica de Newton é uma aproximação da mecânica de Einstein, onde é unicamente válida para pequenas velocidades ou energias.

A ***energia total*** (E) de uma partícula é a soma da ***energia cinética*** (E_c) mais a ***energia de repouso*** (mc^2) – energia que a partícula possui quando $v = 0$,

$$E = E_c + mc^2 = mc^2\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1\right] + mc^2$$

$$\boldsymbol{E = \frac{mc^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \gamma mc^2} \qquad (3.38)$$

Através da equação 3.38, percebe-se que no repouso, a cada massa (m) pode ser associada uma energia (E) e vice-versa, assim

$$E = mc^2 \quad ou \quad m = E/c^2$$

Pode-se também, se uma massa sofrer uma variação (Δm) teremos uma variação na energia (ΔE) e vice-versa, então

$$\boldsymbol{\Delta E = (\Delta m)c^2} \qquad (3.39)$$

A equação 3.39 foi proposta por Einstein, mas já foi amplamente comprovada experimentalmente e passou a ser a equação mais conhecida pelas pessoas leigas – a imagem de Einstein é sempre associada a $E = mc^2$.

Pode-se obter uma expressão que correlaciona momento com energia multiplicando a equação 3.35 por c^2, temos

$$pc^2 = \frac{vmc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

introduzindo equação 3.38, fica

$$\boldsymbol{p = \frac{Ev}{c^2} = \frac{E}{c}\frac{v}{c}} \qquad (3.40)$$

Através da equação 3.40 pode-se determinar o momento na unidade MeV/c sabendo-se o valor da velocidade (v). Como o quociente energia/velocidade tem as mesmas dimensões que o momento, introduziu-se a unidade MeV/c como unidade mais conveniente para partículas elementares.

Uma manipulação matemática pode conduzir a expressão entre momento e energia sem a velocidade explícita, usando que

$$p = \gamma m v,\ E = \gamma m c^2 \quad e \quad \beta = \frac{v}{c}, \text{ assim}$$

$$p = \gamma m c \frac{v}{c} = \gamma m c \beta \rightarrow p^2 = \gamma^2 m^2 c^2 \beta^2$$

$$E^2 = \gamma^2 m^2 c^4, \text{ sabendo que}$$

$$\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = 1 \rightarrow \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = 1 \text{ e}$$

$$m^2 c^4 (\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2) = m^2 c^4 \rightarrow \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 c^2 \beta^2 c^2 = (mc^2)^2, \text{ então}$$

$$E^2 - p^2 c^2 = (mc^2)^2$$

$$\boldsymbol{E^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2} \tag{3.41}$$

lembrando que E = *energia total, p = momento e m = massa de repouso.*

Casos extremos analisados a partir da equação 3.41:

Caso 1: quando uma partícula tem velocidade v = 0, o momento linear p = 0 e a energia total corresponde a energia de repouso ($E = mc^2$);

Caso 2: quando uma partícula com massa m = 0, a energia total corresponde a E = pc, é o caso do fóton.

A partir da equação 3.41 tanto podemos determinar o momento na unidade de $\boldsymbol{MeV/c}$ como a massa de repouso em $\boldsymbol{MeV/c^2}$. Como já foi dito anteriormente, estas são unidades mais usuais em estudos de partículas elementares, pois evita o uso de números muito pequenos.

Exemplo 3.6

Determine o equivalente energético de uma unidade atômica ($\boldsymbol{1u = 1,6605x10^{-27}\ kg}$).

Usando que $E = mc^2$ e $c = 3x10^8\ m/s$, temos

$$E = 1{,}6605x10^{-27}x(3x10^8)^2 = 1{,}6605x10^{-27}x9x10^{16}$$

$$= 14{,}9445x10^{-11} = 1{,}4945x10^{-10}\ J$$

Sabe-se que $1\ J = 6{,}242x10^{12}\ MeV$, então

$$E = 9{,}328669x10^2 = 932{,}867\ MeV$$

Quando se exprime em unidades de massa atômica (u) a massa de uma partícula, a energia de repouso em MeV é escrita da seguinte forma:

$$E = 932{,}867m\ MeV$$

Exemplo 3.7

Uma partícula foi acelerada e alcançou a velocidade de 0,8c. Determine a energia cinética necessária para atingir esta velocidade e faça uma comparação entre a energia newtoniana e relativística.

A energia cinética relativística é dada por

$$E_c = mc^2\left[\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1\right] = mc^2\left[\frac{1}{\left(1-\frac{0{,}64c^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1\right]$$

$$= mc^2\left[\frac{1}{(0{,}36)^{1/2}} - 1\right] = mc^2\left[\frac{1}{0{,}6} - 1\right] = 0{,}66mc^2$$

e energia cinética newtoniana é igual a

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = mc^2\frac{v^2}{2c^2} = mc^2\frac{0{,}64c^2}{2c^2} = 0{,}32mc^2$$

Finalmente,

$$\frac{E_c^{relativística}}{E_c^{newtoniana}} = \frac{0{,}66mc^2}{0{,}32mc^2} \cong 2{,}06$$

A energia $E_c^{relativística}$ é mais de 100% superior a energia $E_c^{newtoniana}$. Quanto mais o valor de v se aproxima de c, esta discrepância será maior. Por outro lado, para pequenos valores de v, a razão $\frac{E_c^{relativística}}{E_c^{newtoniana}}$ se aproxima de 1.

Exemplo 3.8

Determine a velocidade de um elétron com 10 MeV de energia cinética sabendo que ele possui 0,511 MeV de energia de repouso.

Através dos dados do problema nós temos que $E_c = 10\, MeV, mc^2 = 0{,}511\, MeV$ e como energia total é $E = Ec + mc^2$, temos

$E = 10 + 0{,}511 = 10{,}511\, MeV$ e como $E = \delta mc^2$, temos

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} \rightarrow \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{E}{mc^2} \rightarrow \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{mc^2}{E}$$

$$\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\right]^2 = \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \rightarrow v = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}\; c^2$$

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{0{,}511}{10{,}511}\right)^2}\; c = 0{,}9988c$$

Com a energia cinética de 10 MeV, o elétron se desloca com uma velocidade muito próxima a da velocidade da luz, que equivale a 99,88% da velocidade da luz.

Exemplo 3.9

Determine o momento linear do elétron do exemplo 3.8.

Como $v = 0{,}9988c$, $E = 10{,}511\ MeV$ e usando a equação 3.40, temos

$$p = \frac{Ev}{c^2} = \frac{10{,}511\ x\ 0{,}9988c}{c^2} = \frac{10{,}4983868}{c} = \mathbf{10{,}5\ MeV/c}$$

O momento poderia ter sido calculado na unidade de kg.m/s. Como o quociente energia/velocidade tem as mesmas dimensões que o momento, introduziu-se a unidade MeV/c como unidade mais conveniente para partículas elementares.

ATIVIDADES

1) Um observador em O anota o espaço e o tempo de um evento como sendo $x = 100\ km$ e $t = 200\ \mu s$. Qual é o espaço e o tempo deste evento em O', o qual se move na direção de crescimento de x com $V = 0{,}5c$? Assumindo que $x = x'$ em $t = t' = 0$. R.: 81 km e 39 μs.

2) Determine a velocidade de um próton com 10 MeV de energia cinética sabendo que ele possui 938,82 MeV de energia de repouso. Faça uma comparação com o resultado obtido para o elétron (exemplo 3.8).

3) Determine o momento linear relativístico ($em\ kg.m/s\ e\ MeV/c$) do próton da questão 2, sabendo que sua massa é m = 1,6726x10^{-27} kg.

4) Mostre que $p = \frac{E}{c}\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{Ec}{mc^2}+1\right)^2}\right)^{1/2}$, usando as equações 3.36 e 3.40.

5) Usando o resultado da questão 4, determine o momento linear relativístico, em MeV/c, para um elétron e um próton com energia total de 5 e 2000 MeV, respectivamente.

6) Faça a questão 5 usando a equação 3.41.

7) Determine a massa em MeV/c^2 para o elétron e o próton da questão 5.

CONCLUSÃO

Pudemos demonstrar nessa aula que, com o auxílio da transformada de Lorentz é possível relacionar as coordenadas x, y, z e o tempo t, de um evento no referencial ***O*** às coordenadas x´, y´, z´ e o tempo t´, do mesmo evento observado pelo referencial ***O´,*** o qual se move com velocidade V paralelo ao eixo x, relativa ao referencial ***O***. Amparados ainda pela interpretação de Einstein para tais fenômenos demonstramos que nossa visão de espaço e tempo nunca mais seria a mesma, visto que esse dois conceitos se auto-relacionam para corpos em movimento.

Verificamos ainda que a Dinâmica Newtoniana também precisaria ser revista em função dos novos pressupostos introduzidos por Einstein. Concluímos, portanto que, *o que aumenta com a velocidade não é a quantidade de matéria do corpo, mas sim sua massa inercial – aumenta a resistência da partícula ao movimento.*

RESUMO

Coeficiente de Lorentz:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{V}^2}{\boldsymbol{c}^2}}}$$

T***empo próprio*** (t_p) é o intervalo de tempo que ocorre em posições em repouso em relação a um determinado observador ($\boldsymbol{\Delta t}' = \boldsymbol{\Delta t_p}$). Sabemos ainda que $\boldsymbol{\gamma} > 1 \Rightarrow \boldsymbol{\Delta t} > \boldsymbol{\Delta t_p}$, então o intervalo medido em qualquer outro referencial é sempre maior do que o tempo próprio, o que corresponde à ***dilatação do tempo***.

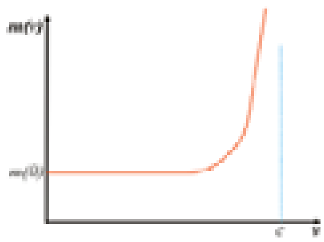
Derivação da transformação de Lorentz para velocidades

No caso especial em que o deslocamento é paralelo ao eixo x, $v_{x'} = v$ e $v_{y'} = v_{z'} = 0$, e assim:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}}{\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{c}^2}}$$

Dinâmica Relativistica

Variação da massa relativística com a velocidade. Próximo da velocidade da luz (c), a massa inercial cresce para o infinito. Para baixas velocidades, a massa inercial permanece quase inalterada, indicando o limite clássico.



Energia Relativística

$$\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{p}^2\boldsymbol{c}^2 + (\boldsymbol{m}\boldsymbol{c}^2)^2$$

E = energia total, p = momento e m = massa de repouso.

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula discutiremos um novo assunto: a evolução das idéias sobre a origem e organização do universo até chegarmos ao conceito de gravidade.

REFERÊNCIAS

ALONSO, M., Finn, E. J. Física. Vol1. 1ed. São Paulo: Addison-Wesley, 1999, 936p.

TIPLER, P. A., MOSCA, G. Física. Vol. 3. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006, 293p.

GLEISER, M. **A dança do Universo**: dos mitos de criação ao big-bang. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.