

Aula 8

FONTES DE CAMPO MAGNÉTICO

META

Caracterizar e mostrar o campo magnético produzido por uma carga a velocidade constante.

Mostrar a lei da circulação de Ampère-Laplace e a lei de Biot-Savart.

Estudar o comportamento da força magnética entre condutores percorridos por corrente elétrica.

Explicar o campo magnético criado por corrente elétrica no centro de uma espira circular e por dipolo magnético.

Mostrar e caracterizar os materiais magnéticos.

OBJETIVO

Ao fim dessa aula você deve ser capaz de:

- ∉ definir as leis de Ampère-Laplace e a lei de Biot-Savart;
- ∉ compreender o comportamento do campo magnético produzido por carga ou corrente elétrica;
- ∉ saber calcular a força magnética entre condutores percorridos por corrente elétrica;
- ∉ saber diferenciar os materiais magnéticos.

PRÉ- REQUISITOS

Operações com vetores (produto escalar e vetorial).

Conceitos de carga, campo e força.

Introdução

Aprendemos que um campo magnético age sobre uma carga quando ela está em movimento. O experimento de Oersted (1777-1851) em 1820 mostrou que uma corrente é capaz de mover a agulha de uma bússola, indicando que a carga que faz parte da corrente, gera uma força sobre o ímã da bússola. O que podemos concluir sobre isto, é que uma carga em movimento tem capacidade de gerar um campo magnético em sua volta. Ao contrário do campo elétrico, que mesmo a carga com velocidade zero, é capaz de gerá-lo, o campo magnético só é gerado quando a carga está em movimento.

Nessa aula, portanto, daremos continuidade ao estudo dos fenômenos eletromagnéticos, enfatizando a descrição matemática dos mesmos, dando especial atenção às leis de Ampère-Laplace e Biot-Savart que permitem a determinação do vetor campo magnético produzido por uma corrente elétrica.

10 – Fontes de Campo Magnético

10.1 – Campo magnético de uma carga

Nós vimos que um campo magnético age sobre uma carga quando ela está em movimento. O experimento de Oersted (1777-1851) em 1820 mostrou que uma corrente é capaz de mover a agulha de uma bússola, indicando que a carga que faz parte da corrente, gera uma força sobre o ímã da bússola. O que podemos concluir sobre isto, é que uma carga em movimento tem capacidade de gerar um campo magnético em sua volta. Ao contrário do campo elétrico, que mesmo a carga com velocidade zero, é capaz de gerá-lo, o campo magnético só é gerado quando a carga está em movimento.

Experimentalmente foi provado que as linhas de campo magnético de uma carga q em movimento são círculos concêntricos a direção do movimento da carga e o vetor campo magnético \vec{B} é tangente a estes círculos (figura 10.1).

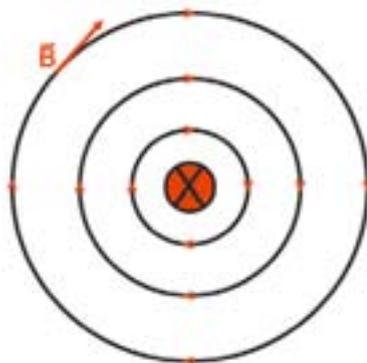


Figura 10.1 Linhas de campo magnético e o vetor campo magnético gerado por uma carga em movimento na direção perpendicular ao plano. O “X” representa o vetor velocidade \vec{v} que está entrando no plano e aplicando a regra da mão direita colocando o vetor velocidade \vec{v} no polegar chega-se no sentido horário das linhas de campo.

Podemos imaginar uma representação tridimensional para o movimento desta carga como mostra a figura 10.2, onde são representados os vetores velocidade, posição e o campo magnético perpendicular as linhas de campo.

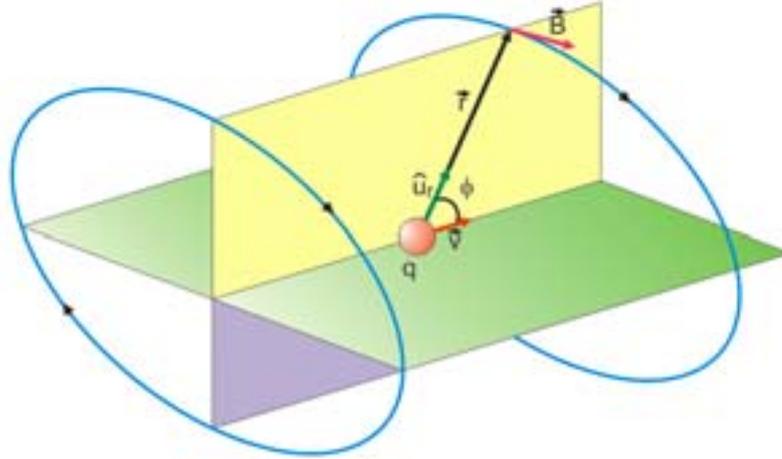


Figura 10.2 Visão tridimensional das linhas de campo onde mostra os vetores velocidade e posição no mesmo plano amarelo e o vetor campo magnético perpendicular a eles e na mesma direção e sentido do vetor posição foi definido o vetor unitário \hat{u}_r .

A cada nova posição que se deseje encontrar o campo magnético um novo plano deve ser definido entre o vetor posição e a velocidade. De modo semelhante ao caso elétrico, a experiência mostrou que o módulo do campo magnético é proporcional a carga $|q|$ e ao inverso da distância ao quadrado $1/r^2$ e, além disto, ele também é proporcional a velocidade v da carga q que forma um ângulo ϕ com o vetor posição \vec{r} . Sendo assim, podemos escrever o módulo do campo magnético como

$$B = \frac{\mu_0 |q| v \text{sen} \phi}{4\pi r^2} \quad (10.1)$$

onde $\mu_0/4\pi$ é uma constante de proporcionalidade.

Para escrever uma expressão vetorial é necessário definir o vetor unitário na direção do vetor posição, então

$$\hat{u}_r r = \vec{r} \rightarrow \hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad (10.2)$$

É fácil ver que o módulo de 10.2 corresponde a unidade, então a expressão vetorial de 10.1 pode ser escrita como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \hat{u}_r}{4\pi r^2} \quad (10.3)$$

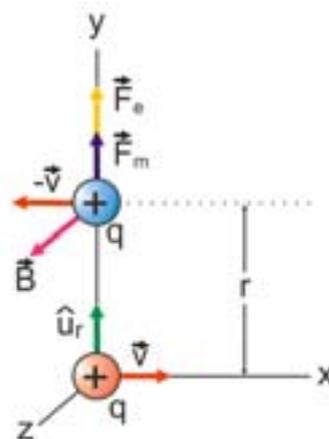
A expressão 10.3 descreve muito bem os resultados experimentais: que o campo magnético é sempre perpendicular ao plano entre o vetor posição e a velocidade e que o valor dele é zero no eixo que a carga está andando, porque o $\text{sen}0 = 0$ e será máximo quando em um plano perpendicular a velocidade porque $\text{sen}90 = 1$.

Evidentemente que uma carga em movimento produz um também um campo elétrico que em uma carga positiva as linhas saem da carga e em uma negativa as linhas chegam.

A situação apresentada nesta seção é de cargas que se movimentam em velocidade constante, pois cargas aceleradas tem uma complexidade maior no comportamento do campo magnético, que será abordada em um curso mais avançado. Tem situações como em condutores curvos que a velocidade muda com uma aceleração de v^2/r , mas como este valor é muito pequeno, ele será desprezível.

Exemplo 10.1

Dois prótons se deslocam paralelamente ao eixo Ox em sentidos opostos com a mesma velocidade v . No instante indicado na figura, determine a força elétrica e a força magnética sobre o próton da parte superior e calcule a razão entre os módulos dessas forças.



Solução:

O vetor da força elétrica foi colocado no sentido do eixo $+y$ porque a força repulsiva. Em relação ao vetor campo magnético, ele está saindo do plano porque foi originado na carga inferior e pela regra da mão direita ele terá o sentido do eixo $+z$. Aplicando a regra da mão direita entre os vetores \vec{B} e $-\vec{v}$ encontra-se a força magnética no mesmo sentido da força elétrica.

A força elétrica é dada pela lei de Coulomb, então

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \quad (10.4)$$

e o módulo do campo magnético é dado pela equação 10.1, então

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|q|v\text{sen}\phi}{r^2}$$

e como o ângulo entre a vetor velocidade e o vetor posição é 90° , temos

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv}{r^2} \quad (10.5)$$

A força magnética é dada pela equação 9.1, assim

$$F_m = qBv \operatorname{sen} \alpha$$

sendo $\alpha = 90^\circ$ o ângulo entre o vetor campo magnético e a velocidade, então

$$F_m = qBv \quad (10.6)$$

Introduzindo 10.5 em 10.6, encontra-se a expressão da força magnética, então

$$F_m = qBv = q \left(\frac{\mu_o qv}{4\pi r^2} \right) v = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{r^2} \quad (10.7)$$

Dividindo 10.7 por 10.4, temos

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{r^2}}{\frac{1}{4\pi \epsilon_o} \frac{q^2}{r^2}} = \frac{(\mu_o q^2 v^2)(4\pi \epsilon_o r^2)}{(4\pi r^2)(q^2)} = \mu_o \epsilon_o v^2$$

A razão entre as forças magnética e elétrica é diretamente proporcional a velocidade ao quadrado.

10.2 – Campo magnético de um condutor retilíneo

Depois do experimento de Oersted da interação magnética de um fio conduzindo corrente com uma bússola, diversos pesquisadores tentaram expressar matematicamente o campo magnético gerado por uma corrente. Para isto utilizaram diversos circuitos com formatos diferentes. A expressão mais elegante que descreve o campo magnético gerado por uma corrente em um circuito qualquer foi empiricamente elaborada por A. M. Ampère e P. Laplace. Esta expressão ficou conhecida pela *lei de Ampère-Laplace* e é dada por

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2} \quad (10.8)$$

A equação 10.8 mostra que o campo magnético resultante em um ponto P, produzido por uma corrente I, é a soma de pequenos elementos $d\vec{B}$ de cada um dos segmentos do fio, assim a contribuição elementar pode ser escrita como

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2} \quad (10.9)$$

Segundo a lei de Ampère-Laplace (10.8 ou 10.9) cada segmento $d\vec{l}$ que contém uma intensidade de corrente I gera um campo magnético $d\vec{B}$ em um ponto P . O vetor campo magnético fica perpendicular ao plano formado pelos vetores unitários tangencial \hat{u}_r e o posição \hat{u}_r . Pela regra da mão direita, apontando o polegar no sentido da corrente, o vetor campo magnético terá um sentido para baixo (figura 10.3).

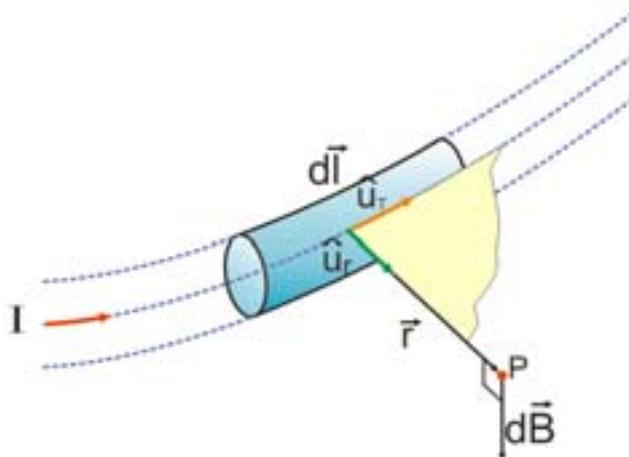


Figura 10.3 Representação do vetor campo elétrico para um circuito arbitrário segundo a lei de Ampère-Laplace.

Para calcular o campo magnético de um condutor retilíneo, fino e de comprimento $2a$, deve-se fazer uso da lei de Ampère-Laplace (10.8), que corresponde a integração de todos os elementos de comprimento $dl = dy$ indicado na figura 10.4. O produto $d\vec{l} \times \vec{u}_r$ produz um elemento de campo magnético $d\vec{B}$ que tem direção perpendicular ao plano e sentido de fora para dentro indicado pelo símbolo “X”.

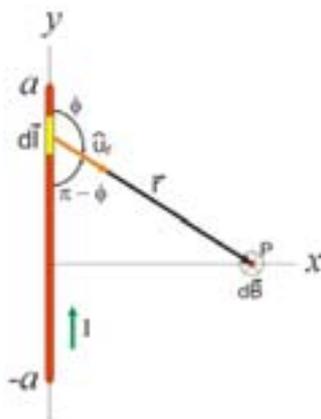


Figura 10.4 Campo magnético produzido por um condutor fino de comprimento $2a$. No ponto P o campo magnético tem sentido de fora para dentro do plano, sentido representado por um “X”, conforme a regra da mão direita.

O módulo do produto $d\vec{l} \times \vec{u}_r$ é dado por

$$|d\vec{l} \times \vec{u}_r| = dl u_r \text{sen}\phi = dy \cdot 1 \cdot \text{sen}\phi = dy \cdot \text{sen}\phi$$

Como $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, temos

$$\text{sen}\phi = \text{sen}(\pi - \phi) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Então,

$$|d\vec{l} \times \vec{u}_r| = \frac{x \cdot dy}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

O módulo da equação 10.8 integrando de $-a$ até a fica

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_o}{4\pi} I \int_{-a}^a \frac{xdy}{r^2(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{\mu_o}{4\pi} I \int_{-a}^a \frac{xdy}{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} I \int_{-a}^a \frac{xdy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Consultando uma tabela de integrais encontra-se que

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x(x^2 + a^2)^{1/2}} \quad (10.10)$$

A partir do resultado 10.10 pode-se fazer uma expansão para um fio de comprimento infinito, que corresponde a um ponto P muito próximo do condutor ou o comprimento $2a$ muito maior do que a distância do ponto P a origem do sistema de coordenadas, assim

$$\frac{2a}{x(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{2a}{x \left[a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + 1 \right) \right]^{1/2}} = \frac{2a}{x a \left(\frac{x^2}{a^2} + 1 \right)^{1/2}} = \frac{2}{x \left(\frac{x^2}{a^2} + 1 \right)^{1/2}} \quad (10.11)$$

e como $a \rightarrow \infty$, ou seja, $a > x$, temos que $x^2/a^2 < 1$, pode-se usar uma série binomial, então

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + 1 \right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{8} \left(\frac{x^2}{a^2} \right)^2 + \dots$$

Como a partir do segundo termo em diante o número é muito menor do que a unidade, a raiz quadrada pode ser aproximada para

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + 1 \right)^{1/2} = 1 \quad (10.12)$$

Introduzindo 10.12 em 10.11, temos

$$\frac{2a}{x(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{2}{x}$$

Então, para um condutor infinito a equação 10.10 se transforma em

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (10.13)$$

a qual mostra que o campo magnético tem simetria axial em torno do eixo y , ou seja, possui o mesmo módulo em qualquer ponto de uma circunferência cujo o centro é o condutor retilíneo e a direção vai ser semelhante a já descrita para uma carga pontual, tangente a cada ponto da circunferência (figura 10.5).

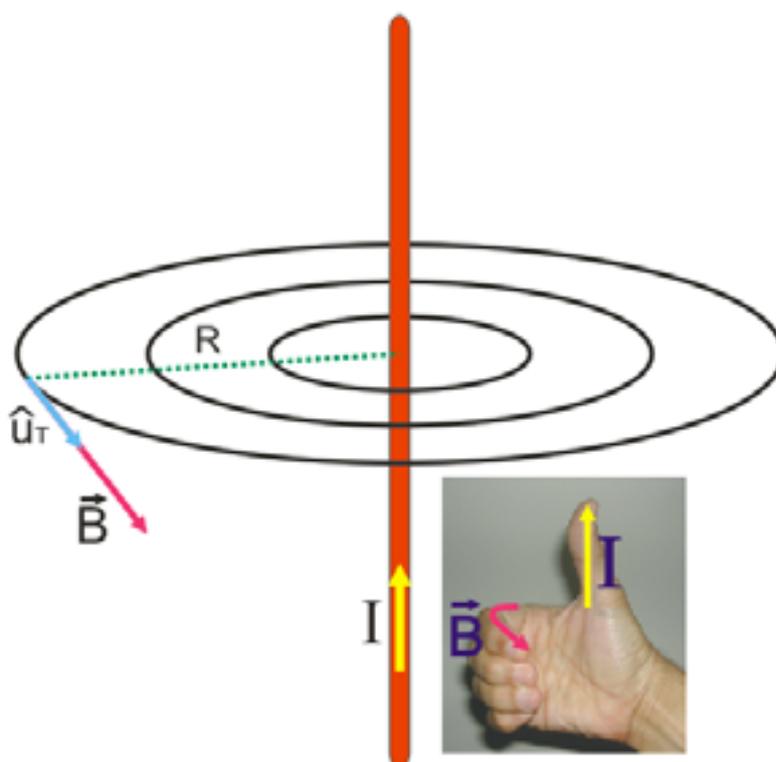


Figura 10.5 Campo magnético produzido por uma corrente retilínea.

Devido a simetria radial, a equação 10.13 pode ser escrita em função do raio R das diversas circunferências de linhas de campo em volta do condutor, então

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (10.14)$$

A equação 10.14 é conhecida como *fórmula de Biot-Savart* e sua forma vetorial é dada por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{u}_T \quad (10.15)$$

onde \hat{u}_T é um vetor unitário na direção do campo magnético e tangente a linha de campo.

Exemplo 10.2

Calcule a intensidade do campo magnético produzido por um cabo infinitamente longo que transporta uma corrente de 1 A, a uma distância de 100 cm do eixo do cabo.

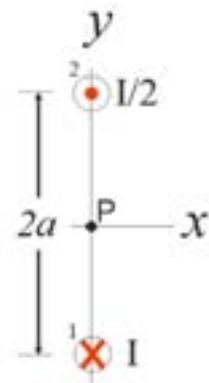
Solução:

$R = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$, usando a equação 10.13, temos

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{1,2566 \times 10^{-6} \times 1}{2 \times 3,14 \times 1} = \frac{1,2566 \times 10^{-6}}{6,28} = 0,2 \times 10^{-6} = 2 \times 10^{-7} \text{ T}$$

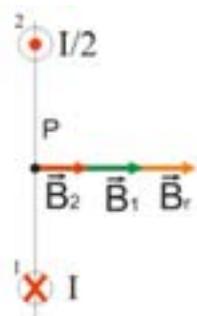
Exemplo 10.3

Na figura ao lado, está representado esquematicamente um corte transversal de dois cabos longos paralelos, perpendiculares ao plano XY, um com corrente I e outro com corrente $I/2$, em sentidos opostos. Determine o módulo, direção e sentido do campo magnético de cada cabo e o campo resultante no ponto P.



Solução:

O primeiro passo é determinar os vetores dos campos magnéticos do cabo 1 e 2 usando a regra da mão direita, assim



O módulo do vetor campo magnético resultante é dado por

$$B_r = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I/2}{2\pi a} = \frac{3\mu_0 I}{4\pi a}$$

10.3 – Força entre condutores

Vamos supor dois condutores paralelos e retilíneos com comprimento L que conduzem corrente I e I' , respectivamente. A força magnético que o condutor 1 sente é devido ao campo magnético gerado pelo condutor 2 e vice-versa (figura 10.6). Vamos fazer análise da força sentida pelo condutor 1, obviamente que esta mesma força aparecerá no condutor 2.

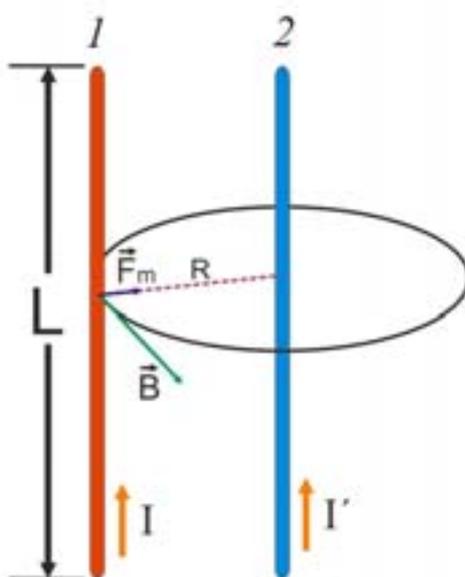


Figura 10.5 Força magnética entre dois fios que conduzem correntes no mesmo sentido ambos com comprimento L .

O campo magnético \vec{B} gerado pelo condutor 2 sobre o condutor 1 é encontrado através da regra da mão direita e a força magnética devido a este campo é dada pela equação 9.16, então

$$F_m = ILB' \sin\theta$$

como o ângulo entre o vetor densidade de corrente e o campo magnético é de 90° , a força magnética fica

$$F_m = ILB'$$

O campo magnético gerado pelo condutor 2 é dado pela equação 10.14, então

$$B' = \frac{\mu_0 I'}{2\pi R}$$

Finalmente, a força magnética sobre o condutor 1 é dado por

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mu_0 I I' L}{2\pi R} \quad (10.16)$$

O sentido da força magnética também foi encontrado usando a regra da mão direita entre o vetor unitário que está no sentido da corrente e o vetor campo magnético. Para o condutor 2, vai aparecer uma mesma força no sentido oposto levando os condutores a se atraírem.

Exemplo 10.4

Três fios paralelos conduzem correntes de módulo igual a I com sentidos indicados na figura. Calcule o módulo, a direção e o sentido da força magnética resultante por unidade de comprimento sobre cada fio.

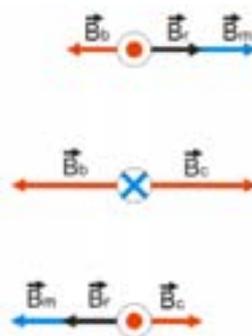


Solução:

Para uma melhor visualização vamos fazer um corte transversal nos condutores e representar cada corrente por ponto (corrente saindo do plano) ou um “x” corrente entrando do plano, então



No condutor de cima sofrerá a ação dos campos magnéticos dos condutores do meio \vec{B}_m e do de baixo \vec{B}_b , o condutor do meio sofrerá a ação dos campos magnéticos do condutor de cima \vec{B}_c e do de baixo e o condutor de baixo sofrerá a ação do condutor do campo do condutor do meio e do de cima. Deste modo, pode-se representar estes vetores e o campos resultantes em cada condutor, assim



Para o condutor do meio não foi representado o vetor campo elétrico resultante, pois é zero, devido ao condutor está submetido a dois campos magnéticos de mesma intensidade e sentidos opostos. Vamos agora representar as forças magnéticas, então



Os módulos dos campos magnéticos resultantes são dados por

$$\text{No conduto de cima: } B_r = B_m - B_d = \frac{\mu_o I}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2d} \right) = \frac{\mu_o I}{4\pi d}$$

$$\text{No condutor de baixo: } B_r = B_m - B_c = \frac{\mu_o I}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2d} \right) = \frac{\mu_o I}{4\pi d}$$

As forças magnéticas por unidade de comprimento são dadas por

$$\text{No conduto de cima: } \frac{F_m}{L} = IB_r = \frac{\mu_o I^2}{4\pi d}, \text{ de baixo para cima}$$

$$\text{No condutor do meio: } \frac{F_m}{L} = \mathbf{0}$$

$$\text{No condutor de baixo: } \frac{F_m}{L} = IB_r = \frac{\mu_o I^2}{4\pi d}, \text{ de cima para baixo}$$

Os condutores de cima e de baixo vão se afastar um do outro devido à interferência do condutor central.

10.4 – Campo magnético de uma espira circular

Diversos equipamentos operam através do campo magnético gerado por espiras circulares, é o caso de campainhas, alto-falantes, transformadores, motores, etc. São equipamentos que usam espiras agrupadas, mas o campo resultante é devido a soma das espiras individuais. Vamos estudar uma espira e depois faremos uma extrapolação para sistemas de N espiras.

A figura 10.6 mostra uma espira circular de raio “a” pela qual circula uma corrente I alimentada por dois fios retilíneos paralelos, cujo o campo magnético entre eles é nulo devido ao fato que a corrente em cada fio circula em sentidos opostos.

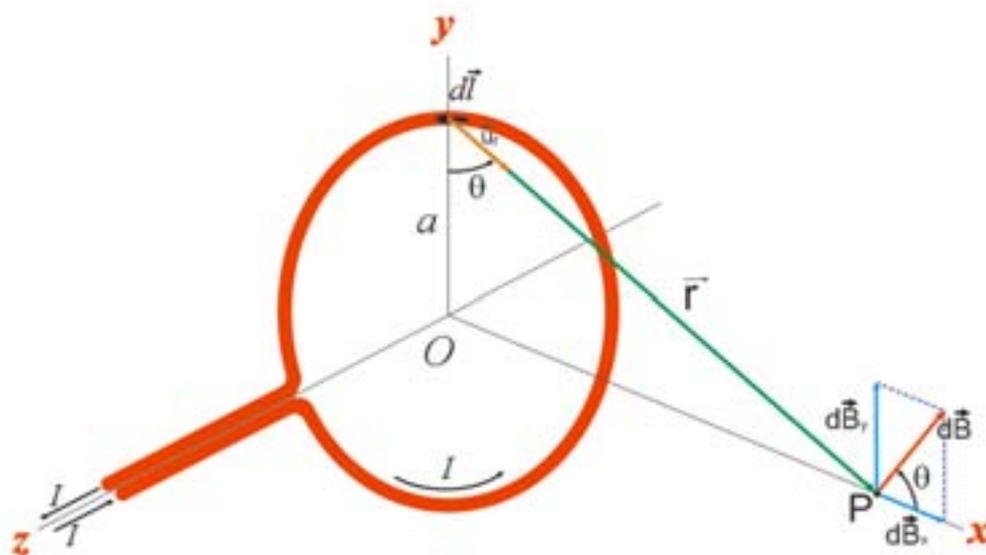


Figura 10.6 Campo magnético de uma espira circular.

Cada segmento da espira $d\vec{l}$ produz um elemento de campo magnético $d\vec{B}$, no caso específico da figura, $d\vec{B}$ está situado no plano xy e produz duas componentes $d\vec{B}_x$ e $d\vec{B}_y$. Se for tomado outro segmento da espira em uma posição $-y$ (figura 10.7), aparecerá um componente $d\vec{B}_y$ para baixo que vai anular o componente para cima, por outro lado a componente sobre o eixo x terá um acréscimo.

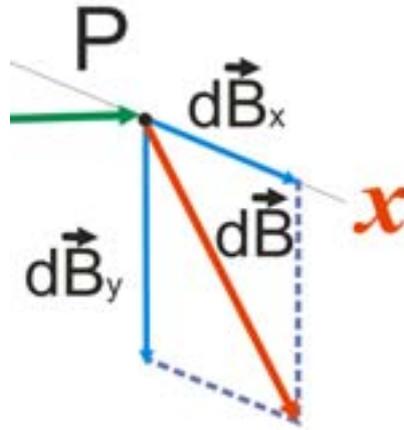


Figura 10.7 Campo magnético de uma espira circular para um segmento da espira numa posição simétrica ao da figura 10.6.

De um modo geral, os componentes perpendiculares ao eixo x serão nulas, pois para componente $d\vec{B}_y$ sempre haverá uma outra componente no sentido oposto para qualquer segmento da espira que seja analisado. Sendo assim o cálculo deve ser efetuado para o componente apenas na direção do eixo x . Usando a equação 10.9, temos

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times \hat{u}_r}{r^2}$$

em módulo fica

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot u_r \cdot \sin 90^\circ}{r^2}$$

Observando a figura 10.9 é fácil ver que o ângulo entre $d\vec{l}$ e \hat{u}_r é de 90° e como \hat{u}_r é um vetor unitário e $r^2 = x^2 + a^2$, então

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{x^2 + a^2}$$

Para o componente x o módulo do vetor $d\vec{B}$ fica

$$dB_x = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{x^2 + a^2} \cos \theta$$

como

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

então

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{x^2 + a^2} \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I a dl}{4\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (10.17)$$

Integrando a equação 10.17 para todos os elementos $d\mathbf{l}$ em torno da espira e levando em consideração que todos os outros elementos são constantes, então

$$B_x = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \int dl$$

A integral $\int d\mathbf{l}$ corresponde ao comprimento da circunferência, $\int d\mathbf{l} = 2\pi a$, e assim

$$B_x = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \cdot 2\pi a$$

$$\mathbf{B}_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (10.18)$$

A equação 10.18 fornece o campo magnético de uma espira circular para qualquer ponto P sobre o eixo x. Para pontos fora do eixo, o desenvolvimento matemático é bem mais complexo e não será abordado neste curso.

Para o caso de uma bobina com N espiras enroladas de forma bem compacta, de tal maneira que cada espira tenha aproximadamente a mesma distância para o ponto P, a equação 10.18 se torna em

$$B_x = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (10.19)$$

O campo magnético produzido por uma espira é mostrado na figura 10.8.

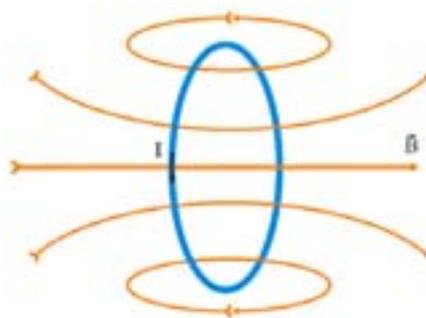


Figura 10.8 Representação de algumas linhas de campo magnético de uma espira circular. A equação 10.18 é válida para pontos sobre a linha reta no centro da espira.

10.5 – Campo magnético de um dipolo magnético

O momento de dipolo magnético de uma espira é dado pela equação 9.18 ($\mu = IA$).

Para uma espira circular a área é dado por

$$A = \pi r^2$$

o momento magnético para uma espira fica,

$$\mu = IA = I\pi r^2$$

para N espiras com $r = a$, temos

$$\mu = \pi N I a^2 \rightarrow N I a^2 = \frac{\mu}{\pi} \quad (10.20)$$

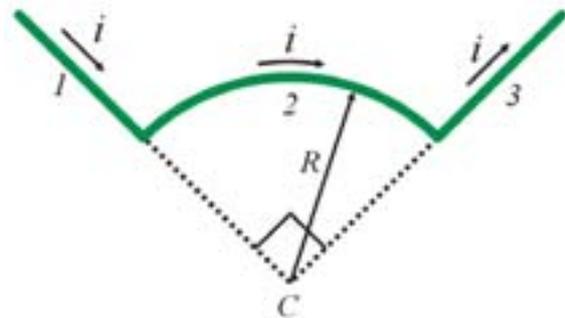
Substituindo 10.20 em 10.19, fica

$$B_x = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (10.21)$$

Na seção 9.6 foi descrita a ação de um campo magnético sobre um dipolo magnético. A equação 10.21 mostra que um dipolo magnético também é uma fonte de campo magnético para pontos ao longo do eixo do dipolo. Este campo é proporcional ao momento de dipolo magnético e possui o mesmo sentido do vetor momento magnético $\vec{\mu}$.

Exemplo 10.5

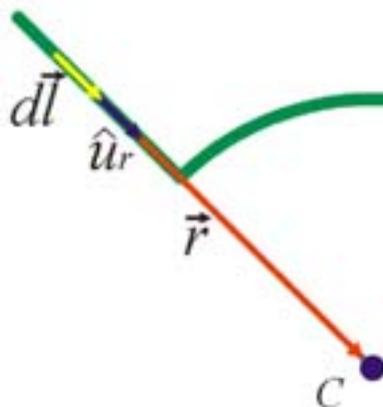
O fio da figura ao lado transporta uma corrente i e consiste de um arco circular de raio R e ângulo central de $\pi/2$ rad e duas seções retas as quais suas extensões interceptam o centro C do arco. Determine o módulo, a direção e o sentido do campo magnético no centro C ?



Solução:

Vamos encontrar o campo magnético em cada caminho em relação ao centro C e depois fazer uma soma de cada contribuição.

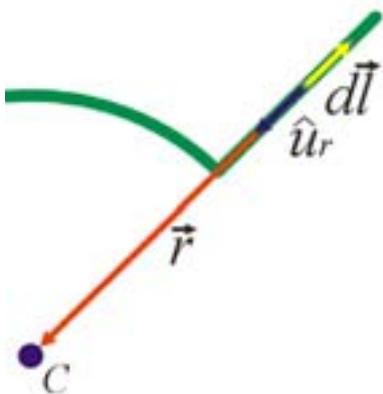
Caminho 1:



Usando a equação 10.9, e como o ângulo entre o elemento do fio $d\vec{l}$ e o vetor unitário \hat{u}_r é de 0° , temos

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I dl \cdot u_r \sin 0^\circ}{4\pi r^2} = 0 \rightarrow B_1 = 0$$

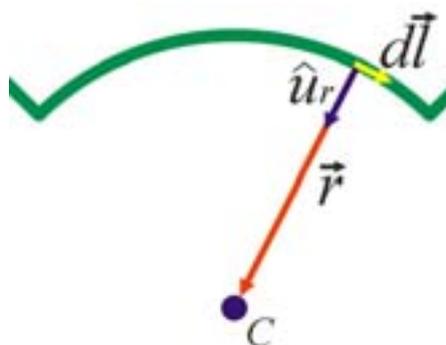
Caminho 3:



O ângulo entre o elemento do fio $d\vec{l}$ e o vetor unitário \hat{u}_r é de 180° , temos

$$dB_3 = \frac{\mu_0 I dl \cdot u_r \cdot \text{sen}180^\circ}{4\pi r^2} = 0 \rightarrow B_3 = 0$$

Caminho 2:



O ângulo entre o elemento do fio $d\vec{l}$ e o vetor unitário \hat{u}_r é de 90° , temos

$$dB_2 = \frac{\mu_0 I dl \cdot u_r \cdot \text{sen}90^\circ}{4\pi r^2}$$

$$dB_2 = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$$

Para encontrar o módulo de B_2 produzido em C, deve-se integrar a equação acima ao longo de todo o arco. Substituindo $dl = r d\theta$ e integrando de $\theta = 0$ até $\theta = \pi/2$, temos

$$B_2 = \int dB_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 I r d\theta}{4\pi r^2}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\mu_0 I}{8r}$$

Finalmente, o campo magnético resultante no ponto C será dado pela soma algébrica das três contribuições, assim

$$B_r = B_1 + B_2 + B_3 = 0 + 0 + \frac{\mu_0 I}{8r} = \frac{\mu_0 I}{8r}$$

e pela regra da mão direita este campo tem direção perpendicular e sentido entrando em relação ao plano.

10.6 – Lei de Ampère

Vamos considerar o campo gerado por uma corrente retilínea I (figura 10.9) dado pela equação 10.15.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{u}_T$$

onde \hat{u}_T é um vetor unitário tangente ao círculo de raio r e na figura 10.9 $d\mathbf{l}$ é o elemento de arco e o módulo de \vec{B} é uma constante.

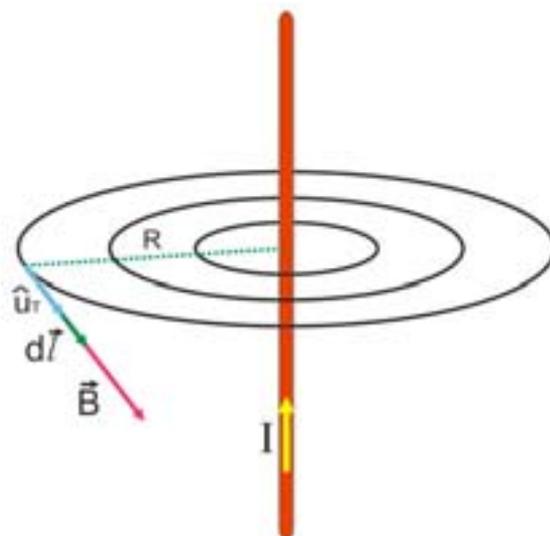


Figura 10.9 Campo magnético gerado por uma corrente retilínea I.

O campo magnético e o elemento de arco estão na mesma direção, então o produto escalar é dado por

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \cos 0^\circ = B dl$$

A circulação magnética é dada por uma integral de linha sobre a linha de campo magnético, assim

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl$$

A integral de linha de circuito fechado $\oint dl$ corresponde ao comprimento de uma circunferência, assim

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B 2\pi R$$

e usando a equação 10.15, temos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I \quad (10.22)$$

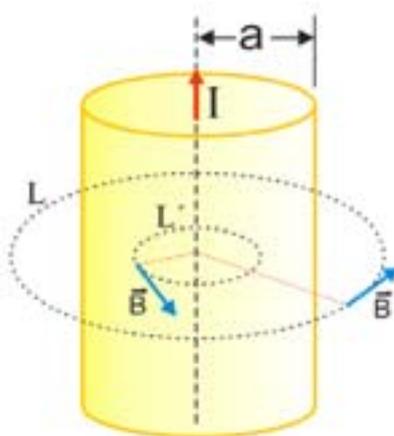
A circulação magnética é proporcional a corrente e independe do raio da trajetória. De um modo geral, o resultado 10.22 também é válido para outros tipos de correntes e para qualquer forma de trajetória que envolva a corrente, mesmo que se tenha várias correntes, desde que tenha uma única trajetória fechada envolvendo-a. A equação 10.22 é chamada de *lei de Ampère*.

Exemplo 10.6

Determine o campo magnético gerado por um cilindro de comprimento infinito (a) sólido e (b) oco.

Solução:

(a) Vamos fazer um desenho mostrando que existem duas situações, o campo no interior e no exterior do cilindro sólido, assim



Para circulação magnética L , temos

$$\oint_L B dl = B 2\pi r = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > a)$$

Para circulação magnética L' , temos

$$\oint_{L'} B dl = B 2\pi r = \mu_0 I' \rightarrow B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r}$$

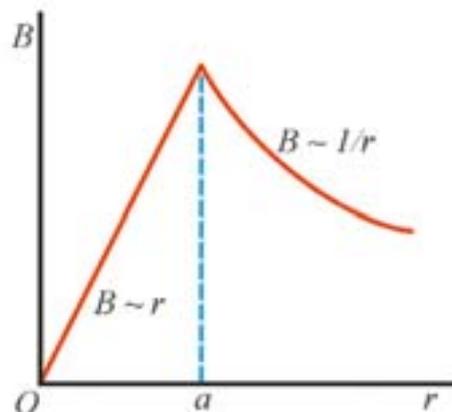
Observe que a corrente é agora I' , pois estamos pegando uma parte do cilindro. Existe uma condição de contorno é que o campo magnético para $r = a$ tem que ser igual para as duas circulações magnéticas L e L' . Como a corrente está distribuída uniformemente no interior do cilindro, a corrente por unidade de área é dada por $I/\pi a^2$, então a corrente através de L' é dada por

$$I' = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 = \frac{I r^2}{a^2}$$

assim,

$$B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi r a^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \quad (r < a)$$

A figura abaixo mostra o gráfico do comportamento do campo magnético para um cilindro sólido.



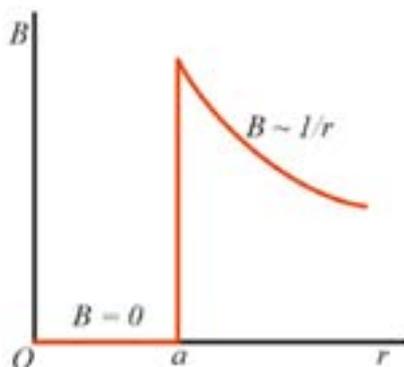
(b) Para circulação magnética L para cilindro oco, temos o mesmo resultado obtido para o cilindro sólido, porque o que importa é a corrente que está circulando através de L , assim

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r > a)$$

Para circulação magnética L' temos que o resultado da integral é zero, porque toda a corrente está na casca do cilindro, assim

$$B2\pi r = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (r < a)$$

A representação gráfica é dada por



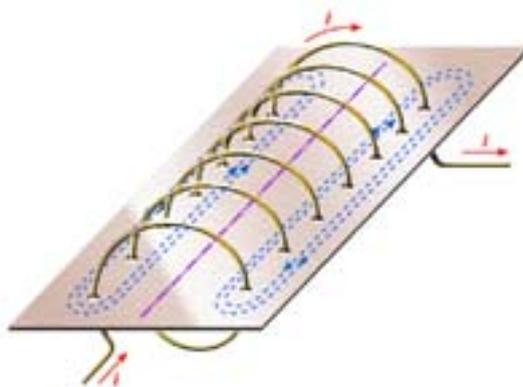
Tanto no cilindro sólido como no oco, o campo magnético cai assintoticamente com o inverso do raio.

Exemplo 10.7

Determine o campo magnético no interior de um solenóide muito comprido.

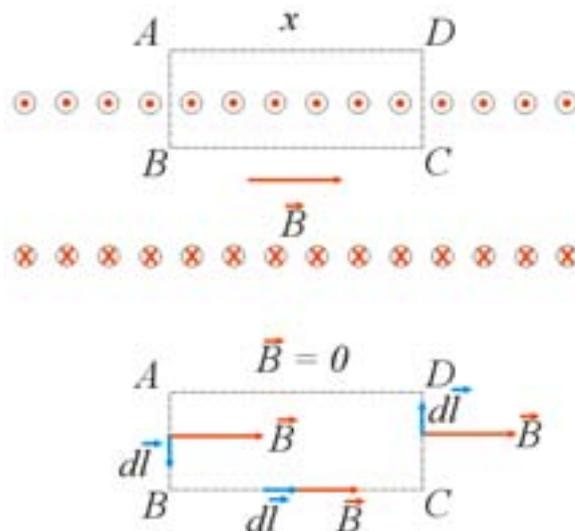
Solução:

Um solenóide é formado por N espiras enroladas bem próximas uma da outra formando um tubo muito comprido, com o objetivo de se obter um campo homogêneo no seu interior.



Fonte: <http://cepa.if.usp.br/e-fisica/imagens/eletricidade/basico/cap14/fig273.gif>

Fazendo um corte e definindo uma circulação magnética, temos



Aplicando a lei de Ampère no caminho fechado ABCD, temos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

As integrais nos trechos AB e CD são iguais a zero porque o ângulo entre \vec{B} e $d\vec{l}$ é de 90° , $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \cos 90 = 0$ e no DA é do lado de fora e o campo é nulo, assim

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_B^C B dl \cos 0 = B \int_B^C dl = Bx$$

O número de espiras da trajetória retangular é igual a N , deste modo, a intensidade de corrente total é dada por NI , assim

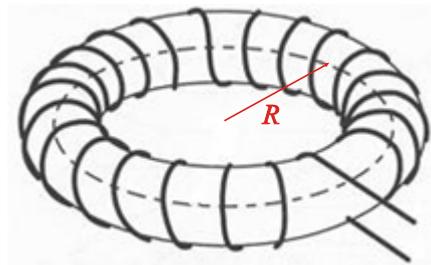
$$Bx = \mu_0 I_{total} = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L}$$

Este resultado confirma que o campo magnético no interior do solenóide é uniforme e que só depende do número de voltas, da intensidade de corrente e de seu comprimento $x = L$.

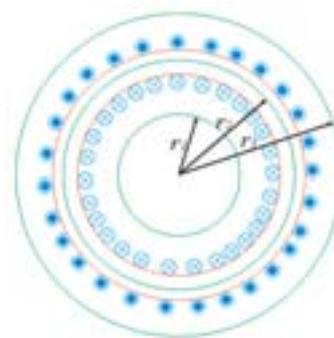
Exemplo 10.8

Determine o campo magnético no interior de um solenóide toroidal de raio médio R .



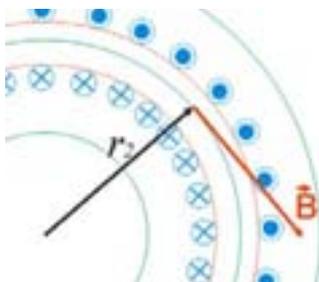
Solução:

Fazendo um corte no meio do solenóide toroidal, temos uma imagem de como é o comportamento da corrente. Para $r_1 < R$, a corrente é nula no interior da circulação magnética, deste modo, $B = 0$. Para $r_3 > R$, para cada fio que tem corrente saído tem um fio com corrente entrando, sendo assim, tem contribuição de campo magnético de sentidos opostos, anulando o outro. No caso de $r_2 = R$, haverá contribuição da corrente que está entrando. Aplicando a lei de Ampère para $r_2 = R$, temos



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI$$

N é o número de espiras e I é a corrente que circula em cada espira. Podemos ver que o ângulo entre o elemento $d\vec{l}$ e o campo magnético \vec{B} é zero,



assim,

$$\oint B dl \cos 0 = \mu_0 NI$$

$$B \oint dl = \mu_0 NI$$

$$B 2\pi R = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

10.7 – Materiais magnéticos

Os elétrons presentes nos materiais podem ser considerados pequenos dipolos magnéticos que têm um momento magnético associado com seus momentos angulares orbital e de spin. Quando determinados materiais são colocados sobre a influência de um campo magnético externo, eles vão sofrer uma influência deste campo e dependendo desta influência pode ocorrer uma polarização magnética ou magnetização do material. Existem diversos grupos de materiais e estes grupos são formados de acordo como os materiais são magnetizados com um campo externo.

Os **materiais diamagnéticos** são aqueles que são repelidos por um campo externo. O movimento dos elétrons são alterados de tal maneira que é gerado internamente um campo que se opõe ao campo externo, provocando a repulsão.

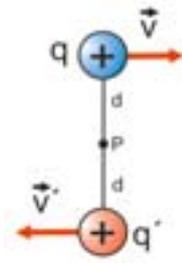
Existem os **materiais paramagnéticos** que são fracamente atraídos pelo campo magnético externo. Os elétrons estão desemparelhados que movem na direção do campo diminuindo a sua energia. Quando o campo é retirado, a aleatoriedade é recuperada e toda orientação é destruída.

Em oposição aos materiais paramagnéticos têm os **materiais ferromagnéticos** que a orientação dos spins é mantida mesmo que o campo externo seja retirado. Esta propriedade faz com que apareça interna um outro campo magnético possibilitando a produção de magnetos permanentes. Os materiais ferromagnéticos mais conhecidos são o ferro, o cobalto e o níquel e ligas que pelo menos tenha um deles.

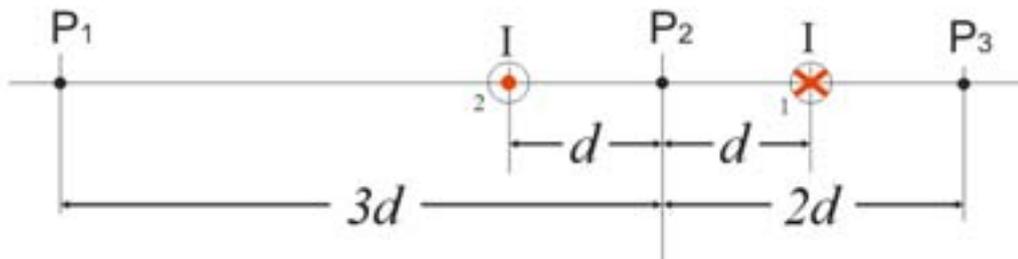
Enquanto os materiais diamagnéticos e paramagnéticos têm uma influência muito pequena em relação a um campo externo, os ferromagnéticos são fortemente atraídos

ATIVIDADES

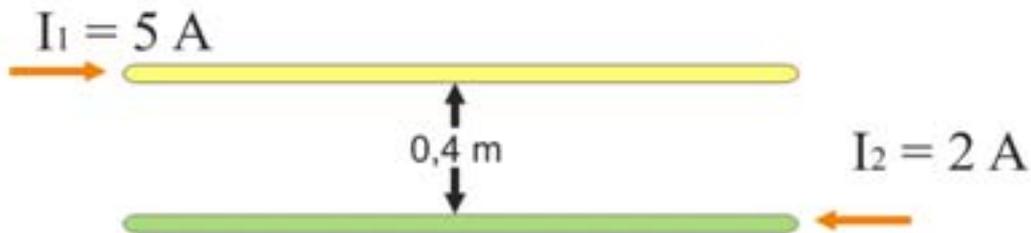
- 1) Duas cargas puntiformes positivas $q = 8\mu\text{C}$ e $q' = 3\mu\text{C}$ se movem em relação a um observador situado no ponto P, como indica a figura. A distância d é igual a 0,12 m. Quando as cargas estão nos pontos indicados na figura qual é o módulo, a direção e o sentido do campo magnético resultante no ponto P? Considere $v = 4,5 \times 10^6 \text{ m/s}$ e $v' = 9,0 \times 10^6 \text{ m/s}$.



- 2) Suponha que o cabo do exemplo 10.2 tenha 2 m de comprimento. Determine o campo magnético a 100 cm do cabo.
- 3) A figura abaixo mostra um plano xy que corta perpendicularmente dois fios longos paralelos, cada um deles conduzindo uma corrente I de mesmo módulo, porém de sentidos contrários. Determine o módulo, a direção e o sentido de \vec{B} nos pontos P_1 , P_2 e P_3 .



- 4) A distância entre dois fios longos paralelos é igual 0,4 m. As correntes I_1 e I_2 possuem os sentidos indicados na figura. (a) Calcule o módulo da força total que cada fio exerce sobre 1,2 m de comprimento do outro. A força é de atração ou de repulsão? (b) As correntes dobram, de modo que I_1 torna-se igual a 10 A e I_2 torna-se igual a 4 A. Qual é agora o módulo da força total que cada fio exerce sobre 1,2 m de comprimento do outro?



- 5) Uma bobina conduzindo uma corrente de 5 A é constituída por 50 espiras circulares com raio igual a 0,6 m. (a) Determine o campo magnético ao longo do eixo da bobina, situado a uma distância de 0,8 m do seu centro. (b) Determine o momento magnético da bobina. (c) Em que ponto ao longo do eixo da bobina o campo magnético se reduz a 1/8 do valor do campo no centro da bobina?

- 6) No interior de uma curva fechada existem diversos condutores. A integral de linha $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ em torno da curva é igual a $3,83 \times 10^{-4}$ T.m. (a) Qual é a corrente total que passa nos condutores? (b) Se você fizesse a integral percorrendo a curva em sentido contrário, qual seria o valor da integral? Explique. (Dica: observe o sentido de $d\vec{l}$ em relação ao sentido de \vec{B})
- 7) Um solenóide é projetado para produzir um campo magnético igual a 0,027 T em seu centro. Ele possui raio de 1,4 cm, comprimento de 40 cm e o fio conduz uma corrente máxima de 12 A. (a) Qual é o número mínimo de espiras que o solenóide deve possuir? (b) Qual é o comprimento total do fio necessário?
- 8) Um solenóide toroidal possui raio interno $r_1 = 15$ cm e raio externo $r_2 = 18$ cm. O solenóide possui 250 espiras e conduz uma corrente de 8,5 A. Qual o módulo do campo magnético em um ponto cuja distância ao centro do toróide seja a) 12 cm? b) 16 cm? C) 20 cm?

CONCLUSÃO

Estivemos particularmente interessados ao longo desse capítulo em descrever matematicamente os fenômenos eletromagnéticos a partir das leis fundamentais de Ampère-Laplace e Biot-Savart. Partindo das citadas leis pudemos determinar o vetor campo magnético gerado por correntes elétricas em condutores retilíneos e, inclusive em casos especiais, como: condutores esféricos, bobinas, solenóides. Mostramos ainda fenômenos curiosos como o surgimento de forças de atração ou repulsão entre condutores retilíneos percorridos por correntes elétricas.

Finalmente classificamos e caracterizamos os materiais magnéticos mostrando que existem diversos grupos de materiais e estes grupos são formados de acordo como os materiais são magnetizados pelo campo externo ao qual foram submetidos.

RESUMO

Campo magnético de uma carga

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|q|v \sin\phi}{r^2}$$

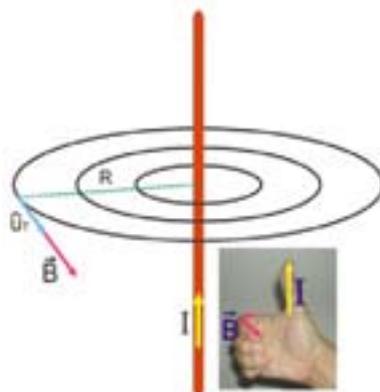
Campo magnético de um condutor retilíneo

lei de Ampère-Laplace

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

condutor infinito

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$



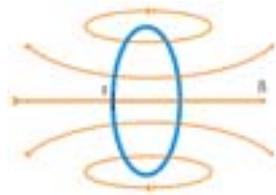
Regra da mão direita

fórmula de Biot-Savart

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Campo magnético de uma espira circular

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

**Campo magnético de um dipolo magnético**

$$B_x = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

lei de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I$$

Materiais magnéticos

materiais diamagnéticos são aqueles que são repelidos por um campo externo.

materiais paramagnéticos que são fracamente atraídos pelo campo magnético externo.

materiais ferromagnéticos que são fortemente atraídos.

PRÓXIMA AULA

Em nossa próxima aula estudaremos um dos fenômenos mais interessantes e de importância vital para o mundo moderno: o fenômeno da indução eletromagnética.

REFERÊNCIAS

ALONSO, M., Finn, E. J. Física. 1ed. São Paulo: Addison-Wesley, 1999, 936p.

SERWAY, R. A., JEWETT Jr, J. W. Princípios de Física. Vol. 1. 3 ed. São Paulo: Thomson, 2005, 403p.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. Fundamentals of Physics – Extended. 4 ed. New York: John Wiley & Sons, 1993, 1306p.

GASPAR, A. Física 3. São Paulo. Ed. Ática, 2001.