Aula 5

LEI DE GAUSS

META

Mostrar a fundamental importância da lei de Gauss para a compreensão do campo elétrico e como essa lei facilita o desenvolvimento matemático de problemas complexos de eletricidade.

OBJETIVO

Saber calcular o fluxo elétrico e o campo elétrico através de uma superfície de contorno bem definida.

Determinar a capacitância e energia acumulada em um capacitor.

Saber caracterizar um dielétrico.

PRÉ- REQUISITOS

Conceitos de carga elétrica, lei de Coulomb, campo e potencial elétricos.

Introdução

Nessa aula Partiremos da definição de fluxo do campo elétrico para chegar à lei de Gauss (1777-1855) e através dela determinar o vetor campo elétrico gerado por distribuições mais complexas de carga elétrica. Salientamos que é de fundamental importância, o caro estudante observar ainda, que as leis de Gauss e Coulomb são equivalentes entre si, pois descrevem o mesmo fenômeno, embora a partir de conceitos diferentes.

Definiremos ainda outro conceito fundamental ao estudo da eletricidade que é a capacitância, ou seja, capacidade que os condutores têm em armazenar cargas elétricas. Em seqüência são apresentados os capacitores, dispositivos elétricos de larga aplicação em circuitos elétricos, cuja principal função é justamente armazenar cargas elétricas.

6 – Lei de Gauss para campos elétricos

6.1 - Fluxo do campo elétrico

Para chegarmos à dedução da lei de Gauss é necessário definirmos a grandeza física fluxo do campo elétrico. Tomemos, por exemplo, um campo elétrico e nele foi traçado um anel formando uma determinada área A (figura 6.1).

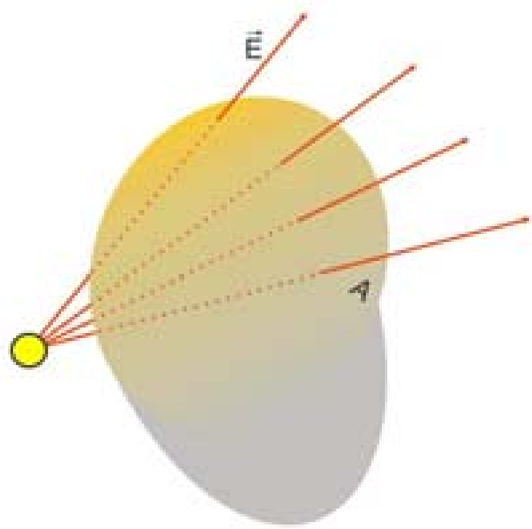


Figura 6.1 Campo elétrico interceptado por uma determinada área A.

Vamos dividir a superfície A em inúmeros elementos de área dA e cada um deles existe um vetor unitário $\vec{u}$ ($\vec{A} = A\vec{u}$) perpendicular a superfície e formando certo ângulo θ com o vetor campo elétrico (figura 6.2).

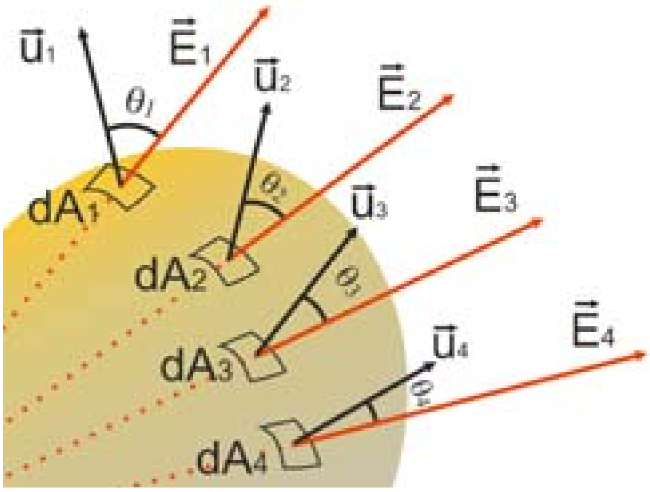


Figura 6.2 Representações dos elementos de área que formam um certo ângulo com os vetores campo elétrico.

Podemos escrever que $d\vec{A}_1 = \vec{u}_1 dA_1$, $d\vec{A}_2 = \vec{u}_1 dA_2$, $d\vec{A}_3 = \vec{u}_1 dA_3$ e a assim sucessivamente.

Através do ***produto escalar*** de um elemento de área $d\vec{A}_i$ e uma componente do vetor campo elétrico $\vec{E}_i$ define-se o ***fluxo do campo elétrico***, assim

$$\Phi_\mathrm{i} = d\vec{A}_i . \vec{E}_i = dA_i(\vec{u}_{i.}\vec{E}_i)$$

O fluxo sobre toda a superfície é dado pela soma do fluxo de todos os elementos de área, conforme

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots = dA_1(\vec{u}_{1.}\vec{E}_1) + dA_2(\vec{u}_{2.}\vec{E}_2) + dA_3(\vec{u}_{3.}\vec{E}_3) + \cdots$$

Podemos escrever em forma de somatório para n elementos de área, assim

$$\boldsymbol{\Phi = \sum_{i=1}^{n} dA_i(\vec{u}_{i.}\vec{E}_i)} \tag{6.1}$$

Fazendo todos os elementos de área tender à zero, o somatório passa para uma ***integral de superfície***, então a equação 6.1 se transforma em

$$\boldsymbol{\Phi = \oint dA(\vec{u}.\vec{E})} \tag{6.2}$$

Como o produto escalar $\vec{u}.\vec{E} = uEcos\theta = 1Ecos\theta = Ecos\theta$, a equação 6.2, fica

$$\boldsymbol{\Phi = \oint EdAcos\theta} \tag{6.3}$$

O sinal da equação 6.3 indica se positivo o fluxo sai e se negativo o fluxo entra. Para o caso de uma superfície onde o vetor unitário ($\vec{\boldsymbol{u}}$) é paralelo e está no mesmo sentido do campo elétrico ($\vec{\boldsymbol{E}}$), $\theta = 0 \ \rightarrow cos0 = 1$, então a integral é apenas do campo elétrico sobre toda a superfície A, assim

$$\boldsymbol{\Phi} = \oint \boldsymbol{EdA} \tag{6.4}$$

Exemplo 6.1

Um carga pontual q positiva gera um campo elétrico no espaço. Determine o fluxo elétrico através de uma superfície esférica r em volta desta carga.

Solução:

A superfície de raio r é representada através da figura 5.3.

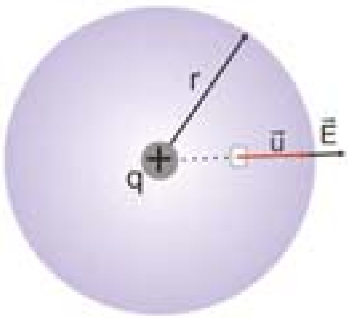


Figura 6.3 Carga q com uma superfície de raio r.

O campo elétrico é calculado através da equação 5.4, então

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

introduzindo o campo elétrico na equação 6.4 e como o $\vec{u} \parallel \vec{E}$ e mesmo sentido ($\theta = 0$), temos

$$\Phi = \oint \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} dA = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \oint dA$$

a integral é sobre toda a superfície de uma esfera de raio r, então o resultado corresponde a exatamente a área desta esfera, assim

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} . 4\pi r^2 = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{\varepsilon_o}}$$

O resultado deste exemplo indica que o fluxo do campo elétrico sobre uma esfera de raio r, depende apenas da carga e independe do raio da superfície.

6.1 – Lei de Gauss

Generalizando o exemplo 6.1, podemos imaginar uma distribuição de cargas no espaço. O fluxo do campo elétrico será dado por todas as cargas que estiverem dentro da superfície de integração, sendo assim $q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots$, deste modo, podemos anunciar a ***lei de Gauss*** como sendo o fluxo elétrico através de uma superfície fechada que circunda as cargas q_1, q_2, q_3, ..., assim

$$\oint \boldsymbol{dA(\vec{u}.\vec{E})} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{\varepsilon_o}} \qquad (6.5)$$

onde $q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \ldots$ é a carga total dentro da superfície fechada. Se existir alguma carga fora da superfície, elas não contribuem para o fluxo.

A ***lei de Gauss*** descrita na equação 6.5 é muito útil para calcular o campo elétrico de uma distribuição de carga com simetria bem comportada e também ela representa uma propriedade fundamental do campo elétrico.

Exemplo 6.2

Determinar o campo elétrico de (a) uma carga distribuída uniformemente sobre um plano e (b) dois planos paralelos com cargas iguais e de sinal contrário.

Solução:

(a)A primeira providência é representar no plano o campo elétrico, e para isso vamos supor uma distribuição de cargas positivas sobre a superfície do plano, ou seja, existem linhas de campo saindo de ambos os lados do plano (figura 6.4).

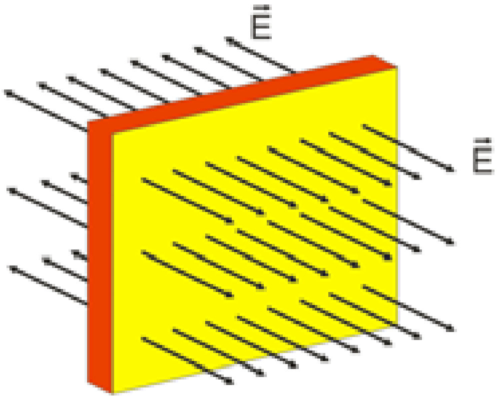


Figura 6.4 Representação das linhas de campo elétrico de um plano carregado positivamente.

Devemos desenhar um cilindro como a superfície conforme a figura 6.5.

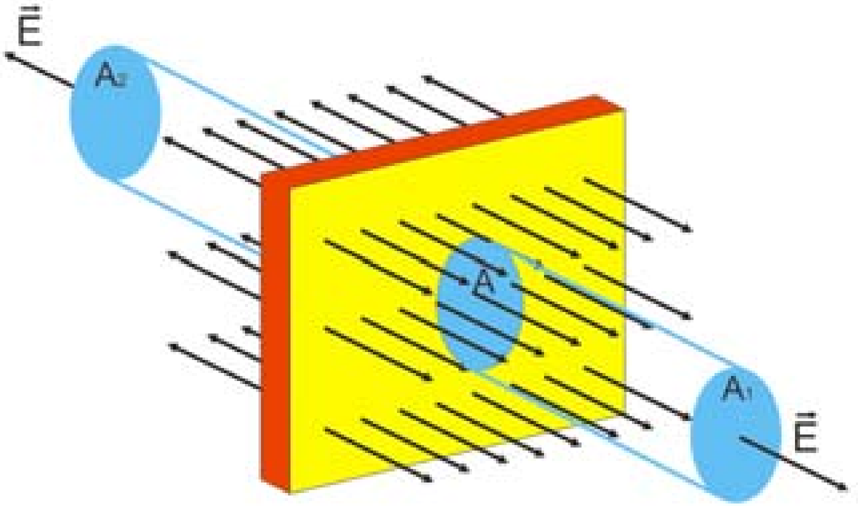


Figura 6.5 Campo elétrico e a superfície fechada cilíndrica.

O fluxo elétrico pode ser separado em três partes: i) o fluxo através de A1 é $\Phi_{A1} = +EA$; ii) o fluxo através de A2 é também $\Phi_{A2} = +EA$ (no sentido contrário) e iii) o fluxo através da superfície lateral do cilindro é nulo porque o campo elétrico é perpendicular ao vetor unitário, então $\theta = 90 \rightarrow cos90 = 0$. Assim, o fluxo total é

$$\Phi = \Phi_{A1} + \Phi_{A2} = EA + EA = 2EA$$

usando a lei de Gauss 6.5, temos

$$2EA = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

e carga q indicada pela área sublinhada é o produto da densidade de carga superficial pela área ($q = \sigma A$), assim

$$2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_o} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

Este resultado indica que o campo elétrico independe da distância e assim ele é constante em todo o espaço.

(b)Para o caso de dois planos, supondo que a distância entre eles seja muito menor do que a dimensão de ambos, temos que na região exterior aos planos, existem campos elétricos de igual módulo, mas sentido contrário, no plano com carga +Q, o campo sai e no plano com carga –Q, o campo chega, dando uma resultante zero. Por outro lado, o campo no interior é diferente de zero, eles estão no mesmo sentido. Podemos ver isto em forma de um desenho de um corte transversal das duas placas (figura 6.6).

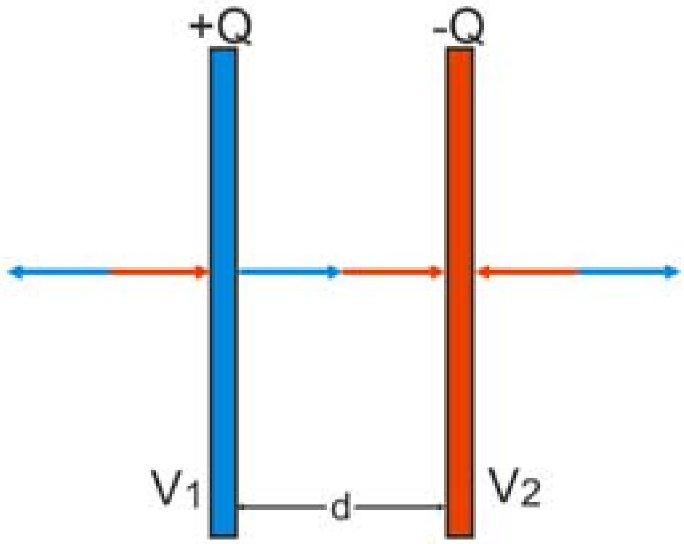


Figura 6.6 Campos elétricos entre duas superfícies planas e paralelas, com a mesma carga, mas de sinal contrário ($V_1 > V_2$).

No interior é produzido um campo elétrico que é o dobro de um só plano, então

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

Como d é a distância entre os planos a diferença de potencial entre eles usando 5.8 é

$$\Delta V = V_1 - V_2 = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_o} \qquad (6.6)$$

Exemplo 6.3

Determinar o campo elétrico para uma esfera metálica maciça e oca carregada com uma carga Q de raio a.

Solução:

Tanto para uma esfera maciça ou oca, como ela é metálica (condutora), toda a carga será distribuída na superfície e o procedimento para encontrar o campo elétrico é o mesmo para uma carga puntiforme.

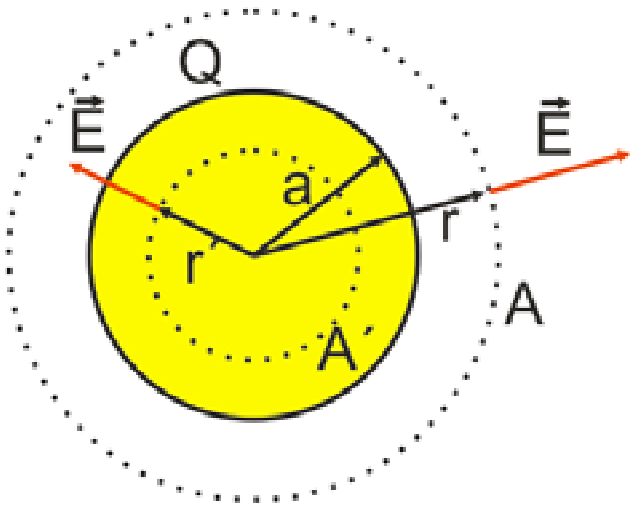


Figura 6.7 Superfície externa A e interna A´ de uma esfera carregada superficialmente.

Para r >a, temos

$$\oint EdA = \frac{Q}{\varepsilon_o} \rightarrow E\oint dA = \frac{Q}{\varepsilon_o} \rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{4\pi r^2 \varepsilon_o}}\ (\boldsymbol{r} > a)$$

Para r´ < a, segundo a lei de Gauss, no interior da superfície A´ não tem carga, então

$$E(4\pi r'^2) = 0 \rightarrow \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}\ (\boldsymbol{r}' < a)$$

Exemplo 6.4

Determinar o campo elétrico para uma esfera maciça de raio a onde a carga Q está distribuída em todo o volume.

Solução:

A superfície interna está representada na figura 6.8. O cálculo para superfície externa (r > a) é o mesmo do exemplo 6.5.

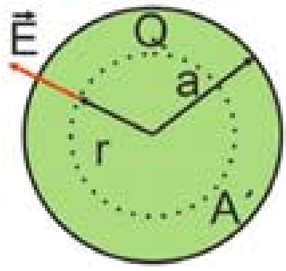


Figura 6.8 Esfera com carga distribuída em todo o volume.

A densidade de carga volumétrica dentro da superfície A´ (ρ´) é igual a densidade total (ρ), então

$$\rho\,' = \rho \rightarrow \frac{Q\,'}{V\,'} = \frac{Q}{V} \rightarrow \frac{Q\,'}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{Q}{\frac{4\pi a^3}{3}}$$

$$Q\,' = Q\frac{r^3}{a^3}$$

Quando r´ = a, Q´ = Q, com deveria ser. Aplicando a lei de Gauss na superfície A´, temos

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q\,'}{\varepsilon_o} = \frac{Q\frac{r^3}{a^3}}{\varepsilon_o}$$

$$\boldsymbol{E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_o a^3} \;\; (r < a)}$$

O campo elétrico no interior de uma esfera carrega uniformemente é diretamente proporcional à distância do ponto ao centro da esfera.

Exemplo 6.5

Um fio em forma de um cilindro infinito possui densidade de carga $\boldsymbol{\lambda}$ e raio $\boldsymbol{a}$. Determine o campo elétrico: a) quando a distribuição de carga estiver na superfície (condutor) e b) quando a distribuição de carga estiver em todo volume (dielétrico).

Solução:

(a)Analisando a simetria a nossa superfície fechada mais conviniente é um cilindro de altura L e raio r (figura 6.9).

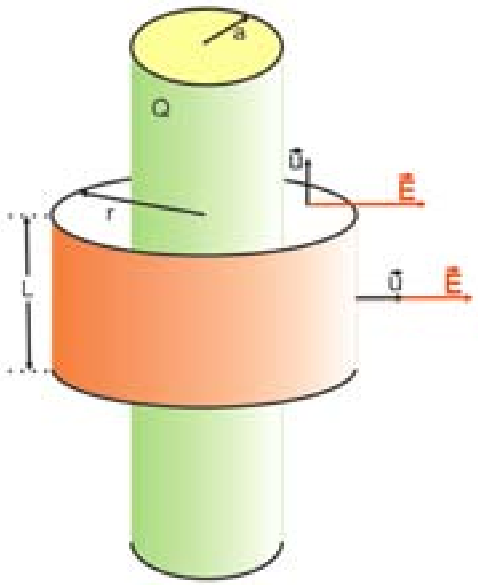


Figura 6.9 Campo elétrico produzido por um cilíndro infinito carregado superficalmente com superfície cilíndrica de comprimento L e raio r.

O campo elétrico em um cilindro infinito é radial, então o vetor campo elétrico é paralelo as duas bases do cilíndro (inferior e superior). Sendo assim, o ângulo entre $\vec{E}$ e $\vec{u}$ é 90º, fazendo com que o fluxo seja nulo em ambas bases. Em relação a lateral, o ângulo entre $\vec{E}$ e $\vec{u}$ é 0, a inegral de superfície corresponde a área de um retângulo de comprimento $2\pi r$ e largura L, pela lei de Gauss, temos

$$E(2\pi rL) = \frac{Q}{\varepsilon_o} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_o}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon_o r}} \quad (\boldsymbol{r} > a)$$

Este resultado é igual ao se colocar toda a carga em um fio com r tendendo para zero. Para r < a, como a carga está na superfície, de modo semelhante a esfera, E = 0.

(b)Para a carga distribuída no interior, vamos colocar a superfície em forma de cilíndro no interior do fio (figura 6.10).

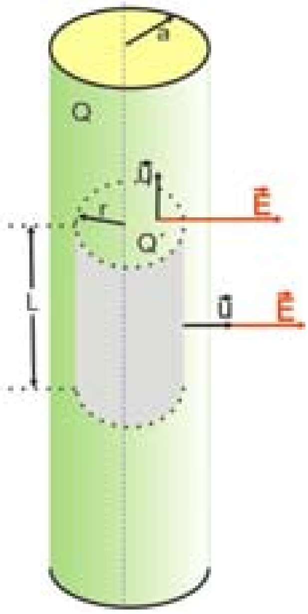


Figura 6.10 Campo elétrico de um cilíndro carregado volumetricamente com superfície cilíndrica de comprimento L e raio r.

O cálculo do campo elétrico para r > a é mesmo para um cilindro carregado superficalmente. Para r < a, de maneira análoga a esfera, a densidade de carga no inetrior do cilíndro de raio r é igual a densidade do colíndro de raio a, assim

$$\rho\,' = \rho \rightarrow \frac{Q\,'}{V\,'} = \frac{Q}{V} \rightarrow \frac{Q\,'}{\pi r^2 L} = \frac{Q}{\pi a^2 L}$$

$$Q\,' = Q\frac{r^2}{a^2} = \lambda L\frac{r^2}{a^2}$$

Aplicando a lei de Gauss, temos

$$E(2\pi r L) = \frac{Q\,'}{\varepsilon_o} = \frac{\lambda L\frac{r^2}{a^2}}{\varepsilon_o} \rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\lambda r}}{\boldsymbol{2\pi\varepsilon_o a^2}} \;\; (\boldsymbol{r} < a)$$

O campo elétrico de um cilindro carregado volumetricamente é proporcional à distância do ponto ao eixo.

Podemos ver claramente que a lei de Gauss é uma ferramenta muito poderosa na resolução de problemas que tenham uma superfície de contorno bem comportada. A quantidade de cálculo fica muito reduzida em relação a outros métodos, como foi visto no capítulo 5.

7 – Capacitância elétrica

Como foi visto no exemplo 5.9, o potencial elétrico a uma distância r do centro de uma carga pontual é $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. De modo análogo, o potencial na superfície de uma esfera carregada de raio R é $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$. Quando esta esfera está envolvida por um dielétrico no lugar do vácuo, $\boldsymbol{\varepsilon_o}$ deve ser substituido por $\boldsymbol{\varepsilon}$ (permitividadade elétrica), assim temos

$$\boldsymbol{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R} \rightarrow \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon R} \tag{7.1}$$

A razão Q/V é uma constante para a esfera e independe da carga Q, uma vez que se a carga sofrer alguma alteração o potencial também terá, pois ele é proporcional a carga.

Esta afirmação pode ser extrapolada para qualquer tipo de condutor carregado e a razão Q/V é chamada de ***capacitância elétrica***, assim

$$\boldsymbol{C = \frac{Q}{V}} \tag{7.2}$$

A unidade da capacitância é o Farad (F) em homenagem a Michael Farady (1791-1867).

Normalmente, a capacitância de um condutor é afetada pela presença de outro condutor, modificando o seu potencial. O conjunto de dois condutores é chamado de condenador ou capacitor, que é bastante utilizado na eletrônica.

Exemplo 7.1

Determinar a capacitância de um condensador plano.

Solução:

O condensador plano é formado por duas placas paralelas de condutores , separados por um distância d e o espaço entre elas preenchido com um ***dielétrico*** (figura 7.1).

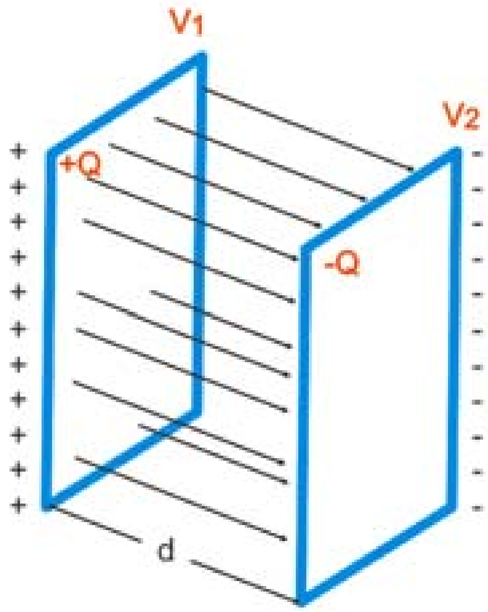


Figura 7.1 Condensador de placas paralelas.

Usando a equação 6.9, a diferença de potencial entre as placas é dada por

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{\sigma d}{\varepsilon}$$

Levando em consideração que A é area de cada placa, então $Q = \sigma A$, onde σ é a densidade superficial de carga, então

$$\sigma = \frac{Q}{A} \rightarrow \Delta V = \frac{Qd}{\varepsilon A} \rightarrow \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon A}{d}$$

$$\boldsymbol{C = \frac{\varepsilon A}{d}} \qquad (7.3)$$

No exemplo 7.1 foi dito que o condensador ou capacitor é formado popr dua placas separadas por um dielétrico. ***O que é um dielétrico?***

Dielétrico é um material isolante que permite separar mecanicamente as duas placas e suas moléculas, sendo polares ou apolares, se orientam com o campo elétrico existente entre as placas. No caso das moléculas apolares, o campo elétrico favorece a formação de dipolos induzidos: sobre a carga positiva atua uma força no sentido do campo e sobre a a carga negativa atua uma força no sentido contrário ao campo. Para as moléculas polares, o campo elétrico faz uma orientação dos dipolos que já existem naturalmente.

De acordo com a figura 7.2, pode-se observar que perto de cada placa existem cargas induzidas de sinais opostos. Algumas linhas de campo que saem da placa positiva não chegam na placa negativa, pois terminam nas cargas induzidas. Por caso disto, o campo elétrico no interior do capacitor com dielétrico tem uma intensidade reduzida em relação a um capacitor com vácuo entre as placas.

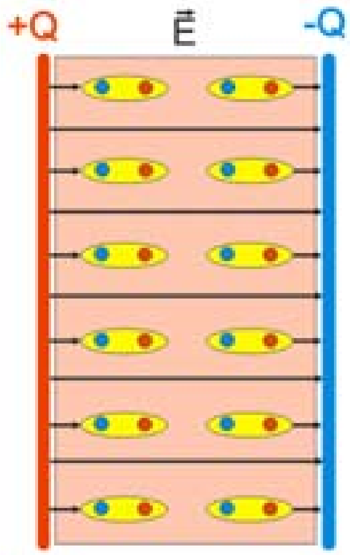


Figura 7.2 Capacitor de placas paralelas com um dielétrico orientado pelo campo elétrico.

Para um capacitor vazio a equação 7.3 pode ser escrita como $C_o = \frac{\varepsilon_o A}{d}$ e a razão fica

$$\frac{C}{C_o} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = \varepsilon_r \qquad (7.4)$$

A equação 7.4 descreve a ***permitividade relativa*** ou ***constante dielétrica*** do material colocado entre as placas. Ela também mostra que a capacitância elétrica aumenta de um fator de $\varepsilon/\varepsilon_o$. Este aumento está associado ao efeito de blindagem das cargas opostas que se induzem na superfície próxima a placa do condensador. Estas cargas, além de diminuirem a carga real do capacitor, diminuiem o seu potencial pelo mesmo fator.

Os capacitores podem ser associados com o objetivo de se obter uma capacitância que não tenha disponível em um único capacitor. Tanto eles podem ser ***associados*** em ***série*** como em ***paralelo***. Na associação em série (figura 7.3), o placa positiva de um está ligada a placa negativa do primeiro vizinho e assim sucessivamente. A consequência desta associação, é que, todos os capacitores terão a mesma carga positiva ou negativa. Lembre-se de que o elétron não passa de uma placa para outra, o que existe é uma indução, se em uma placa está carregada de elétrons, da outra placa, os elétrons serão expulsos, gerando uma carga positiva (falta de elétrons).

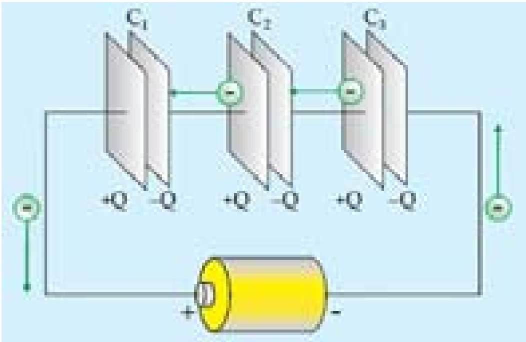


Figura 7.3 Associação de capacitores em série (Fonte: http://www.fisica-potierj.pro.br/poligrafos/capacitores3.htm).

Podemos escreve que para cada capacitor existirá uma diferença de potencial, assim

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}, \qquad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}, \qquad \Delta V_3 = \frac{Q}{C_3}, \ldots, \Delta V_n = \frac{Q}{C_n}$$

A diferença de potencial sobre a associação em série, fica

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \cdots + \Delta V_n = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \cdots + \frac{Q}{C_n}$$

$$\Delta V = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right)$$

e a capacitância equivalente $\boldsymbol{C}$ será dada por

$$\boldsymbol{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n} \rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C}}$$

Para uma associação em paralelo, as placas de mesmo sinal estão conectadas ao um ponto comum, conduzindo o sistema a uma mesma diferença de potencial(7.4).

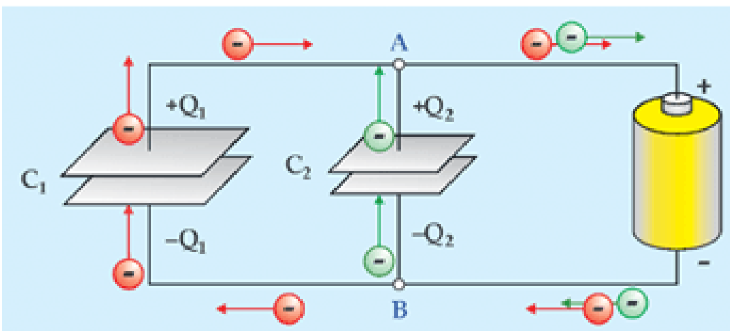


Figura 7.3 Associação de capacitores em paralelo (Fonte: http://www.fisica-potierj.pro.br/poligrafos/capacitores3.htm).

A carga acumulada em cada capacitor é dada por

$$Q_1 = C_1\Delta V, \qquad Q_2 = C_2\Delta V, \qquad Q_3 = C_3\Delta V, \ldots, Q_n = C_n\Delta V$$

e a total é

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_n = C_1\Delta V + C_2\Delta V + C_3\Delta V + \cdots + C_n\Delta V$$

$$Q = (C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n)\Delta V = C\Delta V$$

onde $\boldsymbol{C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n}$ é o capacitor equivalente da asoociação em paralelo.

Para carregar um condutor é necessário energia. O processo de aumentar a carga requer uma realização de trabalho para vencer a repulsão da carga já existente no condutor. Vamos supor um condutor com uma carga Q, então V = Q/C. Quando uma carga dQ é acrescentadao trabalho realizado é dado por W = VdQ, que corresponde ao um aumento de energia do condutor dE_a, assim

$$dE_a = W = VdQ = \frac{Q}{C}dQ$$

A energia acumulada quando a carga aumenta de zero até uma carga Q e dada pela inegral, assim

$$E_a = \frac{1}{C}\int_0^Q QdQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2V^2}{2C}$$

$$\boldsymbol{E_a = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2} \tag{7.5}$$

A equação 7.5 fornece a energia acumulada em um condutor com carga Q e capacitância C ou capacitância C e potencial V.

Como através do vácuo o campo elétrico se propaga, podemos determinar a ***densidade energia elétrica no vácuo (u_o)*** entre as placas de um capacitor plano . Inserindo $C_o = \varepsilon_o A/d$ (7.3) e $V_o = E_o d$ (6.6) em 7.5, e usando que Ad = Volume sendo A = área da cada placa e d = distância entre as placas, temos

$$E_{a_o} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_o A}{d}E_o{}^2 d^2 = Ad\frac{1}{2}\varepsilon_o E_o{}^2 = Volume\frac{1}{2}\varepsilon_o E_o{}^2$$

$$\frac{E_{a_o}}{Volume} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E_o{}^2$$

$$\boldsymbol{u_o = \frac{1}{2}\varepsilon_o E_o{}^2} \tag{7.6}$$

De maneira análoga, a ***densidade de energia elétrica em um dielétrico (u)*** pode ser determinada, usando a equação 7.4,

$$C = \varepsilon_r C_o = \varepsilon_r\, \varepsilon_o A/d = \varepsilon A/d$$

assim,

$$\boldsymbol{u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2} \tag{7.7}$$

Os resultados 7.6 e 7.7 são válidos para outros tipos de configurações de capacitores e a unidade é dada por $\boldsymbol{J/m^3}$.

Exemplo 7.2

Determine a energia acumulada E_a em condutor esférico de carga Q.

Solução:

De acordo com a equação 7.1, a capacitância de um condutor esférico é dada por

$$C = 4\pi\varepsilon R$$

então, usando a equação 7.5, temos

$$E_a = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R}$$

Exemplo 7.2

Um capacitor de placas paralelas possui uma distância entre elas de 1 cm e cada uma tem 2000 cm^2 de área. O capacitor é carregado através de uma fonte elétrica até atingir uma diferença de potencial de 3000 V, em seguida ele é desconectado da fonte e é inserido entre as placas um dielétrico. A diferença de potencial caiu para 1000 V enquanto a carga permaneceu constante. Calcule (a) a capacitância original C_o; (b) o módulo da carga Q de cada placa; (c) a capacitância C depois de inserido o dielétrico; (d) a constante dielétrica ε_r do dielétrico; (e) a permissividade ε do dielétrico; (f) o campo elétrico original entre as placas; (g) o campo elétrico após a inserção do dielétrico e (h) a perda na densidade de energia após a inserção do dielétrico. Dado: $\boldsymbol{\varepsilon_o = 8,85x10^{-12}\ F/m}$

Solução:

(a)Usando a equação 7.3, temos

$$C_o = \varepsilon_o \frac{A}{d} = 8{,}85x10^{-12}\frac{0{,}2}{0{,}01} = 1{,}77x10^{-10}F = 177x10^{-12}F = \mathbf{177\ pF}\text{(177 picoF)}$$

(b)Usando a equação 7.2, temos

$$Q = C_oV_o = (1{,}77x10^{-10})(3000) = 5{,}31x10^{-7} = \mathbf{0{,}531\ \mu C}$$

(c)Como a carga ficou constante, temos

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{5{,}31x10^{-7}}{1x10^3} = 5{,}31x10^{-10}\ F = \mathbf{531\ pF}$$

(d)Pela equção 7.4,

$$\varepsilon_r = \frac{C}{C_o} = \frac{531}{177} = \mathbf{3}$$

(e)Ainda usando a equação 7.4,

$$\varepsilon = \varepsilon_o\ \varepsilon_r = (8{,}85x10^{-12})x3 = \mathbf{2{,}66x10^{-11}\ F/m}$$

(f)Usando equação 6.6,

$$E_o = \frac{V_o}{d} = \frac{3000}{0{,}01} = \mathbf{3x10^5\ V/m}$$

(g)De maneira análoga ao íten (f),

$$E = \frac{V}{d} = \frac{1000}{0{,}01} = \mathbf{1x10^5\ V/m}$$

(h)Usando as equações 7.6 e 7.7, temos

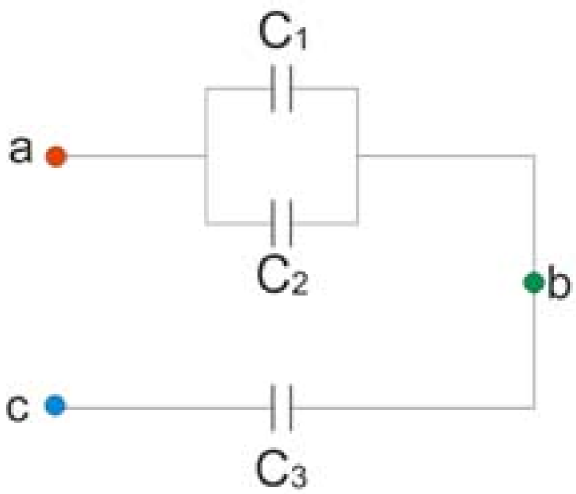
$$\frac{u}{u_o} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon E^2}{\frac{1}{2}\varepsilon_o {E_o}^2} = \frac{\varepsilon E^2}{\varepsilon_o {E_o}^2} = \varepsilon_r \left(\frac{E}{E_o}\right)^2 = 3\left(\frac{1x10^5}{3x10^5}\right)^2 = 3\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{u = \frac{1}{3}\, u_o}$$

A densidade de energia com o dielétrico é igual a um terço da densidade de energia inicial.

Exemplo 7.3

No circuito C_1 = 3 μF, C_2 = 5 μF e C_3 = μF. O potencial aplicado é V_{ab} = 24 V. Calcule (a) a carga em cada capacitor; (b) a diferença de potencial através de cada capacitor e (c) a diferença de potencial entre os pontos a e d.



Solução:

(a)Encontrando o capacitor equivalente, temos

$$C^{'} = C_1 + C_2$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C^{\prime}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \rightarrow C_{eq} = \mathbf{3,42}\ \boldsymbol{\mu F}$$

Quando os capacitores estão em série, o módulo da carga acumulada entre eles é o mesmo, é o caso de C´e C_3. Deste modo, a carga em C´e C_3 é igual a carga total Q_t, assim

$$Q_1 + Q_2 = Q_t$$

$$Q_3 = Q_t = C_{eq}V_{ab} = 3{,}42x24 = \mathbf{82,1}\ \boldsymbol{\mu C}$$

Os capacitores 1 e 2 estão no mesmo potencial,

$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \rightarrow Q_2 = \frac{C_2Q_1}{C_1} = \frac{5}{3}Q_1$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_t \rightarrow Q_1 + \frac{5}{3}Q_1 = Q_t \rightarrow \frac{3Q_1 + 5Q_1}{3} = Q_t$$

$$\frac{8Q_1}{3} = Q_t \rightarrow Q_1 = \frac{3}{8}Q_t = \frac{3}{8}82{,}1 = \mathbf{30,8}\ \boldsymbol{\mu C}$$

$$Q_2 = \frac{5}{3}Q_1 = \frac{5}{3}30{,}8 = \mathbf{51,3}\ \boldsymbol{\mu C}$$

(b)Como já se conhece a carga em cada capacitor, então

$$V_1 = V_2 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{30{,}8}{3} = \mathbf{10,3}\ \boldsymbol{V}$$

$$V_3 = V_{ab} - V_1 = 24 - 10{,}3 = \mathbf{13,7}\ \boldsymbol{V}$$

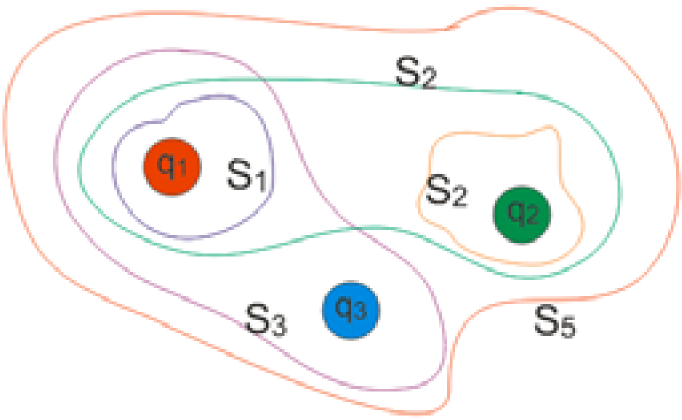
(c)A diferença de potencial V_{ad} é a mesma dos capacitores 1 e 2, assim

$$V_{ad} = V_1 = V_2 = \mathbf{10,3}\ \boldsymbol{V}$$

ATIVIDADES

1) Uma carga pontual q negativa gera um campo elétrico no espaço. Determine o fluxo elétrico através de uma superfície esférica r em volta desta carga. Sugestão: desenhe a superfície de raio r e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{E}$.

2) As três esferas indicadas na figura possuem cargas q_1 = 4,00 nC, q_2 = -7,80 nC e q_3 = 2,40 nC. Determine o fluxo elétrico total através de cada uma das superfícies fechadas cujas seções retas são indicadas na figura: a) S_1; b) S_2; c)S_3; d)S_4 e e) S_5.



3) Qual é o excesso de elétrons que deve ser adicionado a um condutor esférico isolado com diâmetro de 32,0 cm para produzir um campo elétrico de 1150 N/C em um ponto quase sobre a superfície externa da esfera.

4) Uma esfera não condutora, de raio R_1, tem uma cavidade central de raio R_2. Uma carga q está distribuída sobre o seu volume. Determine o campo elétrico (a) fora da esfera, (b) dentro da esfera e (c) dentro da cavidade. Sugestão: adote que $B = q/4\pi\varepsilon_o$ e para o item (b) lembre-se de calcular o volume ocupado pela carga q e q´ através da diferença de volumes.

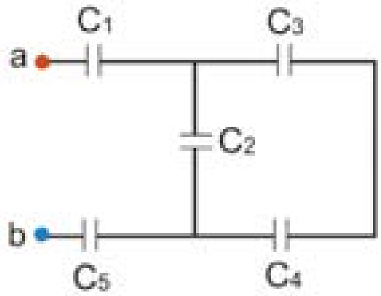
5) Duas cascas esféricas condutoras concêntricas estão separadas pelo vácuo. A casca esférica interna possui carga total +Q e raio externo r_a e a casca esférica externa possui carga –Q e raio interno r_b. Calcule a capacitância desse capacitor esférico.

6) Um condensador de ar, formado por duas placas paralelas que estã muito próximas uma da outra, tem uma capacidade de 1000 pF. A carga em cada placa é de 1 µC. (a) Calcule a diferença de potencial e o campo elétrico entre as placas. (b) Supondo que as cargas se mantém constante, calcule a diferença de potencial e o campo elétrico entre as placas, se a sua separação duplicar. (c) Calcule o trabalho necessário para duplicar a distância entre as placas (sugestão use a equação 7.5).

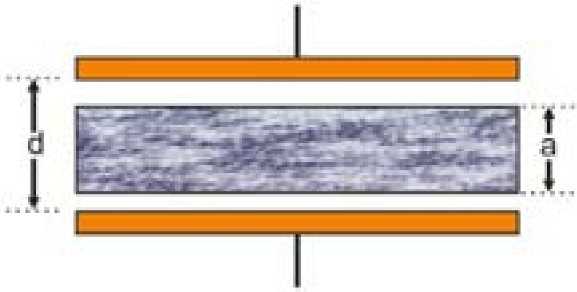
7) Duas esferas condutoras de raios 1,0x10^{-3} m e 1,5x10^{-3} m e com cargas de 10^{-7} C e 2x10^{-7} C, respectivamente, são postas em contato elétrico e, em seguida, separadas.

Calcule a carga em cada esfera. ***Lembrete:*** A soma das cargas antes é igual a soma depois do contato e a energia acumulada se conserva.

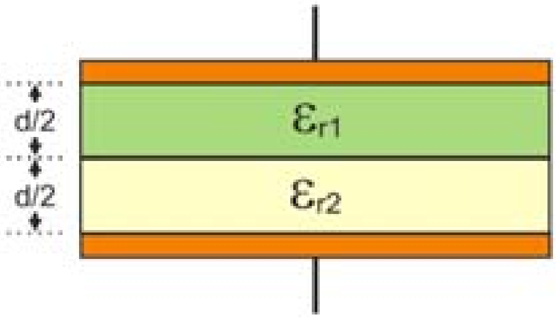
8) Os capacitores $C_1 = C_5 = 8{,}4\ \mu F$ e $C_2 = C_3 = C_4 = 4{,}2\ \mu F$. A diferença de potencial aplicada é $V_{ab} = 220$ V. (a) Qual é a capacitância equivalente do circuito entre os pontos ***a*** e ***b***? (b) Calcule a carga de cada capacitor e a diferença de potencial através de cada capacitor.



9) Um capacitor no ar possui placas com área A separadas por uma distância d. A seguir uma placa metálica com espessura a (menor do que d), com as mesmas dimensões da área das placassem tocar nenhuma delas. (a) Qual a capacitância desse arranjo? (b) Expresse essa capacitância em função da capacitância Co existente antes da introdução da placa metálica. (c) Discuta o que ocorre com a capacitância nos limites $a \to 0$ e $a \to d$.



10) Um capacitor com placas paralelas possui o espaço entre as placas preenchido com duas camadas de dielétricos, uma com uma constante ε_{r1} e outra com a constante ε_{r2}. Cada camada possui espessura d/2, onde d é a distância entre as placas. Mostre que a capacitância é dada por



$$C = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}$$

Sugestão: considere dois capacitores em série.

CONCLUSÃO

No transcorrer dessa aula você aprendeu o conceito de fluxo do campo elétrico; que esse fluxo guarda dependência com o número de linhas de força que atravessam uma região de área **A**, bem como do ângulo formado entre o vetor campo elétrico em determinado ponto da superfície e a reta Normal à superfície nesse ponto. Aprendeu ainda que a lei de Gauss está relacionada diretamente ao conceito de fluxo que atravessa uma superfície.

Ao definirmos capacitância pudemos conceituar os capacitores ou condensadores e calcular a quantidade de carga e energia armazenada nesses capacitores.

Finalmente conceituamos dielétricos e como eles podem aumentar a capacitância de um capacitor.

RESUMO

Fluxo do campo elétrico

$$\boldsymbol{\Phi} = \oint \boldsymbol{E}\boldsymbol{d}\boldsymbol{A}$$

Lei de Gauss

$$\oint \boldsymbol{dA}(\vec{\boldsymbol{u}}.\vec{\boldsymbol{E}}) = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{\varepsilon_o}}$$

Capacitância elétrica

$$\boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{V}}$$

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula estudaremos as cargas elétricas em movimento: a eletrodinâmica.

REFERÊNCIAS

ALONSO, M., Finn, E. J. Física. 1ed. São Paulo: Addison-Wesley, 1999, 936p.

SERWAY, R. A., JEWETT Jr, J. W. Princípios de Física. 3 ed. São Paulo: Thomson, 2005, 403p.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. Fundamentals of Physics – Extended. 4 ed. New York: John Wiley & Sons, 1993, 1306p.

GASPAR, A. Física 3. São Paulo. Ed. Ática, 2001.