Aula 4

INTERAÇÃO ELÉTRICA

META

Introduzir o conceito de carga elétrica e as interações entre corpos eletricamente carregados.

OBJETIVO

A partir do conceito de carga elétrica ser capaz de caracterizar um campo elétrico produzido por essa carga e as relações entre corpos carregados através da lei de Coulomb.

PRÉ- REQUISITOS

Vetores e Adição vetorial.

Introdução

Iniciaremos nessa aula, caro aluno(a), o estudo das noções do eletromagnetismo. Primeiramente é apresentado o conceito de carga elétrica e como essa carga cria em sua circunvizinhança uma região de influência, onde qualquer corpo carregado aí localizado "*sentirá*" a sua ação, por meio do seu campo elétrico. Define-se, então, o que podemos chamar de *carga-campo*, como uma entidade que não pode ser separada, pois não é possível existir uma sem a outra (carga e campo).

Demonstraremos a importância da lei de Coulomb ao estabelecer como age a interação elétrica entre corpos próximos. Finalmente discutiremos a energia potencial acumulada em corpos eletricamente carregados, mediante o conceito de potencial elétrico.

5 – Interação elétrica

5.1 - Carga elétrica

Vamos iniciar este capítulo com uma experiência bastante simples que você pode fazer em casa. O material é composto de uma caneta esferográfica com bocal e pedaços de papel de dimensão aproximada de 5 mm x 5 mm. (figura 5.1).

Figura 5.1 Caneta e pedaços de papel para experiência do estudo de carga elétrica.

Aproxime o bocal dos pedaços de papel e observe o que acontece. Agora, passe a caneta do lado que está conectado o bocal, no seu cabelo, do mesmo jeito que você faz com um pente. Logo em seguida, aproxime o bocal novamente dos pedaços de papel. Provavelmente o que você verá é o que mostra a figura 5.2, os pedaços de papel foram atraídos pelo bocal da caneta. O que não ocorreu na primeira tentativa.

Figura 5.2 Pedaços de papel sendo atraídos pelo bocal que foi passado no cabelo.

No Capítulo 4, estudamos a interação gravitacional entre massas. Do conhecimento da adquirido, podemos afirmar que existe força gravitacional entre o bocal e os pedaços de papel. Esta força deveria ter se revelado na primeira parte do experimento, mas isto não ocorreu. A não observação da força gravitacional não significa que ela não esteja presente, a sua intensidade é muito pequena em relação à força peso que puxa o pedaço de papel para baixo. A atração dos pedaços de papel pelo bocal, só ocorreu quando este foi passado ou atritado no cabelo. Podemos dizer que o atrito entre o cabelo e o bocal provocou uma modificação na superfície do bocal. Surgiu uma nova força, além da força gravitacional – a força elétrica, estudada há muitos séculos atrás. A propriedade que os objetos adquirem quando são friccionado um ao outro foi batizada de ***eletricidade*** (do grego "*elektron*", que significa **âmbar** = resina fóssil).

A interação gravitacional só age de modo único, através da atração entre as massas. Por outro lado, existem dois tipos de interação elétrica: atração e repulsão. Suponha que possuímos um pêndulo com uma bola de isopor, uma flanela e dois bastões, um de vidro e outro de âmbar. O bastão de vidro e o de âmbar foram atritados com flanela e em seguida colocados próximos a bola de isopor, de maneira semelhante aos pedaços de papel, a bola de isopor foi atraída por ambas as barras (figura 5.3).

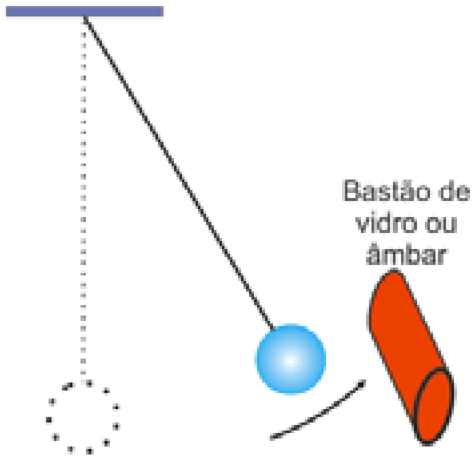


Figura 5.3 Experiência do pêndulo de isopor atraído por um bastão de vidro ou âmbar eletrizado.

A barra de vidro foi tocada em duas bolas e as bolas foram colocadas uma próxima da outra (figura 5.4).

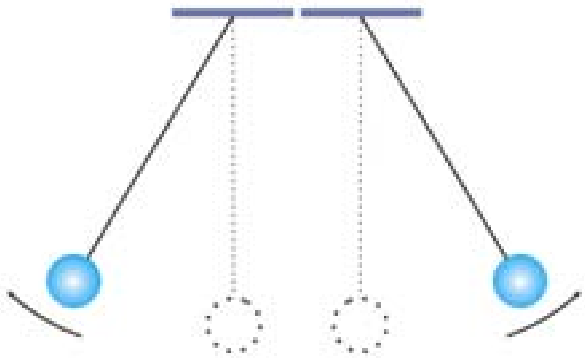


Figura 5.4 Experiência dos pêndulos de isopor após serem tocados pelo bastão de vidro.

O mesmo procedimento foi repetido para o bastão de âmbar e o resultado foi idêntico ao representado na figura 5.4. As esferas ao serem tocadas pelos bastões ficaram eletrizadas com o mesmo tipo de eletricidade, por isso que uma esfera se afasta da outra. Este fenômeno não é observado na interação gravitacional, existe uma força elétrica que tem um comportamento repulsivo. Destes resultados surgiu uma pergunta: o tipo de eletricidade passada para as esferas tocadas pelos bastões são a mesma? Se fosse o mesmo de eletricidade, quando uma esfera tocada pelo bastão de vidro se aproximasse da tocada pelo bastão de âmbar, elas deveriam se repelir como as da figura 5.4.

Finalmente as duas esferas que foram tocadas pelo bastão de vidro e pelo bastão de âmbar foram colocadas uma próxima da outra (figura 5.5).

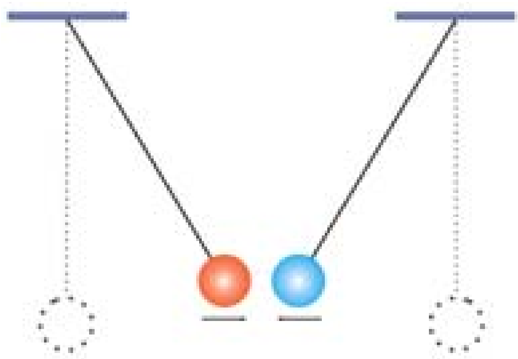


Figura 5.5 Esferas eletrizadas (vermelha) pelo bastão de âmbar e (azul) pelo bastão de vidro.

Como ocorreu a atração entre as esferas, a eletricidade adquirida por cada uma é distinta. Designando-se a eletrização da esfera azul de positivo e da esfera vermelha de negativo, pode-se anunciar uma lei fundamental de interação elétrica:

Dois corpos com a mesma eletrização (positiva ou negativa) repelem-se, mas se eles possuem eletrização opostas, atraem-se.

A interação elétrica pode ser escrita dizendo que entre corpos de mesma eletrização existe uma força de repulsão e entre corpos de eletrização oposta existe uma força de atração.

Quando um determinado corpo está eletrizado, pode-se dizer que ele possui uma determinada quantidade de ***carga elétrica***. Esta grandeza é aqui atribuída a um corpo carregado de modo semelhante quando estudamos a interação gravitacional, onde foi atribuída a cada corpo uma massa.

Normalmente o termo carga elétrica é substituído por ***carga*** e cujo símbolo é a letra ***q***. A carga de um corpo é a soma da carga positiva com a carga negativa. Quando um corpo tem a mesma quantidade de cargas, tanto positivas como negativas, ele é chamado ***eletricamente neutro***. Os átomos que compõem a matéria são eletricamente neutros, mas em determinas situações, os átomos podem ganhar ou perder cargas, eles ficam carregados negativamente ou positivamente e são chamados de íons ânions ou cátions, respectivamente. Por exemplo, o sal de cozinha que quimicamente é chamado de NaCl (Cloreto de sódio). Cada molécula de NaCl é eletricamente neutra, mas quando o NaCl é dissolvido em água, aparecem íons carregados, o cátion Na^+ (com falta de um elétron) e o ânion Cl^- (com excesso de um elétron).

Quando um corpo está carregado, ou ele está com excesso ou com falta de elétron. No caso das esferas que foram eletrizadas, na interação com a barra de vidro, a esfera ficou com carga positiva, significa que o vidro atraiu os elétrons da esfera, ela ficou com falta deles. Para a esfera que foi tocada com o bastão de âmbar ocorreu o contrário, como ela ficou com carga negativa porque conseguiu atrair os elétrons do bastão.

5.2 – Lei de Coulomb

É notável que exista uma força elétrica entre corpos carregados. O próximo passo depois desta constatação é saber como esta força se comporta em relação a distância entre os corpos e a carga de cada um deles. Este fenômeno é chamado de ***eletrostática*** e o primeiro cientista a fazer um estudo criterioso sobre este assunto foi ***Charles Augustin de Coulomb*** (1736-1806) com uma balança de torça semelhante a usada por Cavendish para estudar a a força de interação gravitacional.

Diversos procedimentos experimentais Coulomb realizou e chegou a seguinte conclusão:

A força de interação eletrostática entre duas partículas carregadas é proporcional ao produto das cargas e ao inverso da distância ao quadrado e tem direção da linha que une as cargas.

Este enunciado foi chamado de ***Lei de Coulomb*** em homenagem ao seu descobridor. Matematicamente ela é expressa através da equação 5.1

$$\boldsymbol{F = k\frac{qq'}{r^2}} \tag{5.1}$$

onde $\boldsymbol{F}$ é a força entre as carga $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{q'}$, $\boldsymbol{r}$ a distância entre elas e $\boldsymbol{k}$ é uma constante que precisa ser determinada a depender do sistema de unidade.

De modo gráfico, podemos representar a força $\boldsymbol{F}$ que surge quando as cargas estão carregadas, de acordo com a figura 5.6.

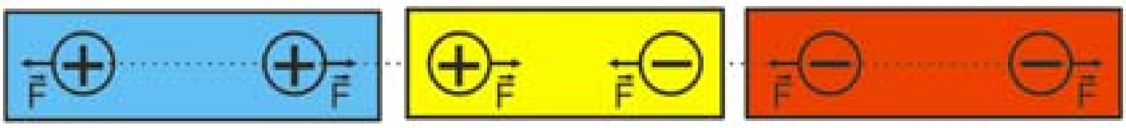


Figura 5.6 Forças entre cargas carregadas.

Foi definido que no SI (sistema internacional) a unidade de carga elétrica é igual a um Coulomb (1C). A constante $\boldsymbol{k}$ pode ser expressa na forma de $\boldsymbol{k = 1/4\pi\varepsilon_0}$, onde $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ é a ***permitividade do vácuo***, então a equação 5.1 pode ser rescrita como

$$\boldsymbol{F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \tag{5.2}$$

e o seu valor no SI é $\boldsymbol{k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8,988x10^9\ N.m^2/C^2}$. Nos exemplos e problemas usaremos o valor aproximado $\boldsymbol{k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9,0x10^9\ N.m^2/C^2}$.

Exemplo 5.1

Duas cargas puntiformes, q_1 = +2,5 nC e q_2 = -3,5 μC, estão separadas de uma distância de 40 mm. Determine o módulo, sentido e direção da força elétrica sobre cada carga.

Solução:

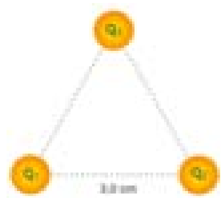
A força em módulo que age em q_1 devido à q_2 é a mesma que age em q_2 devido à q_1, então

$$F_{1,2} = F_{2,1} = 9x10^9 \frac{|(2{,}5x10^{-9})(-3{,}5x10^{-6})|}{(40x10^{-3})^2} = \frac{78{,}75x10^{-6}}{1{,}6x10^{-3}} = \boldsymbol{4,9x10^{-4}\ N}$$

Em relação a direção, como são apenas duas cargas as forças estão na mesma, mas em sentidos opostos. A força que q_1 faz em q_2 aponta para q_1 e força que q_2 faz em q_1 aponta para q_2, conforme diagrama da figura 5.6 para cargas de sinais opostos.

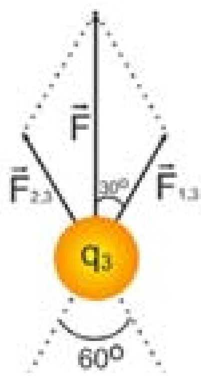
Exemplo 5.2

Sejam três cargas puntiformes, q_1 = q_2 = q_3 = 3,0 mC conformadas em um triângulo eqüilátero de lado 3,0 cm. Determine o módulo, a direção e o sentido da força resultante que atua sobre q_3.



Solução:

Aplicando a lei de Coulomb temos



A expressão da força resultante vetorial é $\vec{F} = \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{2,3}$ e em módulo, fica

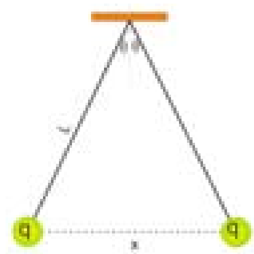
$$F = F_{1,3}cos30^o + F_{2,3}cos30^o \rightarrow F = 2x9x10^9 \frac{(3x10^{-3})(3x10^{-3})}{(3x10^{-2})^2} cos30^o$$

$$F = 18x10^9 \frac{9x10^{-6}}{9x10^{-4}} 0{,}87 = \mathbf{1{,}6x10^6\ N}$$

A direção é vertical e o sentido é para fora do triângulo equilátero.

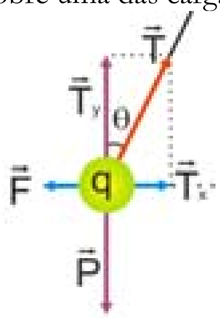
Exemplo 5.3

Duas cargas puntiformes em forma de esfera, de cargas iguais q, estão suspensas em fios de seda e permanecem em equilíbrio numa distância x uma da outra. Mostre que, se o ângulo χ for muito pequeno, $x = (q^2L/2\pi\varepsilon_0 mg)^{1/3}$.



Solução:

Vamos colocar as forças que agem sobre uma das cargas, assim



O somatório das forças em cada eixo deve ser zero, pois o sistema está em equilíbrio, então

$$\sum Fx = F - T_x = 0 \ \text{ e } \sum Fy = P - T_y = 0 \ \rightarrow \ F = Tsen\theta \ \text{ e } \ P = Tcos\theta$$

$$\frac{F}{P} = \frac{Tsen\theta}{Tcos\theta} = tan\theta$$

para um ângulo muito pequeno $tan\theta \approx sen\theta$, e como $sen\theta = x/2L$, temos

$$\frac{F}{P} = \frac{x}{2L} \rightarrow \frac{\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o x^2}}{mg} = \frac{x}{2L} \rightarrow \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o mgx^2} = \frac{x}{2L} \rightarrow 4\pi\varepsilon_o mgx^3 = 2q^2L$$

$$x^3 = \frac{2q^2L}{4\pi\varepsilon_o mg} \rightarrow \boldsymbol{x} = \left(\frac{\boldsymbol{q^2L}}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon_o mg}}\right)^{\boldsymbol{1/3}}$$

5.3 – Campo elétrico

Quando uma carga elétrica é colocada em uma determinada região do espaço, em volta dela surge um ***campo elétrico***, independente se existe uma segunda carga próxima a primeira. Caso uma segunda carga seja colocada neste campo, surge nela uma força elétrica. Sendo assim, *campo elétrico* é uma região onde qualquer carga elétrica fica submetida a uma força.

A intensidade do campo elétrico é definido como a razão da força pela carga, então

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{\boldsymbol{q}} \tag{5.3}$$

e a unidade no SI será N/C ou mkg/Cs^2.

Tendo em vista a definição 5.3, a depender se a carga é positiva ou negativa, a força elétrica terá o mesmo sentido ou oposto ao vetor campo elétrico (figura 5.7).

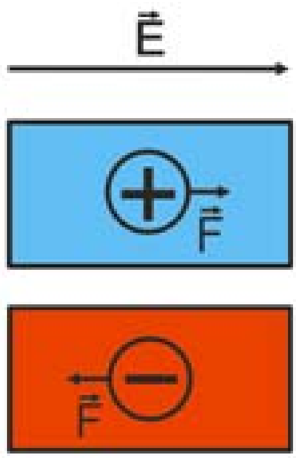


Figura 5.7 Sentido e direção da força produzida sobre uma carga positiva e uma carga negativa imersas em um campo elétrico.

A força na equação 5.3 ela pode ser explícita e desse modo encontrarmos uma relação entre campo elétrico, carga e distância.

Vamos imaginar que uma carga q gera um campo elétrico em uma determinada região. Uma carga q´ foi colocada neste espaço, então surgiu uma força sobre q´ devido a q, assim

$$E = \frac{F}{q'} \text{ e } F = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

introduzindo a força na equação do campo elétrico, ficamos

$$\boldsymbol{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}} \tag{5.4}$$

A equação 5.4 fornece o módulo do campo elétrico o qual é proporcional a carga geradora e inversamente a distância ao quadrado. A forma vetorial pode ser escrita da seguinte forma

$$\boldsymbol{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{u}} \tag{5.5}$$

onde vetor unitário $\boldsymbol{\vec{u}}$ é radial e está sempre saindo da carga, independente se ela é positiva ou negativa. Através da equação 5.5 pode-se ver que para uma carga elétrica positiva, as linhas de campo saem da carga (os vetores $\vec{E}$ e $\vec{u}$ têm o mesmo sentido) e para uma carga negativa, as linhas de campo chegam na carga (os vetores $\vec{E}$ e $\vec{u}$ têm sentidos opostos) (figura 5.8).

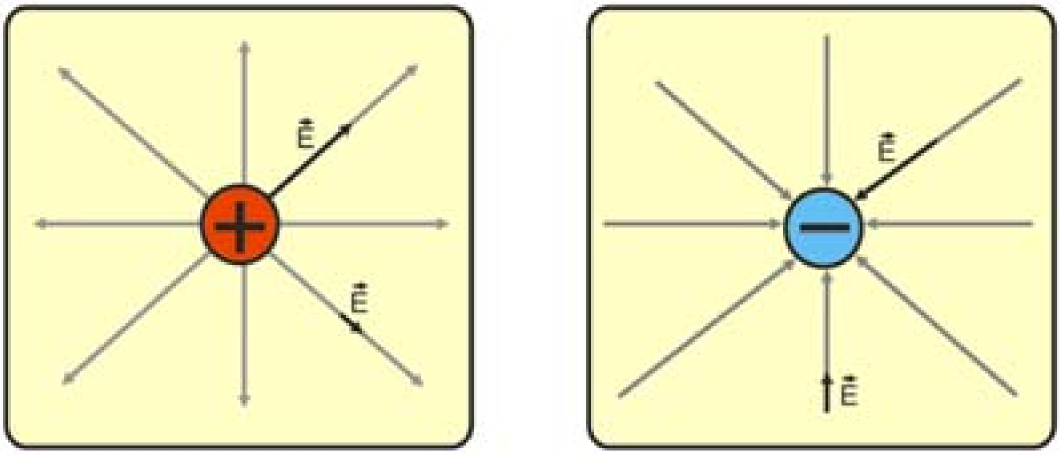


Figura 5.8 Linhas do campo elétrico produzidas por cargas isoladas. Como o campo elétrico é inversamente proporcional a distância, ele fica menor quanto mais distante da carga.

Para os casos apresentados na figura 5.8, as linhas de força coincidem com as linhas de campo. O que acontece com as linhas de campo elétrico se aproximarmos uma carga positiva de uma carga negativa? Vamos analisar esta situação através da figura 5.9.

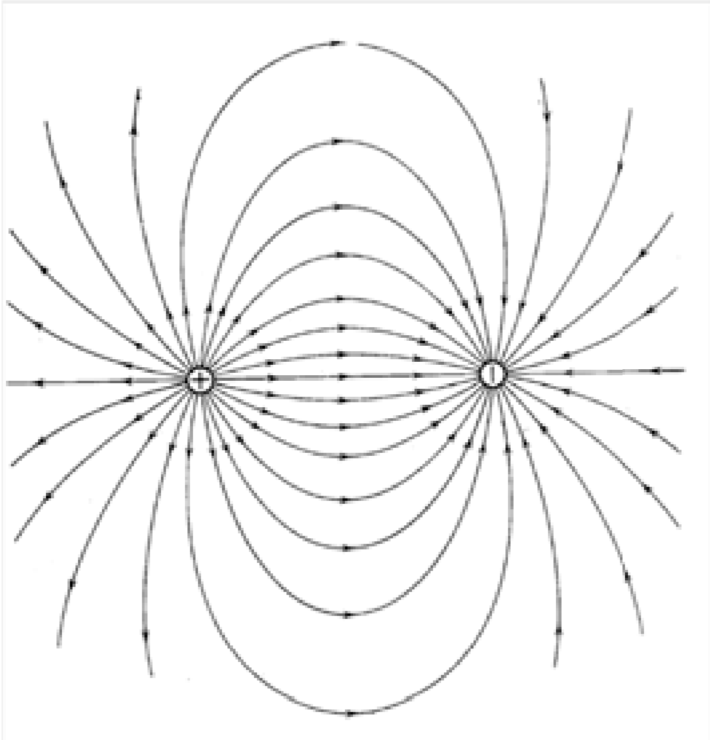


Figura 5.9 Linhas de campo elétrico de duas cargas de sinais contrários formando um dipolo elétrico (Fonte: http://hermes.ucs.br/ccet/defq/mlandreazza/CurAut01.htm#CAMPO ELÉTRICO).

As linhas de campo saem da carga positiva e chegam na carga negativa. Devido as cargas serem esféricas existe uma distorção nas linhas de campo e o vetor campo elétrico é tangente as linhas de campo. Para o caso de duas cargas e sinais iguais é mostrado na figura 5.10.

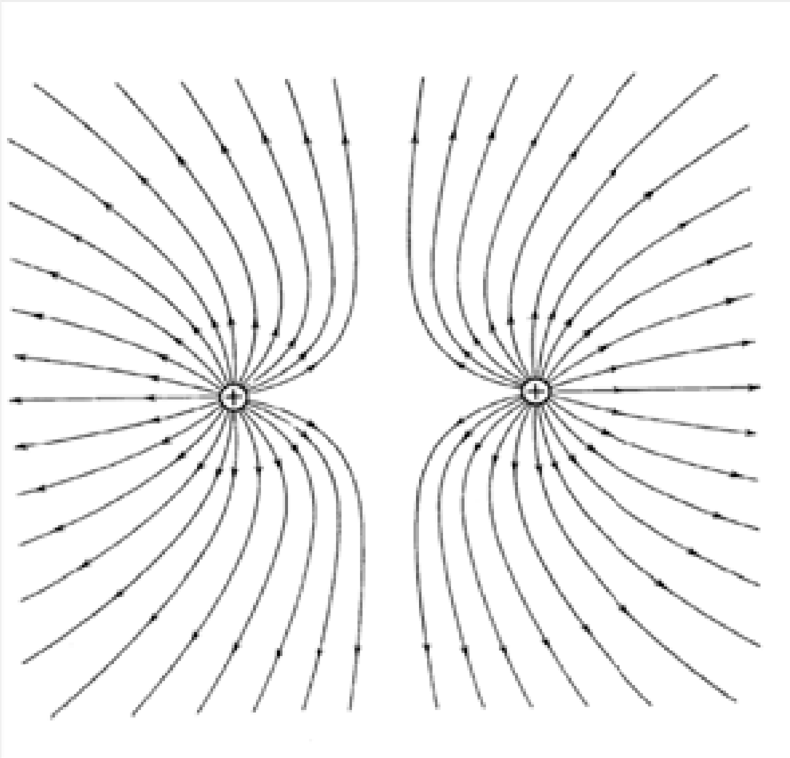


Figura 5.10 Linhas de campo elétrico para duas cargas de sinais iguais, mostrando a forte repulsão entre elas (Fonte:http://hermes.ucs.br/ccet/defq/mlandreazza/CurAut01.htm#CAMPO ELÉTRICO).

Para o caso da figura 5.10, as cargas têm sinais iguais, o que faz que as linhas de campo elétrico não fluam de uma carga para outra. Passa a existir um espaço entre elas que não existe linhas de campo. Resultado semelhante pode ser encontrado para duas cargas negativas. As linhas de campo visualizadas nas figuras 5.9 e 5.10 têm um intuito de dar uma visão meramente quantitativa do campo elétrico. O campo elétrico é um contínuo e que tem uma ação tridimensional, a ilustração é apenas uma visão de dos planos da presença do campo elétrico.

Existe uma situação, inclusive usada em aplicações tecnológicas, onde as linhas de campo são paralelas, é o caso de duas barras paralelas carregas com sinais contrários. Nesta configuração o campo elétrico no interior das duas planas é uniforme (figura 5.11).

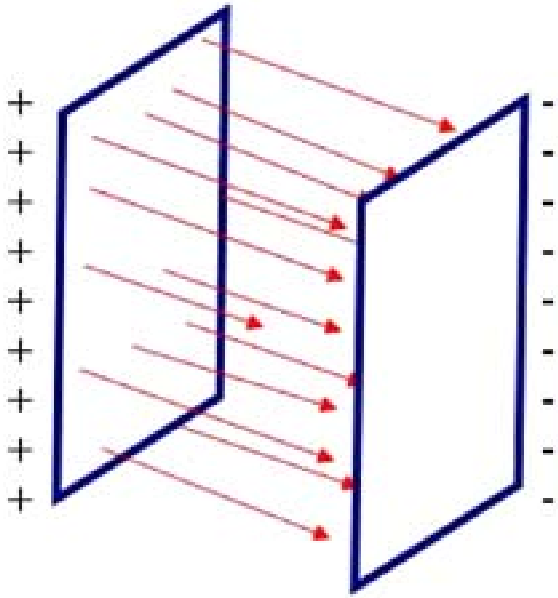


Figura 5.11 Visualização das linhas de campo elétrico entre duas placas paralelas (Fonte: http://www.territorioscuola.com/wikipedia/pt.wikipedia.php?title=Imagem:Km123.jpg).

O vetor campo elétrico é sempre tangente às linhas de força. Quando as linhas de força são linhas retas, como mostrado nas figuras 5.8 e 5.11, ele é coincidente com as linhas de força, por outro lado quando as linhas de força são distorcidas, a sua representação fica mais pronunciada (figura 5.12).

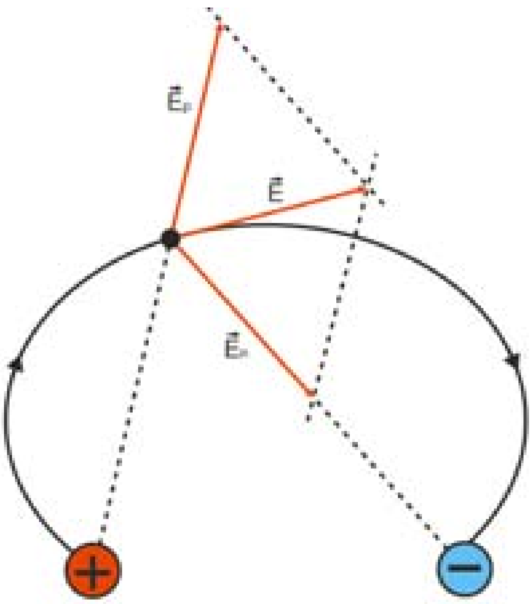


Figura 5.12 Visualização do vetor campo elétrico em um ponto P sobre uma determinada linha de força.

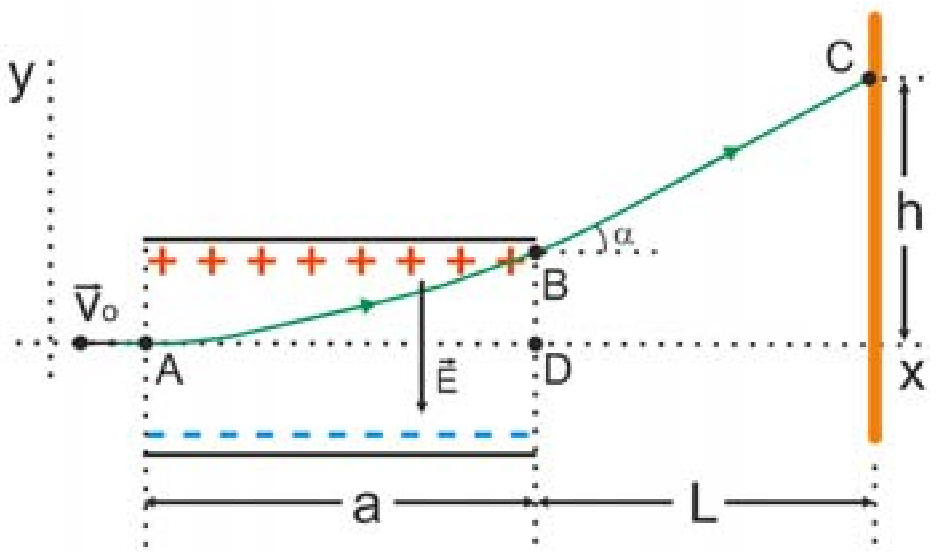
Para obter o vetor $\vec{E}$ no ponto P deve-se traçar uma linha que parte da carga positiva e outra da carga negativa, fazendo um ângulo reto na superfície de cada esfera. No ponto P haverá uma contribuição de cada carga, $\vec{E}p$ para carga positiva e $\vec{E}n$ para carga negativa, a soma vetorial resulta no vetor $\vec{E}$.

Exemplo 5.4

Determine a trajetória de um elétron (carga negativa) que entra perpendicularmente em um campo elétrico uniforme com velocidade v_o até se chocar com um anteparo que está a uma distância L da saída do campo elétrico. O caminho percorrido pelo elétron dentro do campo elétrico é a.

Solução:

Vamos supor que o elétron foi gerado paralelamente a superfície da Terra, semelhante a um lançamento horizontal. Em relação ao sistema de referência, o feixe inicialmente é lançado paralelo ao eixo x e como o elétron é uma carga negativa, aparece uma força contrária as linhas de campo elétrico, desviando o elétron para cima ou para baixo, a depender do sentido do campo elétrico entre as placas. Neste exemplo supomos o campo elétrico para baixo, então o elétron subiu e atingiu o anteparo na posição D.



A força que age sobre o elétron é dada pela 2ª lei de Newton, então

$$ma = qE \rightarrow a = \frac{q}{m}E$$

onde pode-se ver que a aceleração depende da razão q/m. Existe uma diferença muito grande em relação ao campo gravitacional, onde a aceleração é a mesma para todos os corpos.

O elétron é lançado horizontalmente com velocidade constante em A, mas submetido a uma aceleração na vertical. Deste modo podemos escrever as equações do movimento como

$$x = v_o t, \qquad y = \frac{qEt^2}{2m}$$

eliminando o t, encontra-se a equação da trajetória

$$y = \frac{qEt^2}{2m} = \frac{qE\left(\frac{x}{v_o}\right)^2}{2m} = \boldsymbol{\frac{qEx^2}{2mv_o^2}}$$

que mostra que é uma trajetória parabólica quando o elétron está dentro do campo elétrico, ao sair ele passar a ter trajetória retilínea até o anteparo. A deflexão $\boldsymbol{\alpha}$ que o elétron sofre no ponto B, que corresponde a x = a é calculado por

$$tag\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{2qEx}{2mv_o^2}\right)_{x=a} = \left(\frac{qEa}{mv_o^2}\right)$$

Levando em consideração que a distância BD muito pequeno comparado com h se L for grande, temos

$$tag\alpha = \boldsymbol{\frac{h}{L}} = \boldsymbol{\frac{q}{m}\frac{Ea}{v_o^2}}$$

Se conhecermos h, L, a, E e v_o, podemos determinar um grandeza muito importante na física a razão da carga pela massa do elétron (q/m).

Os tubos de raios catódicos, os precursores da TV com tubos, funcionam de modo semelhante ao descrito no exemplo 5.4, como pode ser visto na figura 5.13.

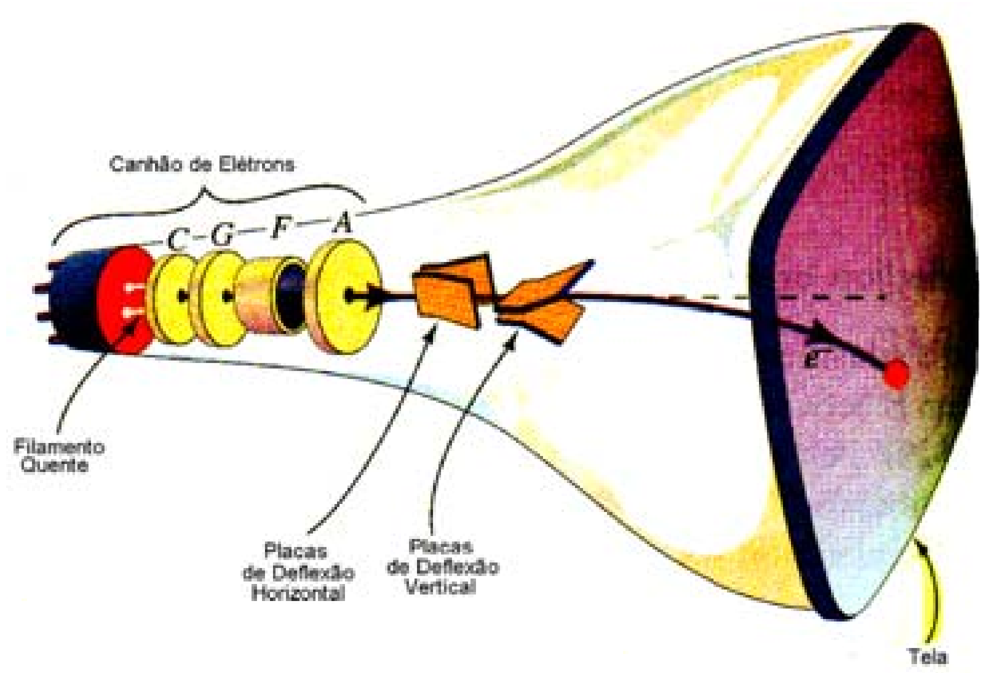


Figura 5.13 Tubo de raios catódicos (Fonte: http://hermes.ucs.br/ccet/defq/mlandreazza/CurAut01.htm #CAMPO ELÉTRICO).

Os elétrons passam por dois sistemas de deflexão, uma para controle da deflexão horizontal e outro para controle da deflexão vertical. Com o ajuste da intensidade do campo elétrico em cada sistema de deflexão pode escolher o ponto aonde os elétrons vão se chocar na tela; este ponto se torna visível graças ao material fluorescente depositado na superfície do tubo.

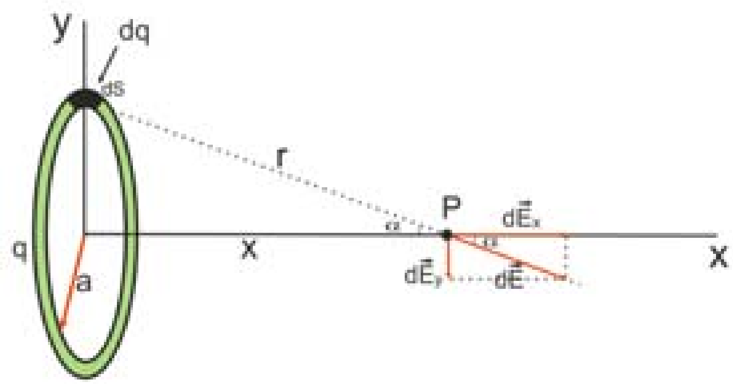
A formação das imagens que chegam aos nossos olhos é possível devido a alta velocidade de varredura horizontal do feixe de elétrons. Isto é semelhante a uma pessoa que faz um desenho pintando unicamente as linhas horizontais e as verticais iriam aparece como uma conseqüência natural da junção de várias linhas horizontais empilhadas uma sobre a outra.

Exemplo 5.5

Um condutor em forma de anel com raio a possui uma carga q distribuída uniformemente ao longo dele. Determine o campo elétrico em um ponto P situado sobre o eixo do anel a uma distância x de seu centro.

Solução:

Dividindo o anel em elementos infinitesimais de comprimento dS que contém uma carga infinitesimal dq, o vetor campo elétrico em P será dado por um elemento infinitesimal de campo elétrico $d\vec{E}$.



Se pegarmos um outro elemento dS situado em uma posição oposta ao primeiro, veremos que o vetor $d\vec{E}_y$ terá o sentido oposto ao primeiro, o que leva a um cancelamento da componente do campo elétrico $\vec{E}_y$. Entretanto, a cada novo elemento dS que seja somado o vetor $d\vec{E}_x$ vai aumentando o seu módulo . Quando somarmos todas as contribuições o vetor campo elétrico deverá ter apenas uma componente ao longo do eixo x, deste modo

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{x^2+a^2}$$

usando que $cos\alpha = \frac{x}{r} = x/(x^2+a^2)^{1/2}$, então

$$dE_x = dEcos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{x^2+a^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{xdq}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Para encontramos a componente resultante devemos integrar dE_x sobre todos os seguimentos do anel

$$\int dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\int dq$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{xq}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

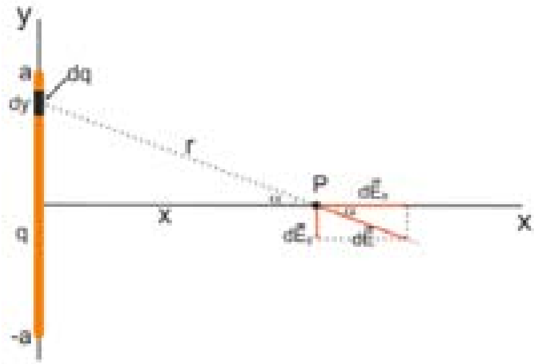
usando que $\vec{u}$ é um vetor unitário paralelo ao eixo x, temos

$$\vec{E} = E_x\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\vec{u}$$

Existem dois casos extremos que devemos analisar, tais como: a)para x = 0 temos que E = 0, isto corresponde ao centro do anel e b)para x >> a temos que $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{x^2}$, uma distância muito grande, o anel tem um comportamento típico de uma carga puntiforme, a tende para zero.

Exemplo 5.6

Um condutor em forma de um fio de comprimento $2a$ possui uma carga q distribuída uniformemente ao longo dele. Determine o campo elétrico em um ponto P situado sobre o eixo do anel a uma distância x de seu centro.



Solução:

Vamos chamar de ς = q/2a a densidade linear de carga, ou seja, a carga total é q = ς2a. Um elemento infinitesimal de carga está presente em um elemento infinitesimal de comprimento, então

$$dq = \lambda dy = \frac{qdy}{2a}$$

dE produzido no ponto P pelo elemento dy é dado por

$$dE = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dy}{2a(x^2+y^2)}$$

Observe que para o anel (exemplo 5.5) o valor de y = a, aqui isto não é possível devido ao fato que existirá contribuições menores do a. Por outro lado, a simetria para o eixo y está presente neste exemplo, pois a cada elemento dy acima do zero, vai existir um outro simétrico, a contribuição $d\vec{E}_y = 0$. Usando que $cos\alpha = \frac{x}{r} = x/(x^2+y^2)^{1/2}$

$$dE_x = dEcos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dy}{2a(x^2+y^2)}\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{xdy}{2a(x^2+y^2)^{3/2}}$$

fazendo a integral ao longo da barra de –a até a, ficamos

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qx}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qx}{2a}\left[\frac{y}{x^2(x^2+y^2)^{1/2}}\right]_{-a}^{a}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qx}{2a}\left[\frac{a}{x^2(x^2+a^2)^{1/2}} - \frac{-a}{x^2(x^2+a^2)^{1/2}}\right]$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qx}{2a}\frac{2a}{x^2(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{x(x^2+a^2)^{1/2}}$$

usando que $\vec{u}$ é um vetor unitário paralelo ao eixo x, temos

$$\boldsymbol{\vec{E} = E_x\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{x(x^2+a^2)^{1/2}}\vec{u}}$$

Para o caso de x >> a, podemos desprezar a no denominador e o resultado para o módulo de $\boldsymbol{\vec{E}}$ é semelhante o que foi obtido para o anel $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{x^2}$, a barra se comporta como se fosse uma carga puntiforme. O sinal da carga q é quem vai dar o sentido do vetor $\boldsymbol{\vec{E}}$.

Para o caso de x << a, precisamos introduzir a carga total q = ς2a e efetuar uma simplificação, assim

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda 2a}{x\left(a^2(x^2/a^2+1)\right)^{1/2}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda a}{xa\left(x^2/a^2+1\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{x\left(x^2/a^2+\ 1\right)^{1/2}}$$

O termo $\frac{x^2}{a^2} = 0$, já x << a, então

$$\boldsymbol{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{x}\vec{u}}$$

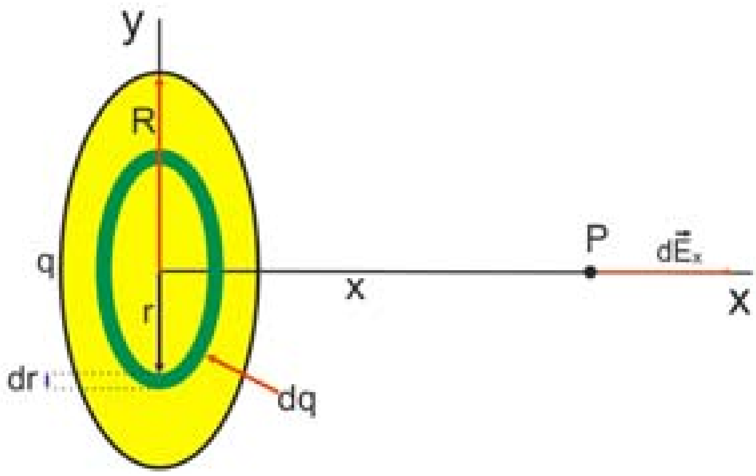
que equivale a uma fio muito longo.

Exemplo 5.7

Determine o campo elétrico produzido por um disco com raio R que possui uma densidade superficial de carga σ (densidade por unidade de área) positiva uniforme em um ponto situado sobre o eixo do disco a uma distância x de seu centro.

Solução:

De modo análogo aos exemplos 5.5 e 5.6, aplicando a simetria, a única componente que contribui com o campo no ponto P localizado no eixo x é $d\vec{E}_y$. Dentro deste disco, vamos supor que exista um anel com raio interno r e raio externo r + dr que possui uma carga dq. A sua área é aproximadamente $dA = 2\pi r.dr$, que é equivalente a uma área de um retângulo de comprimento 2ʒr e largura dr. Para provar isto, vamos primeiro calcular a área total do disco, assim

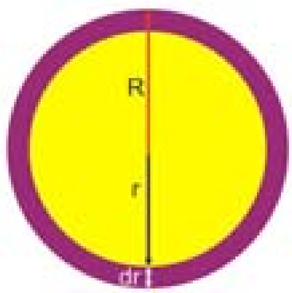


$$A = \pi R^2 = \pi(r + dr)^2 = \pi(r^2 + 2r.dr + (dr)^2)$$

a área do disco menor é dado por

$$A' = \pi r^2$$

através da diferença das áreas nós encontramos a área infinitesimal



$$dA = A - A' = \pi r^2 + 2\pi r.dr + \pi(dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r.dr + \pi(dr)^2$$

como o segundo termo da lado direito é muito pequeno, encontramos que aproximadamente $dA = 2\pi r.dr$.

A carga por unidade de área é $\sigma = \frac{dq}{dA} \rightarrow dq = 2\pi\sigma r.dr$ e de maneira análoga ao anel, encontramos o componente do campo elétrico, no ponto P, produzido por dq, ou seja

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{(2\pi\sigma r.dr)x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Para determinarmos o campo elétrico produzido pela contribuição de todos os anéis, integramos dE_x para todos os possíveis valores de r, ou seja

$$E_x = \int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{(2\pi\sigma r.dr)x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_o}\int_0^R \frac{rdr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

fazendo a substituição $z = x^2 + r^2 \rightarrow {dz}/{dr} = 2r \rightarrow rdr = {dz}/{2}$, obtemos uma integral mais fácil de ser resolvida, ou seja

$$E_x = \frac{\sigma x}{4\varepsilon_o}\int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{dz}{z^{3/2}} = \frac{\sigma x}{4\varepsilon_o}\left[\frac{-2}{z^{1/2}}\right]_{x^2}^{x^2+R^2}$$

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_o}\left[\frac{-1}{z^{1/2}}\right]_{x^2}^{x^2+R^2} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_o}\left[\frac{-1}{(x^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{-1}{(x^2)^{1/2}}\right]$$

$E_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_o}\left[\frac{-1}{(x^2+R^2)^{1/2}} + \frac{1}{x}\right] = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon_o}}\left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{((\boldsymbol{R^2/x^2})+\mathbf{1})^{\mathbf{1/2}}}\right]$,e na forma vetorial

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon_o}}\left[\mathbf{1} - \frac{\mathbf{1}}{((\boldsymbol{R^2/x^2}) + \mathbf{1})^{\mathbf{1/2}}}\right]\vec{\boldsymbol{u}}$$

Vamos supor que o raio R aumente indefinidamente e ao mesmo tempo mais carga foi adicionada para que σ permaneça cosntante. Neste limite R se torna muito maior do que x e o termo $\frac{1}{((R^2/x^2)+1)^{1/2}} \approx \mathbf{0}$ pode ser desprezado, então,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

Este resultado é surpreendente, o campo elétrico produzido por um plano infinito é independente da distância do ponto P ao plano. Como não existe na natureza um plano infinito, o equivalente é uma media do campo elétrico extremamente próximo ao plano (x << R).

5.4 – Potencial elétrico

Quando uma partícula é colocada a certa altura da superfície da Terra, ela se desloca para uma posição mais próxima a superfície. Como o campo gravitacional realiza trabalho, a partícula possui energia potencial. De modo semelhante acontece com uma carga quando é colocada em uma região que possui um campo elétrico. Ela passa a ter energia potencial, porque o campo realiza trabalho quando ela se desloca de uma posição para outra. Define-se potencial elétrico de um ponto do campo elétrico como sendo a razão entre a energia potencial elétrico pela carga colocada no ponto, assim

$$\boldsymbol{V = \frac{E_p}{q}} \tag{5.6}$$

onde $\boldsymbol{V}$ é potencial elétrico, $\boldsymbol{E_p}$ enegia potencial de uma carga $\boldsymbol{q}$. A unidade do potencial elétrico é $\boldsymbol{J/C}$. A unidade mais usual é o $\boldsymbol{Volt}$ no lugar de J/C a qual é designada simplesmente pela letra $\boldsymbol{V}$, em homenagem a Alessandro Volta (1745-1827).

Quando uma carga sai de uma posição que tem um potencial V_1 e vai até uma outra que tem potencial V_2, usado qualquer tipo de trajetória, o campo elétrico realiza trabalho e é dado por

$$W = -\Delta E_p = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right) = -(qV_2 - qV_1) = -q(V_2 - V_1) = -q\Delta V$$

$$\boldsymbol{V_1 - V_2 = \frac{W}{q}} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\Delta V = -\frac{W}{q}} \tag{5.7}$$

A partir da equação 5.7, define-se que a ***diferença do potencial elétrico*** $(\boldsymbol{\Delta V})$ entre dois pontos como o trabalho realizado pelo campo elétrico para mover uma unidade de carga positiva entre dois pontos. Um determinado potencial pode ser encontrado medindo o trabalho realizado pelo campo elétrico de deslocar uma carga de um determinado ponto para outro onde o potencial $V_2 = 0$, que escolhido como sendo no infinito $(V = W/q)$.

Quando uma partícula de carga fundamental $\boldsymbol{e}$ se move em um $\boldsymbol{\Delta V = 1\,V,}$ temos

$$1\,V = \frac{W}{e} \quad \text{ou} \quad 1\,eV = W$$

deste modo, define-se ***1 elétron-Volt*** o trabalho realizado sobre uma partícula de carga $\boldsymbol{e}$ quando se move numa diferença de potencial de $\boldsymbol{1\,V}$. Como $e = 1{,}6022x10^{-19}\,C$, temos que $1\,eV = 1{,}6022x10^{-19}Cx1V = 1{,}6022x10^{-19}\,J$.

Em determinadas situações pode-se ter um deslocamento infinitesimal, ou seja, dois potenciais tão próximos que podemos trocar ΔV por dV e o trabalho da força elétrica $F = qE$ é dado por $dW = Fds = qEds$, assim a partir da equação 5.7, podemos escerver

$$dV = -\frac{dW}{q} = -\frac{qEds}{q} = -Eds$$

$$\boldsymbol{E = -\frac{dV}{ds}} \tag{5.8}$$

A equação 5.8 corresponde a componente do campo elétrico na direção do deslocamento e que a unidade é o $\boldsymbol{V/m}$, a qual é mais usual do que $\boldsymbol{N/C}$. O sinal negativo indica que o sentido do campo elétrico é mesmo para onde o potencial diminui.

Exemplo 5.8

Determine o potencial elétrico em um campo elétrico uniforme.

Solução:

Aplicado a equação 5.8 para um campo elétrico paralelo ao eixo x e admitindo que em $\boldsymbol{x = 0}$ o potencial elétrico $\boldsymbol{V = 0}$, temos

$$E = -\frac{dV}{dx} \longrightarrow dV = -Edx \rightarrow \int_0^V dV = -E\int_0^x dx$$

$$[V]_0^V = -E[x]_0^x \rightarrow [V-0] = -E[x-0]$$

$$\boldsymbol{V = -Ex}$$

No sentido que aponta o campo elétrico o potencial decresce linearmente.

Exemplo 5.9

Determine o potencial elétrico de uma carga pontual e de uma distribuição de cargas.

Solução:

O campo elétrico em volta de uma carga pontual tem uma propagação radial, na equação 5.8 trocando s por r e usando a equação 5.4 que $E = q/4\pi\varepsilon_o r^2$, temos

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} = -\frac{dV}{dr} \rightarrow dV = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dr}{r^2}$$

Supondo que no infinito V = 0, assim

$$\int_0^V dV = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\int_\infty^r \frac{dr}{r^2}$$

$$[V]_o^V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r \rightarrow V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{\infty}\right] = \boldsymbol{\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}}$$

Este resultado pode ser ampliado para uma distribuição de $\boldsymbol{n}$ cargas puntiformes, assim, o potencial em um ponto qualquer do espaço corresponde a contribuição de cada carga neste ponto, temos

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}+\frac{q_3}{r_3}+\cdots+\frac{q_n}{r_n}\right] = \boldsymbol{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}}$$

Com os resultados do exemplo 5.9, colocando uma carga Q a uma distância r da carga q, podemos determinar a energia potencial Ep = QV, assim

$$E_p = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o r}$$

para uma distribuição de n cargas, a energia potencial sobre Q, será a contribuição de cada carga, assim

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q_1Q}{r_1}+\frac{q_2Q}{r_2}+\frac{q_3Q}{r_3}+\ \ldots+\frac{q_nQ}{r_n}\right] = \boldsymbol{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_iQ}{r_i}}$$

A cada posição do espaço existe um potencial distinto, para um campo elétrico com linhas de força paralelas, existe a cada posição o potencial que forma uma ***superfície equipotencial*** de planos paralelos, para uma carga esférica, as superfícies potenciais são esferas. Seja um plano ou uma esfera, a superfície tem o mesmo potencial para uma determinada posição r no espaço e a superfície equipotencial é sempre perpendicular ao campo elétrico (figura 5.14)

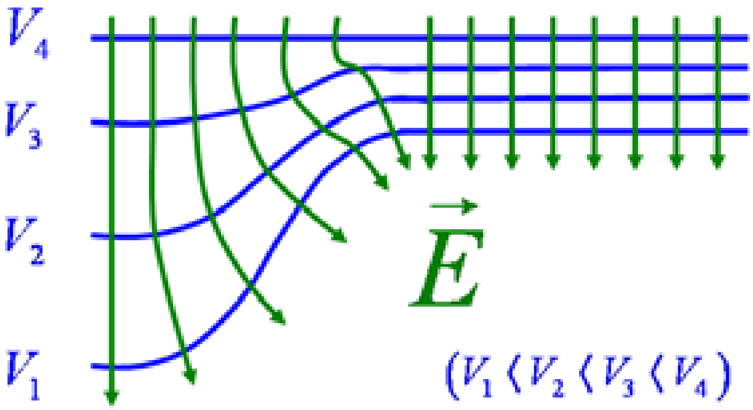
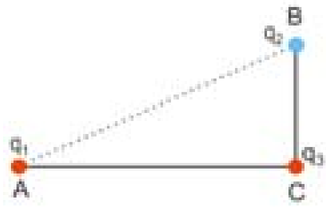


Figura 5.14 Superfícies equipotenciais onde o potencial elétrico é constante e sempre perpendicular ao campo elétrico (Fonte: http://baldufa.upc.es/baldufa/parti/h0/h0b007/h0b007.htm).

Exemplo 5.10

Dada a distribuição de cargas onde q1 = 1,5 mC, q2 = -0,5 mC, q3 = 0,2 mC e AC = 1,2 m e BC = 0,5 m, determine a energia potencial elétrica da carga q_3.



$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_o r_1} = 9x10^9 \frac{1{,}5x10^{-3}}{1{,}2} = 11{,}25x10^6\ V$$

$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_o r_2} = 9x10^9 \frac{-0{,}5x10^{-3}}{0{,}5} = -9x10^6\ V$$

O potencial elétrico total na posição da carga q_3, em C, é dado por

$$V = V_1 + V_2 = 11{,}25x10^6 - 9x10^6 = 2{,}25x10^6\ V$$

Finalmente, a energia potencial da carga da carga q_3 é

$$E_p = q_3 V = (0{,}2x10^{-3})(2{,}25x10^6) = 0{,}45x10^3 = \mathbf{4{,}5x10^2\ J}$$

Exemplo 5.11

Calcule o potencial elétrico da barra do exemplo 5.6 ao longo da reta passando perpendicular ao centro da barra em um ponto P situado a uma distância x do centro.

Solução:

Sabendo que $E = -\frac{dV}{dy}$ e do exemplo 5.6 que $E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o r}$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\lambda = q/2a$, então

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow dV = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

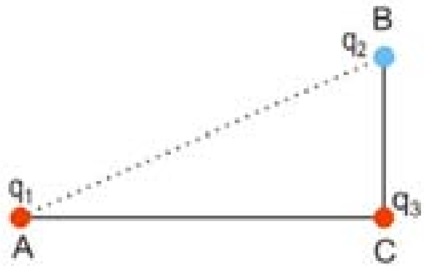
$$V = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left[\ln\left(y + \sqrt{y^2+x^2}\right)\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\left[\ln\left(a + \sqrt{a^2+x^2}\right) - \ln\left(-a + \sqrt{a^2+x^2}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{\sqrt{a^2+x^2}-a}\right)}$$

ATIVIDADES

1) Dada a distribuição de cargas onde q_1 = 1,5 mC, q_2 = -0,5 mC, q_3 = 0,2 mC e AC = 1,2 m e BC = 0,5 m, determine a força resultante sobre q_3.



2) Considere que para o exemplo 5.2 foi colocado um partícula q_4 carregada de -3,0 mC a 1 cm de distância da partícula q_3, na mesma direção da força resultante, dentro do triângulo. Determine o módulo, direção e sentido da nova força resultante.

3) Determine o valor da carga q para o exemplo 5.3 sabendo que L = 120 cm, m = 10 g e x = 5 cm.

4) Explique o que ocorre se uma das esferas do exemplo 5.3 for descarregada, e ache a nova posição de equilíbrio.

5) Desenhe as linhas de campo para duas cargas esféricas carregas negativamente, de modo semelhante ao da figura 5.10.

6) Discuta qual seria a trajetória de uma partícula carregada com carga positiva do exemplo 5.4. Faça um desenho explicativo.

7) Suponha que um elétron ($q = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C e $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg) está inicialmente em repouso, dentro de um campo elétrico uniforme ($E = 1 \times 10^4$ N/C) gerado por duas placas paralelas. Quando o campo elétrico é ligado ele percorre a distância 1 cm até se chocar com uma das placas. Determine: a)a aceleração; b)a velocidade ao se chocar com a outra placa; c)o tempo para chegar na outra placa e d)a energia cinética.

8) A carga q_3 foi deslocada para uma posição intermediária entre A e B, determine o potencial da carga q_3 nesta nova configuração.

9) Em relação aos exemplos 5.6 e 5.11, supondo que a = 0,5 cm. Determine: a)o potencial elétrico a x = 1 cm; b)o potencial elétrico a x = 1000 m e c)faça uma discussão a respeito dos resultados.

10) Determine a energia potencial de uma carga q = 2 mC colocada nas duas posições escritas na atividade 9.

CONCLUSÃO

Nessa aula você aprendeu que as interações elétricas também são devidas a ação de campos, assim como o campo gravitacional, discutidos na aula anterior. No entanto, diferentemente da ação gravitacional que tem caráter apenas atrativo, as interações devidas ao campo elétrico podem ser atrativas ou repulsivas, dependendo da natureza das cargas elétricas envolvidas.

Pudemos constatar a relevância da lei de Coulomb para a determinação da força de interação elétrica entre corpos carregados demonstrando que esta força depende tanto do valor das cargas envolvidas como da distância relativa entre elas.

Finalmente você aprendeu o que faz uma partícula carregada se deslocar espontaneamente entre dois pontos de um campo elétrico. Lembre-se que todo corpo eletricamente carregado imerso em um campo elétrico adquire uma energia potencial elétrica e que a diferença de potencial entre dois pontos desse campo pode realizar trabalho sobre esse corpo.

RESUMO

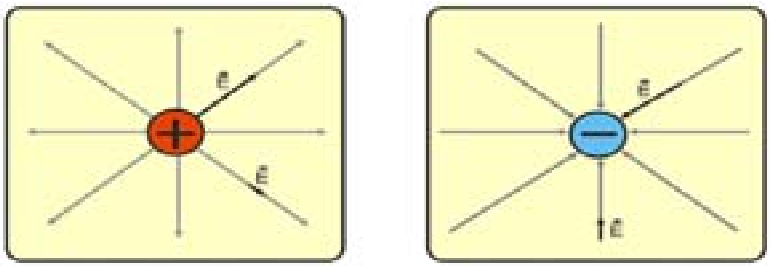
Lei fundamental de interação elétrica: Dois corpos com a mesma eletrização (positiva ou negativa) repelem-se, mas se eles possuem eletrização opostas, atraem-se.

Lei de Coulomb: A força de interação eletrostática entre duas partículas carregadas é proporcional ao produto das cargas e ao inverso da distância ao quadrado e tem direção da linha que une as cargas.

$$F = k\frac{qq'}{r^2}$$

Campo elétrico

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$



O vetor campo elétrico é sempre tangente às linhas de força

Potencial elétrico

$$V = \frac{E_p}{q}$$

Diferença do potencial elétrico (ΔV)

$$\Delta V = -\frac{W}{q}$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula estudaremos uma das leis mais importantes do eletromagnetismo: a lei de Gauss.

GLOSSÁRIO

Campo – domínio; campo de ação.

Radial – na direção do raio.

REFERÊNCIAS

ALONSO, M., Finn, E. J. Física. Vol2. 1ed. São Paulo: Addison-Wesley, 1999.

SERWAY, R. A., JEWETT Jr, J. W. Princípios de Física. 3 ed. São Paulo: Thomson, 2005.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. Fundamentals of Physics – Extended. Vol3. 4 ed. New York: John Wiley & Sons, 1993, 1306p.