Aula 10

INDUTÂNCIA

META

Conceituar Indutância

Diferenciar auto-indutância da indutância mútua bem como caracterizá-las.

Estabelecer as relações entre a tensão de saída e a tensão de entrada de um transformador.

Definir energia armazenada em um indutor.

Apresentar e diferenciar os circuitos RL e RLC.

OBJETIVO

Ao fim dessa aula você deve ser capaz de:

∉ Definir indutância e saber calculá-la;
∉ Caracterizar a auto-indutância e a indutância mútua;
∉ Saber calcular as correntes e tensões de entrada e saída em um transformador;
∉ Calcular a energia armazenada em um indutor e que esta corresponde a energia armazenada no campo magnético.
∉ Determinar a expressão para a densidade de energia magnética;
∉ Saber reconhecer os circuitos RL e RLC, bem como saber calcular a corrente elétrica que se estabelecem nesses circuitos.

PRÉ- REQUISITOS

Conceito de corrente elétrica, leis de Kirchhoff e indução eletromagnética.

Introdução

No capítulo 11, nós vimos que a variação do fluxo magnético induz um campo elétrico e consequentemente um tensão induzida que foi chamada de ***fem***.

Neste capítulo, estudaremos um novo dispositivo elétrico chamado ***indutor*** que tem como grandeza física associada à ***indutância***. Existem dois tipos de indutância: a ***auto-indutância***, ou seja, a própria indutância – quando a variação do campo magnético do circuito induz nele mesmo e a ***indutância mútua*** – o campo magnético de um circuito induz no circuito vizinho e vice e versa.

Em outras palavras, podemos dizer que uma indutância é uma grandeza física equivalente a "resistência" de um indutor a mudanças da corrente elétrica, deste modo, um indutor é um dispositivo que sempre está se opondo a variações de corrente elétrica. Ele é amplamente usado em circuitos elétricos.

Na figura 12.1 mostra como a indutância age em relação à corrente em um circuito.

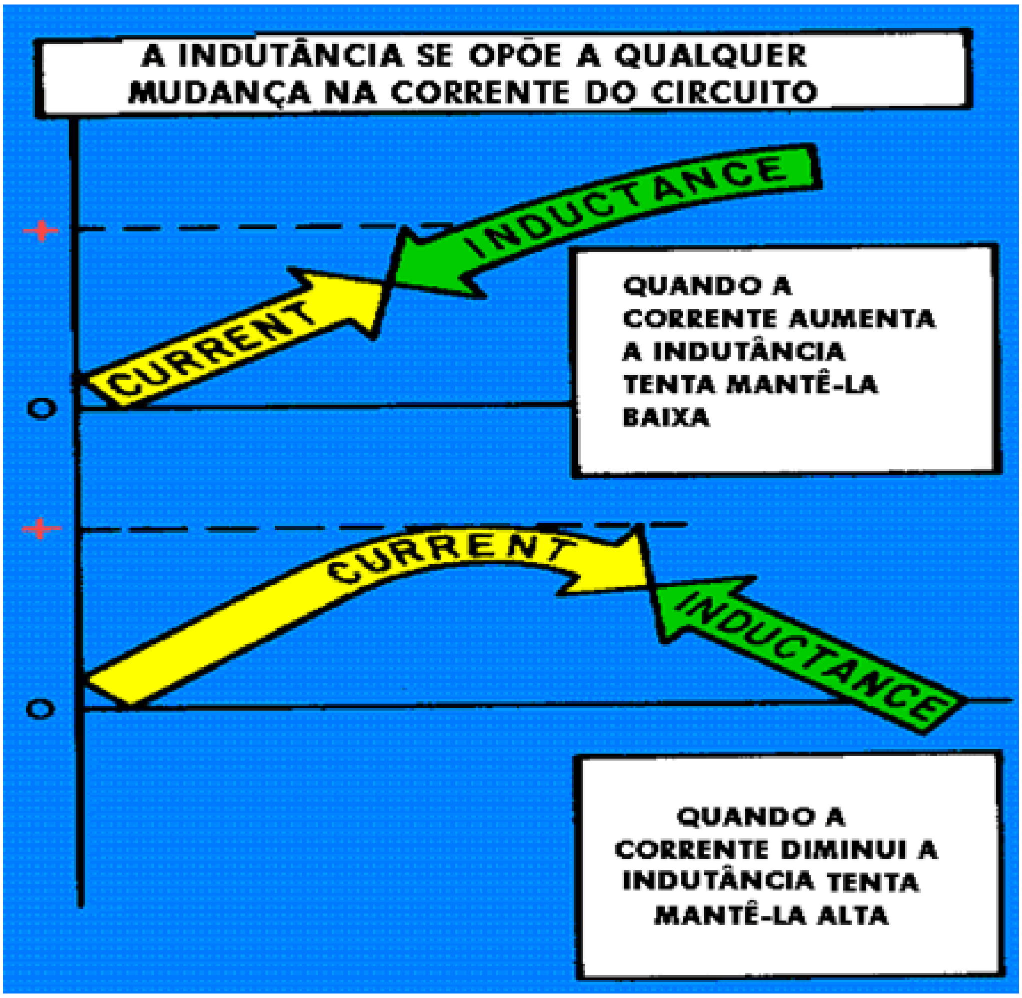


Figura 12.1 Comportamento da indutância em um circuito elétrico (Fonte: http://www.novaeletronica.net/curso/cap05.htm).

12 – Indutância

12.1 – Auto-indutância

Nós sabemos que um circuito, por exemplo, em forma de anel, é percorrido por uma corrente I, segundo a lei de Ampère, esta corrente produzirá uma campo magnético, o qual variará de ponto a ponto, mas será proporcional a I. O fluxo magnético devido ao seu próprio campo magnético é chamado de autofluxo (Φ_I) e é representado por

$$\Phi_I = LI \tag{12.1}$$

onde L é chamado de auto-indutância e dependente fortemente da geometria do circuito. Em homenagem a Joseph Henry a unida de L é expressa por Wb.A^{-1} (SI) e chama-se henry, representada pela letra H.

Se o circuito tiver N espiras, o fluxo será acrescido deste fator e a auto-impedância será N vezes maior do que um anel, assim

$$\boldsymbol{L = \frac{N\Phi_I}{I}} \tag{12.2}$$

Vamos imaginar que uma espira gera um campo magnético dependente do tempo, o fluxo magnético Φ_I também variará no tempo e pela lei de Faraday-Henry vai induzir uma $\boldsymbol{fem}$ no próprio circuito (espira). A este fenômeno se chama de auto-indução. A $\boldsymbol{fem_{ai}}$ auto-induzida será dada por

$$fem_{ai} = -\frac{d\Phi_I}{dt} \tag{12.3}$$

Introduzindo a equação 12.2 em 12.3, temos uma equação mais explícita para a tensão auto-induzida, assim

$$V_L = -\frac{dLI}{dt}$$

$$\boldsymbol{V_L = -L\frac{dI}{dt}} \tag{12.4}$$

Como já sabemos, o sinal negativo indica que a $\boldsymbol{fem}$ induzida se opõe à variação da corrente. Sendo assim, se $dI/dt > 0$, V_L será no sentido oposto a corrente e se $dI/dt < 0$, V_L será no mesmo sentido da corrente. A representação de uma auto-indutância é mostrada na figura 12.2.

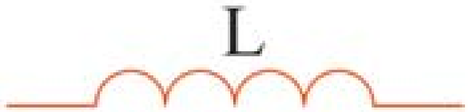


Figura 12.2 Representação de uma auto-indutância.

O que corresponde ao sentido de uma diferença de potencial? Isto tem haver para onde o potencial cresce. Vamos supor que a corrente está fluindo de a para b como mostra a figura 12.3.

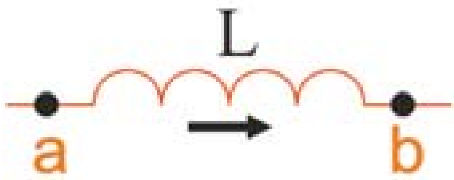


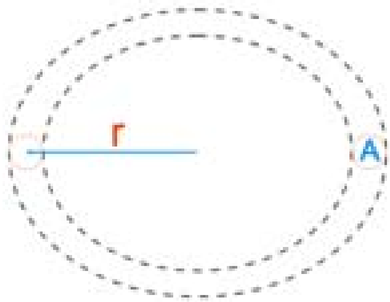
Figura 12.3 Representação de uma corrente em um circuito auto-indutivo.

Como foi dito anteriormente, se a corrente cresce no tempo, o potencial será no sentido contrário a corrente. Isto corresponde ao potencial cair de **a** para **b**, então, o sentido é estabelecido a partir do ponto de menor potencial **b** para o maior potencial **a**.

Para o caso que a corrente decresce no tempo, o potencial será no mesmo sentido da corrente. Ele cresce de **a** para **b**, então, o sentido será do menor potencial **a** para o maior potencial **b**.

Exemplo 12.1

Um solenóide de núcleo de ar possui seção reta com área A, um raio médio r e contém N espiras compactadas. Determine a sua auto-indutância L supondo que B seja uniforme na seção reta.



Solução:

Como foi visto no Capítulo 10, exemplo 10.8, o campo magnético de um solenóide toroidal é dado por

$$B = \frac{\mu_o N I}{2\pi r}$$

Como $\Phi_I = \Phi_B = BA$, então

$$\Phi_I = BA = \frac{\mu_o NI}{2\pi r} A$$

Usando a equação 12.2, temos a auto-indutância do solenóide toroidal,

$$\boldsymbol{L = \frac{N\Phi_I}{I} = \frac{N}{I}\frac{\mu_o NI}{2\pi r}A = \frac{\mu_o N^2 A}{2\pi r}}$$

Este resultado mostra que a auto-indutância L independe da corrente I, indicando que mesmo que o fluxo magnético aumente, L sempre terá o mesmo valor. Ela só depende da geometria do toróide (número de espiras, área da seção reta e o diâmetro médio)

Exemplo 12.2

Sabendo que a corrente em um solenóide toroidal cresce uniformemente de zero ate 6 A em 3 μs e que a auto-indutância L = 40 μH. Determine a intensidade e o sentido da $\boldsymbol{fem}$ (V_L) induzida.

Solução:

A taxa de variação do solenóide toroidal é

$$\frac{dI}{dt} = \frac{6}{3x10^{-6}} = 2x10^6\ A/s$$

De acordo com a equação 12.4,

$$V_L = -L\frac{dI}{dt} = -40x10^{-6}x2x10^6 = \boldsymbol{-80\ V}$$

O sentido naturalmente foi determinado no cálculo. Como o sinal de V_L é negativo, a fem induzida tem sentido oposto à corrente. Observe que a corrente está crescendo, a indutância tende a impedir este crescimento.

12.2 – Indutância mútua

Em diversas situações os circuitos estão próximos um dos outros e por conta disto, o fluxo magnético de um determinado circuito, depende da sua corrente e também das correntes dos circuitos da vizinhança.

Vamos supor dois circuitos, como descrito na figura 12.4. Quando uma corrente I_1 circula no circuito 1, ela gera um campo magnético B_1 que produz um fluxo magnético Φ_{21} no circuito 2. Isto significa que o fluxo na bobina 2 é proporcional a corrente I_1, assim

$$\Phi_{21} = MI_1 \tag{12.5}$$

De maneira análoga, se uma corrente circula no circuito 2, ela gera um campo magnético B_2 que produz um fluxo magnético Φ_{12} no circuito 1, então

$$\Phi_{12} = MI_2 \tag{12.6}$$

O termo M é uma constante de proporcionalidade designa-se indutância mútua dos circuitos, que depende da forma dos circuitos e da sua orientação relativa, assim como L, mede-se também em Henry (H) ou Wb.A^{-1}.

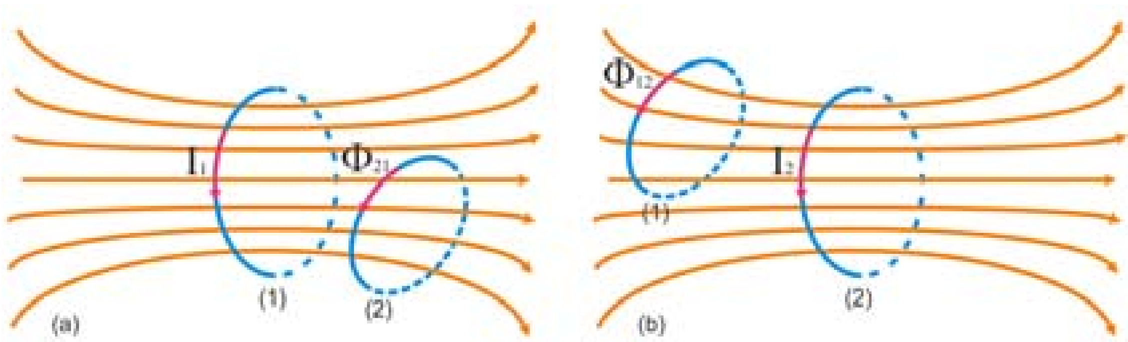


Figura 12.4 Indução mútua (a) circuito 1 em 2 e (b) circuito 2 em 1.

Se as correntes I_1 e I_2 dependem do tempo, os fluxos Φ_{21} e Φ_{12} através dos circuitos 2 e 1, respectivamente variam e se induzirá uma fem em cada circuito, de maneira análoga a auto-indutância, assim

$$V_{M2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} \tag{12.7}$$

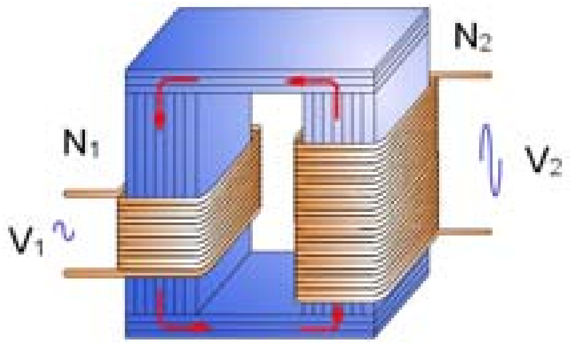
$$V_{M1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt} \tag{12.8}$$

Para que exista indução mútua é necessário que ocorra uma troca de energia entre os dois circuitos de tal maneira que eles ficam eletromagneticamente acoplados. Existe um intercâmbio de energia entre dois circuitos através de um campo magnético variável.

Como exemplo do dia podemos citar o transformador que é usado nos eleminadores de pilhas, nos postes de energia e etc, ou a transmissão de um sinal de ondas de rádio ou TV – uma antena onde tem uma oscilador que produz corrente variável no tempo (transmissor) está acoplado a um outro circuito receptor localizado em nossas casas. Este assunto será abordado no curso de ondas eletromagnéticas.

Exemplo 12.3

Determine a relação entre a tensão de saída e a tensão de entrada de um transformador.



Fonte: http://portaleso.homelinux.com/usuarios/Toni/web_magnetismo_3/imagenes/transformador_3d.jpg

Solução:

Um transformado é conhecido como dois circuitos acoplados, um circuito primário e outro secundário. Normalmente estes circuitos são enrolados em núcleos de ferro para o fluxo magnético gerado fique confinado. Quando uma fem dependente do tempo é aplicada no secundário, uma fem dependente do tempo aparece no secundário.

A fem aplicada no secundário vai gerar uma corrente e esta um fluxo magnético dependente do tempo. Se cada espira contribui com Φ, o fluxo total será este valor multiplicado pelo número de espiras ($N_1\Phi$). Deste modo, a fem no primário será dada por $V_1 = -N_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}}$. O mesmo fluxo aparecerá nas N_2 voltas do secundário e assim no circuito secundário aparecerá a fem $V_2 = -N_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}}$.

A relação entre a tensão de entrada e a de saída é dado por

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-N_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}}}{-N_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dt}}}$$

$$\boldsymbol{V_2 = \frac{N_2}{N_1}V_1} \tag{12.9}$$

Deste resultado nós concluímos o seguinte:

$$\boldsymbol{Se\ N_2 > N_1 \rightarrow \frac{N_2}{N_1}} > 1 \rightarrow \boldsymbol{V_2 > V_1}\ (\boldsymbol{aumento\ de\ tens\tilde{a}o})$$

$$\boldsymbol{Se\ N_2 < N_1 \rightarrow \frac{N_2}{N_1}} < 1 \rightarrow \boldsymbol{V_2 < V_1}\ (\boldsymbol{diminui\c{c}\tilde{a}o\ de\ tens\tilde{a}o})$$

Dependendo das aplicações o número de voltas de cada circuito é escolhido para se ter um aumento ou diminuição de tensão. Alguns detalhes não são levados em conta nos cálculos acima como perdas de fluxo e de energia, efeitos de diferença de fase e influência do circuito externo ligado no secundário. Todos estes fatores podem influenciar no rendimento do transformador, por isso, numa aplicação mais rigorosa, estes parâmetros devem ser incluídos nos cálculos.

12.3 – Energia magnética

Assim como um capacitor armazena energia elétrica um indutor armazena energia magnética. Vamos considerar um circuito composto por uma bateria com fem ε_o e que toda a resistência e toda impedância do circuito esteja em R e L, respectivamente (figura 12.5).

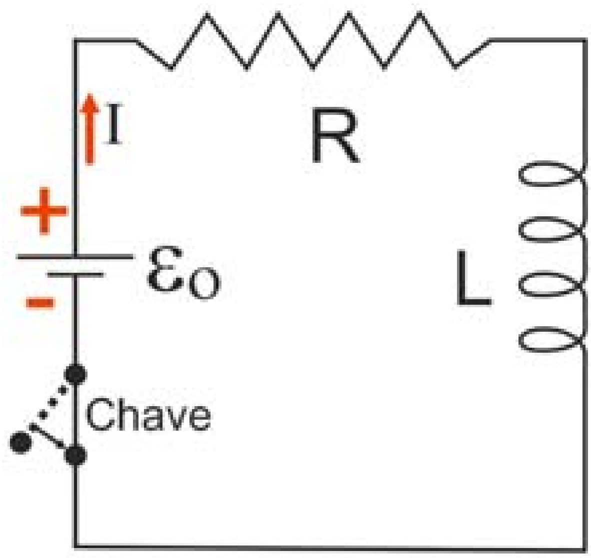


Figura 12.5 A queda de potencial no resistor IR e no indutor LdI/dt é igual a fem da bateria.

Inicialmente a chave está aberta e não há corrente no circuito, logo após a chave ser fechada a corrente começa a crescer e a queda de potencial no resistor IR e no indutor LdI/dt é igual a fem da bateria. Aplicando a lei das malhas de Kirchhoff a este circuito, temos

$$\varepsilon_o - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

multiplicando cada termo pela corrente, temos

$$\varepsilon_o I = I^2R + LI\frac{dI}{dt}$$

Vejamos o significado de cada termo:

$\varepsilon_o I =$ é a taxa na qual a energia potencial elétrica é liberada pela bateria;

$I^2R =$ é a taxa na qual a energia potencial é liberada para o resistor ou taxa na qual a energia potencial é dissipada pela resistência no circuito;

$LI\frac{dI}{dt} =$ é a taxa na qual a energia potencial é liberada para o indutor.

Supondo que a energia armazenada no indutor é dada por $\mathfrak{U}$, então

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

Podemos escrever que

$$d\mathfrak{U} = LIdI$$

Integrando deste um tempo $t = 0$, quando a corrente é nula, até um $t = \infty$, quando a corrente chega no máximo, assim

$$\int d\mathfrak{U} = \int_0^{I_f} LIdI$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{U} = \frac{1}{2}LI^2} \tag{12.10}$$

A ***energia armazenada em um indutor*** corresponde a energia armazenada no campo magnético. Enquanto uma corrente é produzida em um indutor, um campo magnético é criado no seu interior.

Vamos agora encontrar a expressão para a ***densidade de energia magnética***, utilizando para isto o exemplo de um solenóide muito longo.

Sabemos que o campo no interior de um solenóide muito longo é dado por expressão desenvolvida no Capítulo 10, exemplo 10.7 ($L^* = comprimento\ do\ selen\acute{o}ide$), assim

$$B = \frac{\mu_o NI}{L^*}$$

O fluxo magnético é dado por

$$\Phi_I = BA = \frac{\mu_o NIA}{L^*}$$

Usando a equação 12.2 encontramos a auto-indutância do solenóide, então

$$L = \frac{N\Phi_I}{I} = \frac{N}{I}\frac{\mu_o NIA}{L^*} = \frac{\mu_o N^2 A}{L^*}$$

A energia armazenada no solenóide é dada por

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu_o I^2 N^2 A}{2L^*}$$

multiplicando e dividindo por L^*, temos

$$\mathfrak{U} = \frac{\mu_o I^2 N^2 A L^*}{2{L^*}^2} = \frac{1}{2}\frac{I^2 N^2}{{L^*}^2}\mu_o A L^*$$

Dividindo a equação do fluxo por μ_o e elevando ao quadrado, ficamos

$$\left(\frac{B}{\mu_o}\right)^2 = \frac{I^2N^2}{L^{*2}}$$

Deste modo temos a energia armazenada em um solenóide,

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{2}\left(\frac{B}{\mu_o}\right)^2 \mu_o A L^*$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{U} = \frac{B^2}{2\mu_o} A L^*} \qquad (12.11)$$

A grandeza AL^* é o volume interno do solenóide onde contém o campo magnético e finalmente temos a ***densidade de energia magnética***:

$$\boldsymbol{u_m = \frac{B^2}{2\mu_o}} \qquad (12.12)$$

Note que existe uma similaridade com a ***densidade de energia em um campo elétrico***, segundo a equação 7.6:

$$\boldsymbol{u_e = \frac{\varepsilon_o {E_o}^2}{2}}$$

Mesmo que a equação 12.12 tenha sido deduzida para um solenóide, este é um resultado geral. Em qualquer lugar que tenha um campo magnético ela pode ser usada.

Exemplo 12.4

Uma certa região do espaço contém um campo magnético uniforme de 0,02 T e um campo elétrico uniforme de $2,5x10^6\ N/C$. Encontre (a) a densidade total de energia eletromagnética e (b) a energia em uma caixa cúbica de comprimento dos lados de 12 cm ($\varepsilon_o = 8,85x10^{-12}\ C^2/Nm^2$ e $\mu_o = 4\pi x10^{-7}\ N/A^2$).

Solução:

(a) A densidade de energia total é dada pela soma da densidade de energia elétrica e a densidade de energia magnética, assim

$$u = u_e + u_m = \frac{\varepsilon_o {E_o}^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_o}$$

$$u = \frac{(8{,}85x10^{-12})(2{,}5x10^6)^2}{2} + \frac{(0{,}02)^2}{2x4\pi x10^{-7}}$$

$$u = \mathbf{187\ J/m^3}$$

(b) A energia total na caixa é dada pelo produto da densidade de energia total pelo volume, então

$$\mathfrak{U} = uxV = 187x(0{,}12)^3 = \mathbf{0,323\ J}$$

12.4 – Os circuitos RL e RLC

Estes dois tipos de circuitos têm algo em comum, um elemento de indutor L. Ele torna difícil a variação e a ocorrência de variações bruscas de corrente em virtude dos efeitos associados a fem induzida – quanto maior taxa de variação da corrente, maior será a fem induzida e maior a diferença de potencial nos terminais do indutor. A equação da indução (equação 12.4) com a lei das malhas de Kirchhoff, fornecem os princípios para análise de circuitos com indutores.

12.4.1 – O circuito RL

O circuito RL é formado por uma bateria, um resistor e um indutor como descrito na figura 12.6. Vamos fazer uma mudança que permita, além da corrente crescer no tempo ($dI/dt > 0$), ela possa diminuir também ($dI/dt < 0$).

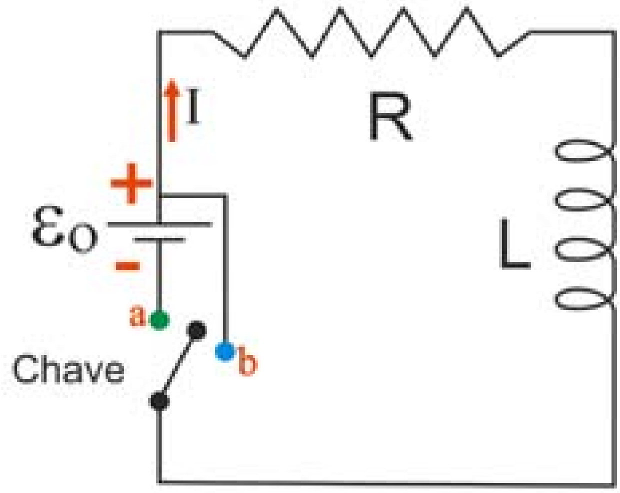


Figura 12.6 Circuito RL em série que permite o crescimento e a diminuição da corrente.

Quando a chave está na posição "a", inicialmente a corrente começa crescer ($situação\ de\ dI/dt > 0$) e depois de um determinado tempo permanece constante. Para o caso quando a chave for colocada na posição "b", a corrente que antes estava constante, começa a cair ($situação\ de\ dI/dt < 0$) até chegar a zero.

<u>Chave na posição "a":</u>

Quando a chave é colocada na posição "a" a corrente aumenta até atingir o valor de ε_o/R que está de acordo com a lei de Ohm. Como foi escrito anteriormente na seção 11.3, temos

$$\varepsilon_o - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$RI - \varepsilon_o = -L\frac{dI}{dt}$$

$$R(I - \frac{\varepsilon_o}{R}) = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{R}{L}(I - \frac{\varepsilon_o}{R}) = -\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{R}{L}dt = -\frac{dI}{(I - \frac{\varepsilon_o}{R})}$$

$$\frac{dI}{(I - \frac{\varepsilon_o}{R})} = -\frac{R}{L}dt$$

Vamos considerar que em t = 0 a corrente é nula, integrando ambos os termos, temos

$$\int_0^I \frac{dI}{(I - \frac{\varepsilon_o}{R})} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

Consultando uma tabela de integrais, temos

$$ln\left(I - \frac{\varepsilon_o}{R}\right) - ln\frac{-\varepsilon_o}{R} = -\frac{R}{L}t$$

Usando a propriedade de que $lne^x = x$, ficamos com

$$ln\left(I - \frac{\varepsilon_o}{R}\right) - ln\frac{-\varepsilon_o}{R} = ln e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$ln\left(I - \frac{\varepsilon_o}{R}\right) = ln\frac{-\varepsilon_o}{R} + ln e^{-\frac{R}{L}t}$$

e como $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$,

$$ln\left(I - \frac{\varepsilon_o}{R}\right) = ln\left(\frac{-\varepsilon_o}{R} e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Finalmente temos a expressão para corrente que cresce no tempo:

$$I - \frac{\varepsilon_o}{R} = \frac{-\varepsilon_o}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\boldsymbol{I = \frac{\varepsilon_o}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)} \tag{12.13}$$

A equação 12.1 indica que para t = 0 o termo da exponencial é máximo e é igual a um, fazendo com que a corrente seja zero. Para tempos longos ($t \rightarrow \bowtie$) , a exponencial cairá a zero e a corrente tende assintoticamente para o valor previsto pela lei de Ohm, $\boldsymbol{\frac{\varepsilon_o}{R}}$.

Define-se como constante de tempo a razão L/R, assim

$$\boldsymbol{\tau = \frac{L}{R}} \tag{12.14}$$

Introduzindo 12.14 em 12.13, temos

$$\boldsymbol{I = \frac{\varepsilon_o}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \tag{12.15}$$

Quanto maior for a resistência e menor for o indutor mais rapidamente a corrente atingirá o valor de $\boldsymbol{\frac{\varepsilon_o}{R}}$. Isto equivale a dizer que quanto maior (menor) a constante de tempo $\boldsymbol{\tau}$, maior (menor) será o tempo para a corrente atingir o valor de $\boldsymbol{\frac{\varepsilon_o}{R}}$.

<u>Chave na posição "b":</u>

Vamos considerar que o circuito permaneceu um tempo suficiente para que a corrente atingisse o valor de $\frac{\varepsilon_o}{R}$. Quando a chave é colocada na posição "b", imediatamente a fem é desligada e o único potencial no circuito corresponde a $V_L = -L\,dI/dt$, pela lei de Ohm, temos

$$RI = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

O valor inicial da corrente será aquele quando a chave foi invertida da posição "a" para "b", assim

$$\int_{\frac{\varepsilon_o}{R}}^{I}\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

Calculando as integrais, temos

$$lnI - ln\frac{\varepsilon_o}{R} = -\frac{R}{L}t = lne^{-\frac{R}{L}t}$$

$$lnI = ln\frac{\varepsilon_o}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

Finalmente, temos

$$\boldsymbol{I = \frac{\varepsilon_o}{R}e^{-\frac{R}{L}t}} \qquad (12.16)$$

A corrente cai exponencialmente devido a auto-indução que se opõe a esta queda. De maneira simétrica ao caso anterior, quanto maior a resistência e menor o indutor, a corrente cai mais rapidamente.

Exemplo 12.5

Uma bobina de auto-indutância de 5 mH e resistência 15 T é colocada entre os terminais de uma bateria de 12 V e resistência interna desprezível. (a) Qual é a corrente final? (b) Qual é a constante de tempo? (c) Quantas constantes de tempo são necessárias para a corrente atingir 99% de seu valor final?

Solução:

(a) Observe que este circuito não tem uma resistência separada, o valor de 15 T corresponde a resistência do próprio indutor, mas o procedimento dos cálculos não muda.

O valor da corrente final, é o valor que o circuito vai assintoticamente, então

$$I_f = \frac{\varepsilon_o}{R} = \frac{12}{15} = \mathbf{0,8\ A}$$

(b) A constante de tempo é pela equação 12.15, assim

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5x10^{-3}}{15} = \mathbf{333\ \mu s}$$

(c) Usando a equação 12.15, temos

$$I = \frac{\varepsilon_o}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$I = I_f(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\frac{I}{I_f} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - \frac{I}{I_f}$$

$$-\frac{t}{\tau} = ln\left(1 - \frac{I}{I_f}\right)$$

$$t = -\tau ln\left(1 - \frac{I}{I_f}\right) = -\tau ln(1 - 0,99) = -\tau ln(0,01) = \mathbf{4,61\tau}$$

12.4.2 – O circuito RLC

Vamos supor um circuito onde R, L e C estão em série como mostra a figura 12.7. Uma fem externa foi usada para carregar o circuito e depois foi retirada e em seguida a chave foi fechada. De modo análogo ao circuito RL, as quedas de potencial no resistor e no capacitor é igual a fem induzida, assim

$$RI + \frac{q}{C} = V_L \rightarrow RI = -L\frac{dI}{dt} - \frac{q}{C}$$

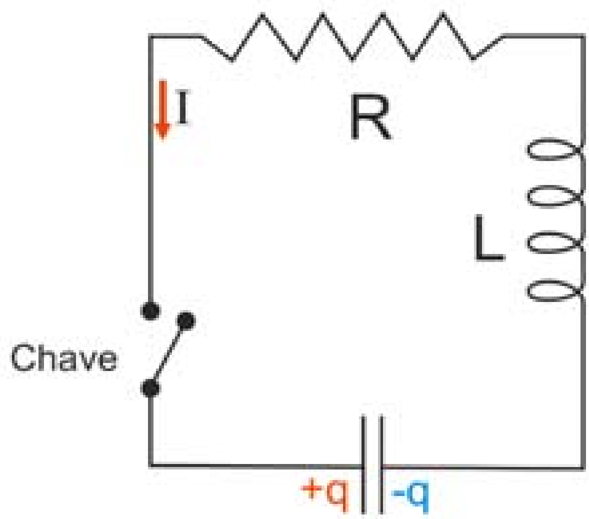


Figura 12.7 Circuito RLC em série.

Esta equação pode ser transformada em uma equação diferencial através da derivada de todos os membros em relação a t, assim

$$R\frac{dI}{dt} = -L\frac{d^2I}{dt^2} - \frac{1}{C}\frac{dq}{dt}$$

Usando que $I = \frac{dq}{dt}$, então

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0$$

Vamos supor uma situação onde R = 0, então

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{C}I=0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{LC}I=0$$

Trocando I por x, esta equação é idêntica a equação do movimento harmônico simples, então nós temos que

$$\boldsymbol{\omega_o = \frac{1}{(LC)^{1/2}}} \tag{12.17}$$

é a frequência de oscilação da corrente (frequência natural do circuito) e que tem como amplitude I_o, então

$$\boldsymbol{I = I_o sen\, \omega_o t} \tag{12.18}$$

Qual é a origem da oscilação da corrente em uma perfeita senóide? Enquanto o capacitor se descarrega, a fem V_L na auto-indutância tende a manter a corrente no sentido oposto que carrega o capacitor. Quando o capacitor se carrega, o processo começa a acontecer no sentido contrário, ele tende a se descarregar novamente. Este processo de carga em um sentido e outro continua indefinidamente enquanto não tiver perda energética.

Para caso em que a resistência é diferente de zero, temos a situação semelhante a um oscilador amortecido. O amortecimento no sistema elétrico resulta na perda de energia através do resistor e a corrente é dada por

$$\boldsymbol{I = I_o e^{-\gamma t} sen\,(\omega t + \alpha)} \tag{12.19}$$

onde

$$\gamma = \frac{R}{2L} \;\; e \;\; \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Existe uma diferença muito grande entre as equações 12.8 e 12.9 dada pela exponencial que faz com que a oscilação cai para zero no decorrer do tempo.

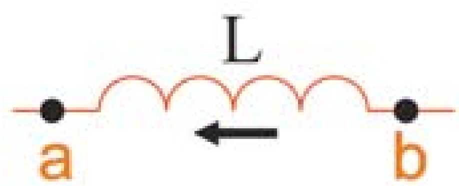
Fica como atividades verificar que as equações das correntes do circuito RL e RLC são soluções das equações diferenciais.

ATIVIDADES

1) Determine a auto-indutância de um solenóide toroidal com N = 200 espiras, A = 5 cm^2 e r = 0,1 m.

2) Quando a corrente em um solenóide toroidal está variando com uma taxa igual a 0,026 A/s, o módulo da fem é igual a 12,6 mV. Quando a corrente é igual a 1,4 A, o fluxo magnético médio através de cada espira do solenóide é igual a 0,00285 Wb. Quantas espiras o solenóide possui?

3) O indutor da figura abaixo apresenta uma indutância de 0,26 H e conduz uma corrente no sentido indicado que diminui com uma taxa constante dada por di/dt = - 0,018 A/s. a) Qual é a fem auto-induzida? b) Qual é a extremidade do indutor que está a um potencial mais elevado, a ou b?



4) A indutância mútua entre duas bobinas é M = 3,25x10-4 H. A corrente I_1 na primeira bobina cresce com uma taxa uniforme de 830 A/s. a) Qual é a fem induzida na segunda bobina? Ela é constante? b) Suponha que a corrente esteja circulando na segunda bobina em vez da primeira. Qual é o módulo da fem induzida na primeira bobina?

5) Um solenóide toroidal possui raio médio r, seção reta com área A e é enrolado uniformemente com N1 espiras. Um segundo solenóide toroidal com N2 espiras é

enrolado uniformemente sobre o primeiro. As duas bobinas são enroladas no mesmo sentido. Qual é a indutância mútua? (Despreze a variação do campo magnético através da seção reta do toróide.)

6) Determine a auto-indutância de um solenóide com comprimento de 10 cm, área de 5 cm^2 e 100 voltas.

7) A indústria de produção de energia elétrica gostaria de encontrar um modo eficiente de armazenar a energia gerada a mais nas horas em que o consumo diminui para poder atender à demanda dos consumidores nas horas de pico. Talvez um grande indutor pudesse ser usado. Qual seria a indutância necessária para armazenar 1 kWh de energia em uma bobina conduzindo uma corrente de 200 A? (Dica: Lembre-se de transformar a energia para o SI)

8) Em um acelerador de prótons usado em experiências de física com partículas elementares, as trajetórias dos prótons são controladas por eletroímãs defletores que produzem campos magnéticos da ordem de 6,6 T. Qual é a densidade de energia do campo no vácuo entre os pólos desse tipo de eletroímã?

9) Em relação ao exemplo 12.5, quanta energia será armazenada nesse indutor quando a corrente final tiver sido atingida?

10) Mostre que as equações 12.18 e 12.19 são soluções das equação diferencial

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0$$

Para o caro de R = 0 e R Í 0, respectivamente.

11) Faça os gráficos de corrente versus tempo das equações 12.18 e 12.19.

CONCLUSÃO

Para concluir este livro reservamos como último ato o estudo da indutância. Você aprendeu que o indutor é um dispositivo que sempre se opõe a variações da corrente elétrica e que a indutância pode ser uma auto-indutância no próprio circuito ou uma indutância mútua entre circuitos vizinhos.

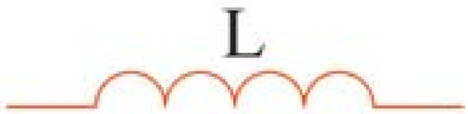
Aprendeu que os circuitos RL e RLC têm em comum um elemento de indutor L que torna difícil a ocorrência de variações bruscas de corrente em virtude dos efeitos associados a fem induzida e que quanto maior a taxa de variação da corrente, maior será a fem induzida e maior a diferença de potencial nos terminais do indutor.

Chegamos enfim, caro estudante, ao fim de mais uma jornada no estudo da Física. Esperamos que mantenha o ânimo e continue com entusiasmo e afinco seus estudos, pois as maiores conquistas sempre são difíceis de serem concluídas porém quando alcançadas são as que trazem maior satisfação.

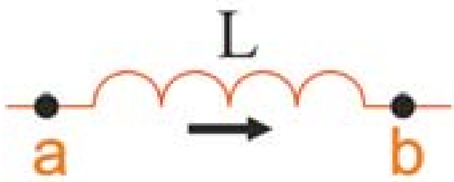
RESUMO

Indutância

Auto-indutância



Representação de uma auto-indutância

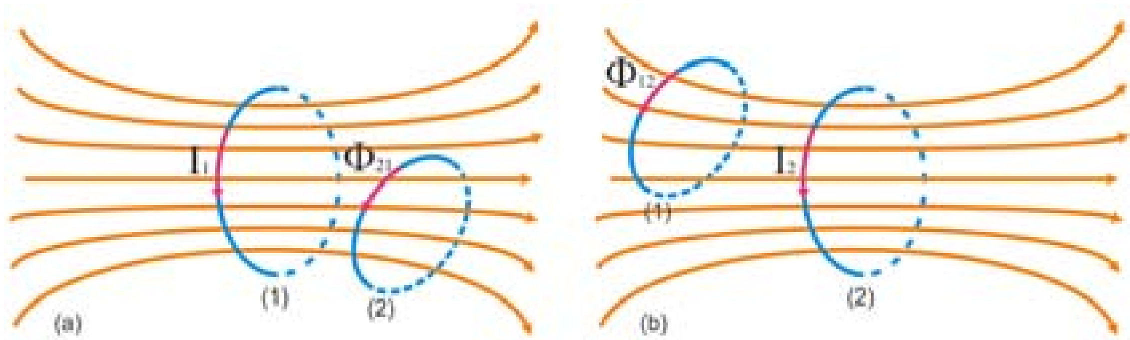


Representação de uma corrente em um circuito auto-indutivo

$$\boxed{V_L = -L\frac{dI}{dt}}$$

equação mais explícita para a tensão auto-induzida,

Indutância mútua



Indução mútua (a) circuito 1 em 2 e (b) circuito 2 em 1

$$V_{M2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

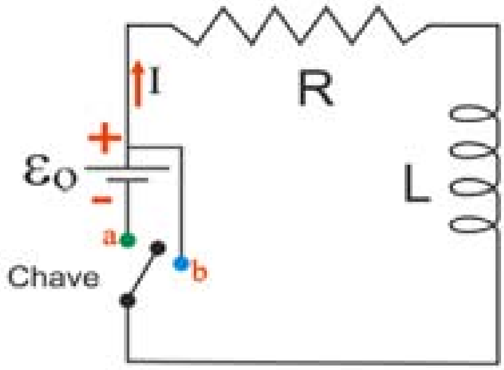
$$V_{M1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

Energia magnética

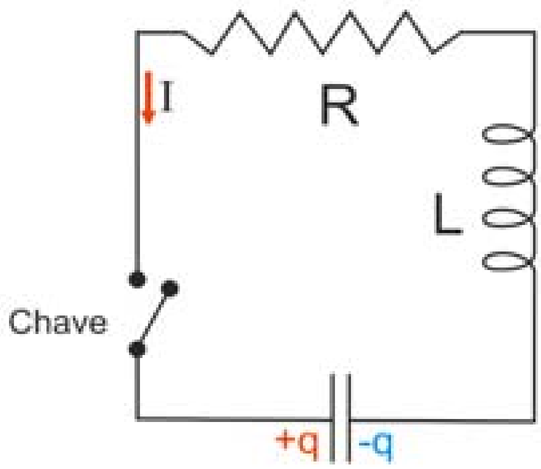
A ***energia armazenada em um indutor*** corresponde a energia armazenada no campo magnético. Enquanto uma corrente é produzida em um indutor, um campo magnético é criado no seu interior.

$$\boxed{\mathfrak{U} = \frac{1}{2}LI^2}$$

O circuito RL



O circuito RLC



$$\boxed{I = I_o e^{-\gamma t} sen\,(\omega t + \alpha)}$$

REFERÊNCIAS

ALONSO, M., Finn, E. J. Física. 1ed. São Paulo: Addison-Wesley, 1999, 936p.

SERWAY, R. A., JEWETT Jr, J. W. Princípios de Física. Vol. 1. 3 ed. São Paulo: Thomson, 2005, 403p.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. Fundamentals of Physics – Extended. 4 ed. New York: John Wiley & Sons, 1993, 1306p.