Aula 3

GRAVITAÇÃO

META

Apresentar o sistema heliocêntrico de Copérnico e, como a partir dele Kepler e Isaac Newton formularam as leis do movimento dos corpos celestes.

OBJETIVO

Conhecer a evolução do pensamento científico na busca de explicar o movimento dos corpos celestes desde o modelo geocêntrico até a idéia do heliocentrismo.

Compreender a cinemática dos corpos celestes de Kepler.

Entender o caminho que levou Isaac Newton a propor a lei da interação entre massas, bem como o alcance de suas idéias na compreensão dos movimentos especialmente de corpos em órbita.

PRÉ- REQUISITOS

Vetores e Cinemática em seus aspectos: escalar e vetorial. Conceito de força.

Introdução

Compreender o movimento dos corpos celestes, descrevê-lo, prever comportamentos dos astros e até saber que influência eles teriam sobre nossa vida faz da astronomia, talvez, a mais antiga das ciências humanas. O homem, enquanto ser pensante, sempre olhou para o firmamento e se perguntava: de onde viemos? Qual a origem de todas as coisas?

Considerando todo o conhecimento que acumulamos ao longo dos séculos, podemos afirmar que temos hoje um bom mapa do universo e como ele se comporta, mas o caminho até atingir tal conhecimento não foi fácil. Muitos cérebros geniais contribuíram, por vezes pagando o preço da incompreensão, sendo até perseguidos e ameaçados, porém, em nome da ciência e da verdade trilharam caminhos perigosos a fim de nos legar tamanho saber.

4 – Interação gravitacional

O movimento dos planetas sempre foi uma ciência que tem intrigado o homem desde civilizações remotas.

A construção do conhecimento a respeito do sistema planetário foi demorada e teve início com interpretações errôneas que ao passar do tempo foram sendo modificadas, dando lugar ao modelo correto que hoje a conhecemos como Lei da Gravitação Universal.

Por muitos anos, os gregos pensavam que a Terra ficava parada e era o centro do universo e desse modo todos os planetas conhecidos na época (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno) mais a Lua e o Sol girariam em torno da Terra (movimento geocêntrico). Entre os filósofos que defendiam esta teoria, o mais conhecido era Aristóteles. No entanto, a primeira obra mais séria a respeito do assunto foi escrita pelo matemático e astrônomo Claudius Ptolomeu de Alexandria (83-161 d.C.), que consolidou o modelo geocêntrico de Aristóteles. Para sustentar este modelo, cada planeta tinha que ter uma trajetória bastante complexa em relação à Terra. Ptolomeu de Alexandria desenvolveu uma teoria chamada de epiciclos para elucidar o movimento geocêntrico. O planeta se movia num círculo chamado de epiciclo e o centro do epiciclo se movia num círculo em volta da Terra dando uma trajetória bastante complexa chamada de epiciclóide (figura 4.1).

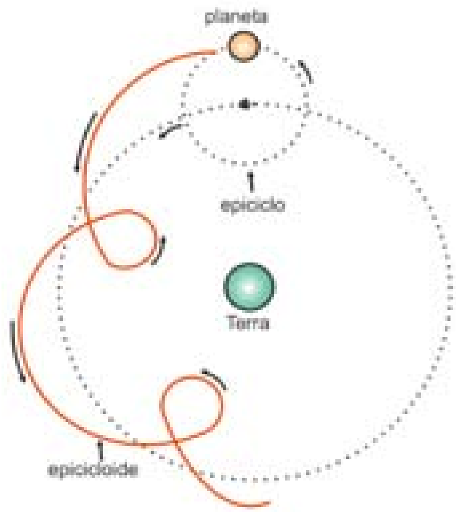


Figura 4.1 Representação gráfica do modelo proposto por Ptolomeu

Somente na idade média o clérigo e astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) resgatou uma teoria muito antiga criada pelo astrônomo grego Aristarco de Samos (310-230 a.C.). Este modelo colocava o Sol como o centro do universo, onde todos os planetas giravam em torno dele. A teoria heliocêntrica proposta por Copérnico tinha um sistema de referência cuja origem era o Sol. Ao contrário da teoria geocêntrica, o movimento dos planetas no heliocentrismo era mais simples e encaixava-se com exatidão às observações astronômicas de então.

4.1 – As Leis de Kepler

Com ajuda do modelo heliocêntrico de Copérnico e pelo estudo rigoroso dos dados experimentais sobre o movimento dos planetas obtidos pelo seu mestre o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546 - 1601), o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), estabeleceu três leis do movimento planetário as quais hoje nós chamamos de Leis de Kepler. Ele anunciou-as da seguinte maneira:

1ª Lei ***(lei das órbitas) – Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, sendo que um dos focos da elipse é ocupado pelo Sol.***

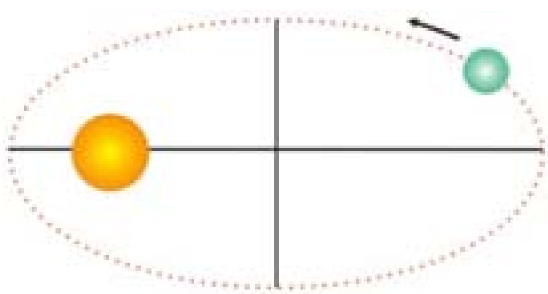


Figura 4.2 Representação gráfica da 1ª Lei de Kepler.

<u>2ª Lei</u> (lei das áreas) – O vetor posição de qualquer planeta em relação ao Sol varre áreas proporcionais aos intervalos de tempo dos percursos.

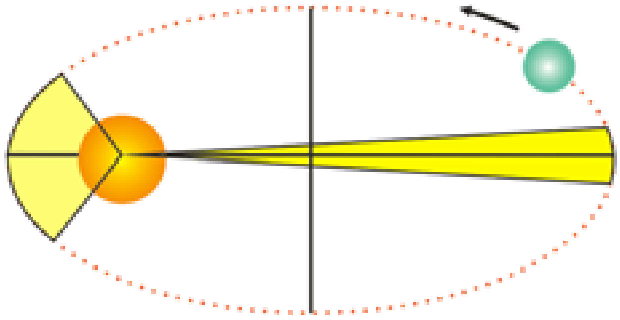


Figura 4.3 Representação gráfica da 2ª Lei de Kepler.

<u>3ª Lei</u> (lei dos períodos) – Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos das distâncias médias do planeta ao Sol.

A lei dos períodos pode ser expressa por $\boldsymbol{T^2 = kr^3_{médio}}$, onde $\boldsymbol{k}$ é uma constante de proporcionalidade que depende da massa do Sol.

4.2 – A Lei da gravitação universal

Através das leis de Kepler nós podemos obter a maneira como os planetas se movimentam em torno do Sol, mas porque motivo deles se comportarem desta maneira; não nos é fornecida esta informação.

A partir dos estudos de Kepler, Newton mostrou que tipo de força age sobre os planetas para que eles permaneçam indefinidamente em volta do Sol. Talvez esta seja uma das maiores contribuições de Newton para a física que foi publicado em 1687 como um capítulo na sua famosa obra intitulada como ***Principia Mathematica Philosophiase Naturalis.***

Como o cálculo desenvolvido por Newton no Principia para o movimento dos planetas é muito sofisticado para o nível deste curso, vamos fazer algumas considerações das leis de Kepler para se chegar a lei de gravitação universal, ou seja; seguir o raciocínio de Newton no estudo das leis de Kepler.

A órbita descrita pela primeira lei de Kepler é fechada em volta do Sol, isto indica que a força gravitacional é atrativa.

Seja um determinado planeta, que em um determinado tempo Δt percorre certo espaço que corresponde a uma área ΔA, e em outra região da trajetória ele gasta um tempo $\Delta t'$ para percorrer um espaço que corresponde a uma área $\Delta A'$, conforme a figura 4.4.

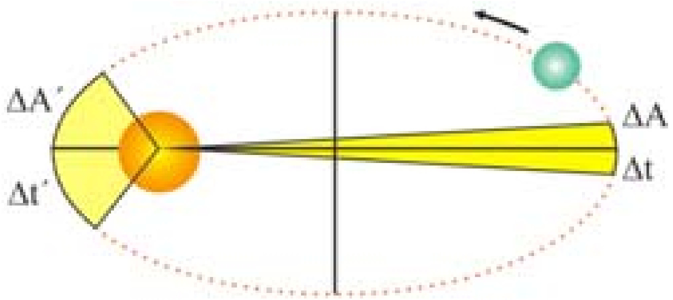


Figura 4.4 Representação gráfica da Lei das áreas.

Segundo a 2ª lei de Kepler, as áreas varridas pelo planeta dividido pelo tempo é uma constante, então

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta A'}{\Delta t'} = constante$$

A conseqüência da 2ª lei de Kepler é que o momento angular do planeta em relação ao Sol é constante, como o momento angular é constante, leva a afirmar que a força intrínseca entre o Sol e o planeta, a força da interação gravitacional, é central.

Como a órbita é fechada e a força é central, conduz a propor uma força em linha no sentido do planeta para o Sol e a mesma força no sentido oposto do Sol para o planeta. De um modo geral pode-se generalizar que uma interação gravitacional ocorre entre duas massas m_1 e m_2 quaisquer onde a massa m_1 é atraída por m_2 e vice-versa (figura 4.5).

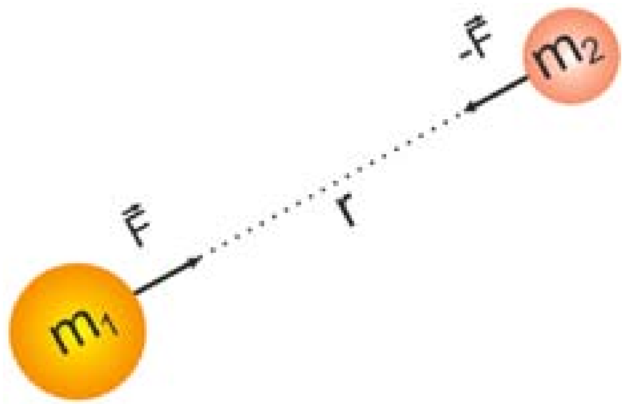


Figura 4.5 A força gravitacional entre dois corpos é atrativa e a ela aparece em ambos com a mesma intensidade em sentido oposto.

Partindo do princípio que a interação gravitacional ocorre entre qualquer massa, pode-se pensar que a força gravitacional seja proporcional a massa de cada corpo, assim

$$F \propto m_1 m_2$$

Os cálculos de Newton levaram a concluir que a constante de proporcionalidade dependia da distância entre os corpos, então

$$F = f(r) m_1 m_2 \tag{4.1}$$

A parte mais difícil da teoria de Newton foi determinar qual a dependência de $f(r)$ com r, principalmente quando a trajetória tem a forma de uma elipse.

Por simplicidade podemos admitir uma trajetória circular que corresponde a uma elipse com os focos coincidentes no centro da trajetória. A força centrípeta sobre a massa $\boldsymbol{m_1}$ é dado por

$$F = \frac{mv^2}{r} \tag{4.2}$$

levando em consideração que $\boldsymbol{m_2}$ está em repouso em um sistema inercial. Como $v = \frac{2\pi r}{T}$ e $T = \sqrt{kr^3}$, então

$$v = \frac{2\pi r}{\sqrt{kr^3}} \tag{4.3}$$

Introduzindo a equação 4.3 em 4.2, temos

$$F = \frac{m\left(\frac{2\pi r}{\sqrt{kr^3}}\right)^2}{r} = \frac{m\frac{4\pi^2 r^2}{kr^3}}{r} = \frac{4\pi^2 m}{kr^2}$$

$$F \propto \frac{1}{r^2} \tag{4.4}$$

A equação 4.4 mostra que para uma órbita circular, a interação gravitacional é central que possui a força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os corpos.

Com um cálculo mais complicado do que o descrito acima, Newton chegou à mesma relação para trajetória elíptica que $f(r) \propto \frac{1}{r^2}$. A equação 4.1 pode ser escrita de modo geral tanto para planetas girando em torno do Sol como para interação entre massas, assim a força gravitacional fica

$$\boldsymbol{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}} \qquad (4.5)$$

onde $G = 6{,}67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} ou \frac{m^3}{kgs^2}$ é a constante gravitacional que foi estimada experimentalmente por Cavendish (1731-1810) (figura 4.6). Quando as esferas pequenas $\boldsymbol{m_2}$ são atraídas pelas esferas grandes de massa $\boldsymbol{m_1}$, a haste gira um pequeno ângulo. Um feixe de luz que incide no espelho colado ao sistema, gira e o ângulo do feixe refletido é medido. A linha pontilhada corresponde a posição inicial da esfera $\boldsymbol{m_2}$.

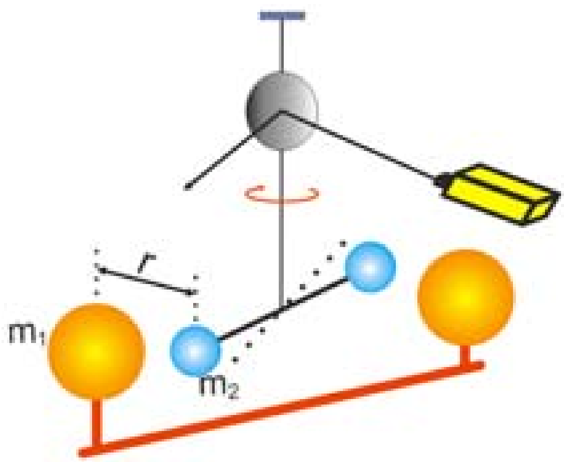


Figura 4.6 Esquema do aparelho usado por Cavendish para medir o valor de G.

A partir da equação 4.5 podemos anunciar a ***lei da gravitação universal*** como:

A interação gravitacional entre dois corpos corresponde a uma força central, atrativa, proporcional às massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.

Exemplo 4.1

Suponha uma massa m sobre a superfície da Terra com massa M e raio r = 6,37x10⁶ m. Determine:

a) ***A força gravitacional entre m e M;***
b) ***A massa M da Terra.***

Solução:

a) Utilizando a equação 4.5, temos

$$F = 6{,}67x10^{-11}\frac{mM}{(6{,}37x10^{6})^{2}} = \frac{6{,}67x10^{-11}}{40{,}5769x10^{12}}mM$$

$$F = 0{,}1644x10^{-23}mM = 1{,}644x10^{-24}mM\ N$$

b) A força que age sobre a massa m é a força peso mg e g = 9,80 m/s^2 é a aceleração gravitacional, assim

$$mg = 1{,}644x10^{-24}mM$$

$$g = 1{,}644x10^{-24}M$$

$$M = \frac{g}{1{,}644x10^{-24}} = \frac{9{,}8}{1{,}644x10^{-24}} = 5{,}96x10^{24}\ kg$$

Observe que a distância entre a massa e a Terra foi o próprio raio da Terra. Para que este procedimento tivesse sentido físico, foi suposto que toda massa da Terra estava concentrada no seu centro.

O valor obtido para massa da Terra é muito próximo do valor real ($M = 5{,}98x10^{24}\ kg$), apenas um erro de 0,3 %. Indicando que este modelo descreve muito bem a realidade física de interação entre massas.

Em 1665, Newton escreveu pela primeira vez a respeito: "*Durante esse ano, comecei a estender a idéia de gravidade à órbita da Lua e fiz uma comparação entre a força que era necessária para manter esse astro na órbita e as forças de gravidade que agiam na superfície da Terra.*"

Lendo esta frase de Newton podemos imaginar que ele fez as contas do exemplo 4.1 e também da Lua na sua órbita em volta da Terra, que é semelhante ao movimento de qualquer planeta em volta do Sol.

Exemplo 4.2

Determinar a massa da Terra (M) tomando como base a interação entre a Terra e a Lua. Dados: r = 3,84x10^8 m (distância entre os centros da Terra e da Lua) e T = 2,36x10^6 s (período de translação da Lua em volta da Terra).

Solução:

Para resolver este exemplo temos que determinar qual é à força entre Terra-Lua que se iguala a força $F = GmM/r^2$. Como é um movimento circular, F será igual a m (massa da Lua) vezes a aceleração centrípeta $\frac{v^2}{r}$, então

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad e\ como\ v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$F = \frac{m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{m\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}}{r} = \frac{4\pi^2 mr^2}{rT^2} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}, \text{ finalmente}$$

$$G\frac{mM}{r^2} = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \rightarrow M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4x3{,}14^2(3{,}84x10^8)^3}{6{,}67x10^{-11}(2{,}36x10^6)^2}$$

$$M = \frac{2233{,}12x10^{24}}{371{,}49} = \boldsymbol{6{,}01x10^{24}\ kg}$$

O erro relativo encontrado aqui também é extremamente para baixo, mostrando mais uma vez a consistência da teoria da gravitação universal de Newton.

Como a teoria da gravitação universal pode ser aplicada para interação entre corpos qualquer, vamos estudar o exemplo 4.3 com um certo cuidado devido a mudança que foi feita de um corpo esférico para uma barra.

Exemplo 4.3

Uma partícula de m = 0,67 kg está a uma distância d = 23 cm de uma barra uniforme de comprimento L = 3,0 m e de massa M = 5,0 kg. Qual é a intensidade da força sobre a partícula devido a barra?

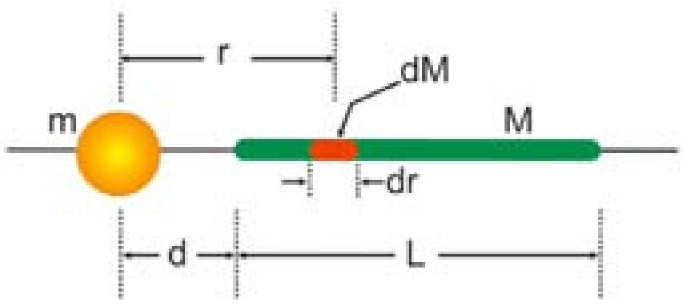


Figura 4.7 Uma partícula de massa m em frente a uma barra distante d com massa M e comprimento L.

A força que a partícula sofre é uma contribuição dos diversos elementos infinitesimais de massa $\boldsymbol{dM}$ que compõem a barra. Vamos considerar um certo $\boldsymbol{dM}$ localizado a uma distância $\boldsymbol{r}$ de $\boldsymbol{m}$ e acupando um comprimento $\boldsymbol{dr}$ ao longo da barra. A partir da equação 4.5 podemos escrever a força de gravitação diferencial dF sobre a partícula $\boldsymbol{m}$ devido à $\boldsymbol{dM}$ como

$$dF = \frac{Gm}{r^2} dM$$

Para achar a força gravitacional líquida sobre $\boldsymbol{m}$ precisamos integrar sobre todo o diferencial de massa ao longo do comprimento da barra, como a barra é uniforme a densidade linear pode ser escrita como

$$d = \frac{M}{L} = \frac{dM}{dr} \rightarrow dM = \frac{M}{L} dr, \text{ assim}$$

$$dF = \frac{Gm}{r^2} \frac{M}{L} dr$$

Com a transformação realizada podemos integrar sobre o comprimento em relação ao sistema de referência adotado, onde está localizada a extremidade mais próxima da partícula (d) até o final da barra (L+d), assim

$$F = \frac{GmM}{L} \int_d^{L+d} \frac{dr}{r^2} = -\frac{GmM}{L} \left[\frac{1}{r}\right]_d^{L+d} = -\frac{GmM}{L} \left[\frac{1}{L+d} - \frac{1}{d}\right]$$

$$= -\frac{GmM}{L} \left[\frac{d-(L+d)}{d(L+d)}\right] = -\frac{GmM}{L} \left[\frac{d-L-d}{d(L+d)}\right]$$

$$= -\frac{GmM}{L} \left[\frac{-L}{d(L+d)}\right] = \frac{GmM}{d(L+d)}$$

$$= \frac{(6{,}67x10^{-11})(0{,}67)(5{,}0)}{(0{,}23)(3+0{,}23)} = \boldsymbol{3x10^{-10}\ N}$$

4.3 – Energia potencial gravitacional

Vamos imaginar que um corpo de massa m se desloca em uma dimensão x de uma posição x_2 para x_1 devido à atração gravitacional $\vec{F}$ exercida pela massa M, de acordo com a figura 4.8, onde a origem está no corpo M.

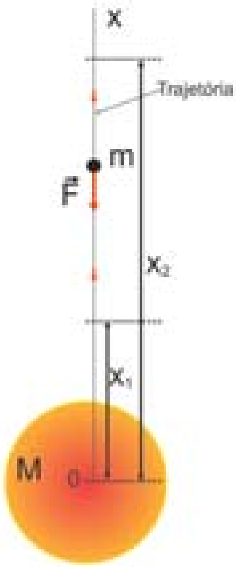


Figura 4.8 Deslocamento de um corpo m da posição x_2 para x_1 devido à ação da força gravitacional $\vec{F}$.

Como $\vec{F}$ é atrativa, atua em m no sentido oposto a orientação da trajetória e definindo um vetor unitário $\overrightarrow{u_x}$, podemos escrever a equação 4.5 na forma vetorial, assim

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{x^2}\overrightarrow{u_x} \tag{4.6}$$

No estudo de correlação entre energia potencial e força, foi visto que a energia potencial só depende da distância ao centro quando a força é central (Física A), então

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\overrightarrow{u_x} \tag{4.7}$$

Tomando o módulo das equações 4.6 e 4.7, temos

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{GMm}{x^2} \rightarrow dE_p = \frac{GMm}{x^2}dx \tag{4.8}$$

A equação 4.8 pode ser integrada assumindo que o corpo m foi deslocado de uma posição em x onde $E_p = 0$, assim

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_{x_2}^{x_1} \frac{GMm}{x^2}dx$$

$$\left[E_p\right]_0^{E_p} = GMm\left[-\frac{1}{x}\right]_{x_2}^{x_1} = -GMm\left[\frac{1}{x}\right]_{x_2}^{x_1}$$

$$\left[E_p - 0\right] = -GMm\left[\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right] \tag{4.9}$$

A distância para que E_p seja igual a zero deve muito grande, para que a força gravitacional se anule. Sendo assim, o valor de $x_2 = \infty$, isto faz com que $1/x_2 = 0$ e redefinindo $x_1 = r$, finalmente temos que

$$\boldsymbol{E_p = -\frac{GMm}{r}} \tag{4.10}$$

é a ***energia potencial gravitacional*** para um sistema composto por duas massas $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{m}$.

Supondo que M está em repouso num sistema inercial, tal como o Sol em relação aos planetas e a Terra em relação a Lua (devido a $\boldsymbol{M >> m}$) e que $\boldsymbol{m}$ se desloca com velocidade $\boldsymbol{v}$ em volta de $\boldsymbol{M}$, a energia total de $\boldsymbol{m}$ será a soma da energia cinética mais a energia potencial gravitacional, então a energia total no sistema de referência $\boldsymbol{M}$ será

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}} \tag{4.11}$$

Fazendo uma aproximação na órbita de elíptica para circular, nós vimos que a força centrípeta se iguala a força de gravitação universal, então

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \rightarrow mv^2 = \frac{GMm}{r}$$

dividindo ambos os termos por 2 encontramos a energia cinética

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{2r} \tag{4.12}$$

Introduzindo a equação 4.12 em 4.11, encontramos a energia total em função apenas de r, assim

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = \frac{GMm - 2GMm}{2r}$$

$$\boldsymbol{E = -\frac{GMm}{2r}} \tag{4.13}$$

onde pode-se observar que a energia total do sistema é sempre negativa e em valor absoluto igual a energia cinética.

O resultado da equação 4.13 é bem geral, uma vez que todas as trajetórias fechadas, incluindo as elípticas, possuem energia total menor do que zero.

4.4 – Movimentos orbitais

Vamos fazer uma experiência imaginária. Suponha que um determinado foguete é lançado da superfície da Terra com uma velocidade $\vec{v}$ (figura 4.9).

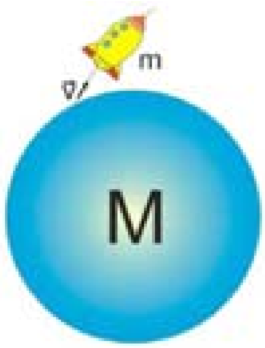


Figura 4.9 Trajetória do foguete que parte da superfície da Terra com velocidade $\vec{v}$.

Dependendo do valor desta velocidade a energia cinética pode ficar $\mathbf{E_c < E_p}$ e nesta situação a energia total continuará negativa e o foguete será atraído pela força gravitacional da Terra (figura 4.10).

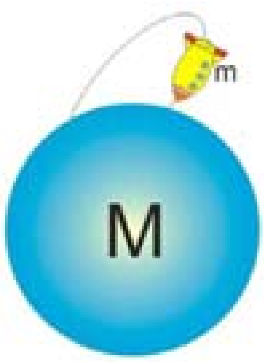


Figura 4.10 Trajetória do foguete devido ao fato que $\mathbf{E_c < E_p}$.

Enquanto a energia cinética for menor do zero o foguete cairá na Terra. É necessária uma velocidade que no mínimo deixe $E = 0$. Esta é chamada de ***velocidade de escape***, que é a velocidade mínima com qual o corpo deve ser lançado da Terra para que alcance o infinito. Um corpo alcança o infinito quando a energia total é zero ou maior do que zero, que corresponde a trajetórias abertas.

A velocidade de escape é calculada por

$$E_c - E_p = 0 \rightarrow E_c = E_p$$

$$\frac{mv_e^2}{2} = \frac{GMm}{r}$$

$$\boldsymbol{v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}} \tag{4.14}$$

A velocidade de escape $\boldsymbol{v_e}$ independe da massa do foguete. No infinito a velocidade de escape será nula e se o foguete for lançado com uma velocidade superior a $\boldsymbol{v_e}$ ele alcançará o infinito ainda com velocidade.

Como foi dito anteriormente, caso a velocidade seja menor do que $\boldsymbol{v_e}$ ele cairá na Terra, a menos que se faça algo para mudar esta condição, por exemplo, correção de rota com vários estágios de ajuste de direção de velocidade. Com este procedimento é possível colocar um satélite em órbita fechada em volta da Terra.

Exemplo 4.4

Determine a relação entre as velocidades de escape em relação à Terra e a Lua. Dados: $r_T = 6{,}38\text{x}10^6$ m, $M_T = 5{,}97\text{x}10^{24}$ kg, $r_L = 1{,}74\text{x}10^6$ m e $M_L = 7{,}3510^{22}$ kg.

Usando a equação 4.14, temos

$$v_{e,T} = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_T}} \quad \text{e} \quad v_{e,L} = \sqrt{\frac{2GM_L}{r_L}}\text{, assim}$$

$$\frac{v_{e,T}}{v_{e,L}} = \sqrt{\frac{\frac{2GM_T}{r_T}}{\frac{2GM_L}{r_L}}} = \sqrt{\frac{2GM_T r_L}{2GM_L r_T}} = \sqrt{\frac{M_T r_L}{M_L r_T}} = \sqrt{\frac{(5{,}97\text{x}10^{24})(1{,}74\text{x}10^6)}{(7{,}3510^{22})(6{,}38\text{x}10^6)}}$$

$$\boldsymbol{\frac{v_{e,T}}{v_{e,L}} = 4{,}7}$$

Este valor mostra como é mais difícil escapar da Terra do que da Lua. A velocidade de escape da Terra é praticamente 5 vezes superior a da Lua. Os astronautas que estiveram na Lua puderam experimentar como era muito mais fácil saltar na superfície lunar do que aqui na Terra.

Vamos imaginar um experimento com um equipamento tipicamente nordestino, o buscapé, para entendermos o ajuste de direção.

Inicialmente uma pedra foi lançada para cima, com uma certa inclinação com o objetivo de superar uma pequena elevação, mas devido a baixa velocidade de lançamento o obstáculo não foi superado, mesmo lançando com velocidades cada vez maiores. A força da pessoa que lançou a pedra não foi o suficiente para impor uma velocidade que superasse o obstáculo (figura 4.11).

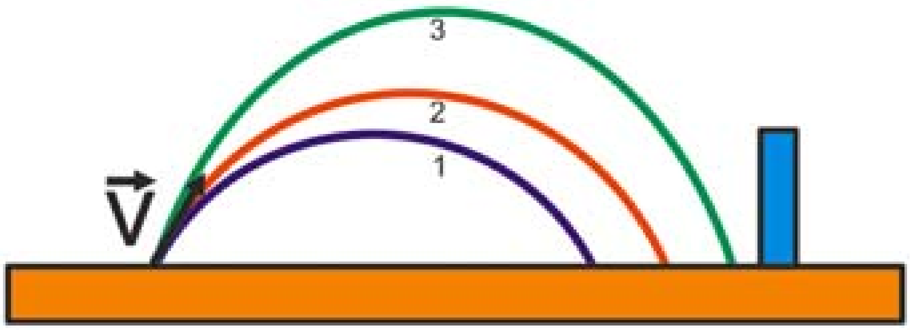


Figura 4.11 Trajetórias de uma pedra com velocidades iniciais diferentes, com $v_3 > v_2 > v_1$.

A pessoa que estava realizando o experimento, teve uma idéia: amarrou um pequeno buscapé com pavio que ficaria acesso até atingir a altura máxima., deste ponto em diante o buscapé foi acionado por alguns segundos. O tempo que o buscapé ficou aceso foi o suficiente para dar um incremento na velocidade. A altura alcançada foi a mesma, mas o alcance foi maior e o obstáculo foi superado (figura 4.12).

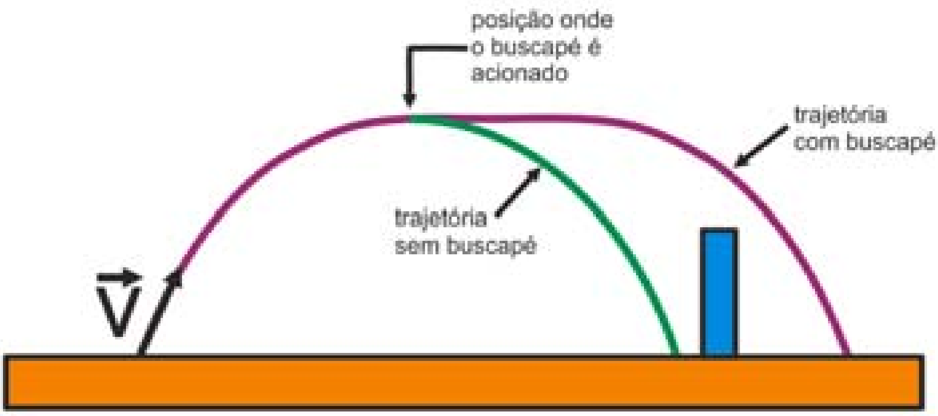


Figura 4.12 Trajetórias da pedra com e sem buscapé.

A partir da posição que o buscapé é adicionado, a pedra anda mais, antes de começar a cair, do que a pedra sem buscapé. Toda a trajetória em linha reta (um pouco exagerada no desenho) corresponde o tempo que o buscapé ficou aceso. Este tempo foi o suficiente para que a componente da velocidade $\boldsymbol{v}$ sofresse um acréscimo de $\Delta\boldsymbol{v}$.

Algo semelhante ocorre quando se coloca satélite em órbita, ele é lançado com velocidade de escape até um ponto A em uma altura h, neste ponto ele recebe um incremento horizontal na velocidade v_{ins}, chamado de ***velocidade de inserção*** (figura

4.13). Dependendo do valor de v_{ins} a trajetória será fechada se chocando com a Terra ou ficando em órbita ou aberta e escapará da Terra e viajará pelo espaço até o infinito. Isto vai depender se a Ec = Ep ou Ec < Ep ou Ec > Ep, em uma determinada altura h.

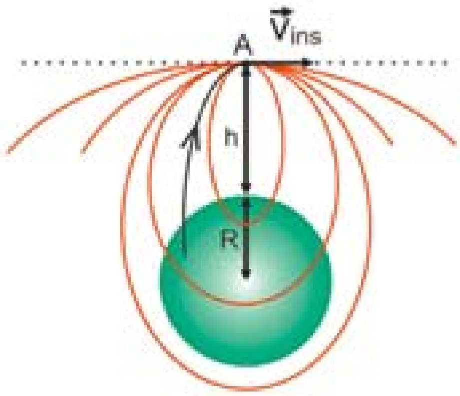


Figura 4.13 Trajetórias de um satélite que recebeu uma velocidade de inserção $\overrightarrow{v_{ins}}$ após ele ter alcançado a altura h.

A energia total do satélite em A, em relação à Terra é

$$E = \frac{mv_{ins}^2}{2} - \frac{GMm}{R+h}$$

A órbita será uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, dependendo de a energia E ser negativa, zero ou positiva, respectivamente. Resumidamente temos

$\boldsymbol{Energia}$	$\boldsymbol{Velocidade}$	$\boldsymbol{Trajetória}$
$E < 0$	$v_{ins}^2 < 2GM/(R+h)$	$elipse$
$E = 0$	$v_{ins}^2 = 2GM/(R+h)$	$parábola$
$E > 0$	$v_{ins}^2 > 2GM/(R+h)$	$hipérbole$

Para colocar um satélite em órbita é necessário fazer dois procedimentos básicos. O primeiro é levar o satélite até a altura h = altura da órbita através da velocidade de inserção e o segundo procedimento é fornecer uma velocidade orbital adequada para aquela altura.

O satélite estando em órbita circular a força centrípeta mv_o^2/r se iguala a força gravitacional GMn/r^2, assim

$$\frac{mv_o^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \rightarrow v_o^2 = \frac{GM}{r} \rightarrow v_o = \left[\frac{GM}{r}\right]^{1/2}$$

onde $\boldsymbol{v_o}$ é a ***velocidade orbital*** e como r = R + h, temos

$$\boldsymbol{v_o = \left[\frac{GM}{R+h}\right]^{1/2}} \tag{4.15}$$

Exemplo 4.5

Um satélite gira a uma altura de 2000 km acima da superfície da Terra. Determine a velocidade orbital do satélite.

Usando a equação 4.15, onde R é o raio e M é a massa da Terra, temos

$$v_o = \left[\frac{GM}{R+h}\right]^{1/2} = \left[\frac{(6{,}67x10^{-11})(5{,}97\text{x}10^{24})}{6{,}38\text{x}10^{6} + 2x10^{6}}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{39{,}8199\text{x}10^{13}}{8{,}38\text{x}10^{6}}\right]^{1/2} = [4{,}75x10^{7}]^{1/2} = \mathbf{6{,}9x10^{3}\ m/s}$$

ATIVIDADES

1) Determine o erro relativo da massa da Terra calculada através da interação Terra-Lua no exemplo 4.2.

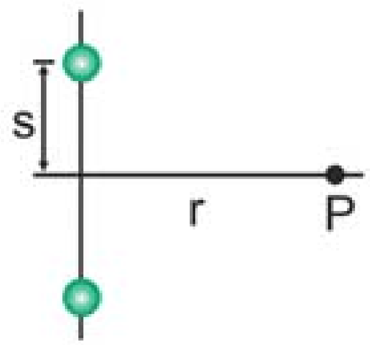
2) Determine a aceleração gravitacional na superfície lunar submetida a uma pedra que está sobre a sua superfície, sabendo que o raio médio da Lua é $r = 1{,}74 \times 10^6$ m.

3) Caso a pedra da questão 2 fosse deslocada para uma altura de h = 3000 m em relação à superfície lunar a aceleração gravitacional mudaria? Justifique.

4) Suponha que a barra do exemplo 4.3 seja composta de dois materiais, onde 1/3 da barra é de material de massa M´. Determine a força sobre a partícula.

5) Suponha que a barra do exemplo 4.3 esteja na vertical e a uma distância d = 2300 m. Devido a grande distância, a discretização da massa é desprezível. Determine a força sobre a partícula.

6) Calcule o módulo e a direção do campo gravitacional em um ponto P sobre a linha divisória perpendicular de duas partículas com massas iguais separadas por uma distância 2s.



7) Suponha que em um planeta X, cujo raio é R, exista uma cratera de profundidade 0,001R, do fundo da qual um projétil é lançado verticalmente para cima com velocidade inicial v igual à de escape. Determine a altura máxima alcançada pelo projétil, caso ele fosse lançado da superfície do planeta X com aquela mesma velocidade inicial v.

8) Calcule o período de revolução do satélite do exemplo 4.5.

9) Quanto trabalho é feito pelo campo gravitacional da Lua quando um meteoro de 5 tonelas vem do espaço exterior e colide com a superfície lunar?

10) Um satélite se desloca em uma órbita em uma altura h sobre um planeta que possui raio R. Mostre que, a velocidade orbital $\boldsymbol{v_o}$ e a velocidade de escape $\boldsymbol{v_e}$**,** a uma altura h, estão relacionadas pela expressão $\boldsymbol{v_e = \sqrt{2}v_o}$.

CONCLUSÃO

Verificamos que as leis de Kepler explicam adequadamente a cinemática dos corpos celestes, ou seja, como os planetas se movem em torno do Sol; suas trajetórias, velocidade e período de translação, mas não mostram porque têm esse comportamento. Coube a Isaac Newton formular e apresentar uma lei geral que explicasse definitivamente o movimento planetário; a lei da atração das massas ou lei da gravitação universal.

A lei da gravitação de Newton foi um passo gigantesco na busca do homem de explicar a aparente harmonia do universo e modificou definitivamente a maneira como vemos o mundo.

RESUMO

As Leis de Kepler

1ª Lei (lei das órbitas) – Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, sendo que um dos focos da elipse é ocupado pelo Sol.

2ª Lei (lei das áreas) – O vetor posição de qualquer planeta em relação ao Sol varre áreas proporcionais aos intervalos de tempo dos percursos.

3ª Lei (lei dos períodos) – Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos das distâncias médias do planeta ao Sol.

A lei da gravitação de Newton

$$\boldsymbol{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$$

“A interação gravitacional entre dois corpos corresponde a uma força central, atrativa, proporcional às massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.”

GLOSSÁRIO

Órbita – trajetória descrita por um astro (planeta, satélite, cometa) em torno de outro.

Interação – ação ou influência mútua entre objetos.

PRÓXIMA AULA

A partir da próxima aula iniciaremos o estudo de um novo assunto: as noções do eletromagnetismo, seus principais conceitos e leis.

REFERÊNCIAS

ALONSO, M., Finn, E. J. Física. 1ed. São Paulo: Addison-Wesley, 1999, 936p.

SERWAY, R. A., JEWETT Jr, J. W. Princípios de Física. Vol. 1. 3 ed. São Paulo: Thomson, 2005, 403p.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. Fundamentals of Physics – Extended. 4 ed. New York: John Wiley & Sons, 1993, 1306p.