Aula

15

PRINCÍPIO DE ARQUIMEDES

META

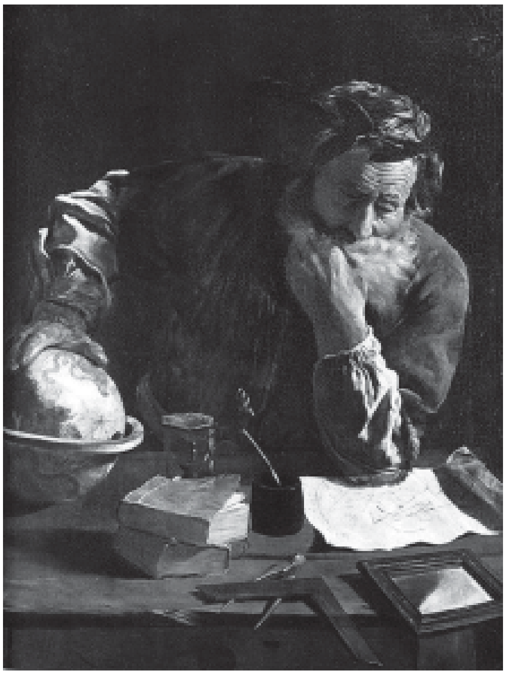
Apresentar o conceito de empuxo e o princípio de Arquimedes. Descrever brevemente a dinâmica dos Fluidos e apresentar a Equação de Bernoulli.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá:
utilizar o Princípio de Arquimedes para determinar a força de empuxo percebida por corpos em contato com superfícies líquidas;
listar as principais características qualitativas na dinâmica dos fluidos; e
utilizar a equação de Bernoulli para resolver problemas simples de dinâmica dos fluidos.

PRÉ-REQUISITOS

Álgebra, trigonometria e vetores.



Arquimedes de Siracusa. Pintura de Domenico Fetti (1620) (Fonte: http://pt.wikipedia.org).

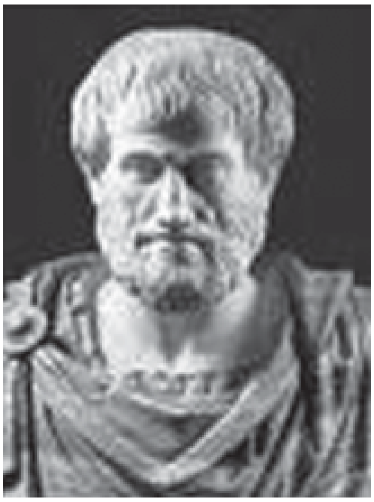
INTRODUÇÃO

Nesta nossa aula de dinâmica dos fluidos estudaremos alguns conceitos que, apesar de simples, ainda são de extrema importância em várias áreas dos afazeres humanos. O princípio de Arquimedes, por exemplo, é amplamente utilizado por ourives para a determinação da fração dos metais em ligas. A Equação de Bernoulli tem grande utilidade no estudo do sistema circulatório, sendo foco de pesquisas do mais alto nível no mundo todo. Apesar de toda esta importância, seu estudo nos cursos básicos ainda é negligenciado devido à simplicidade de seu formalismo matemático. Espero que tenham uma boa aula e possam identificar as aplicações.

(Fonte: http://upload.wikimedia.org).

PRINCÍPIO DE ARQUIMEDES

Bom dia caros colegas. Espero que continuem com a mesma vontade e energia para desenvolver novos conhecimentos. Hoje discutiremos um princípio extremamente antigo conhecido como princípio de Arquimedes, um daqueles cientistas heterodoxos do passado.

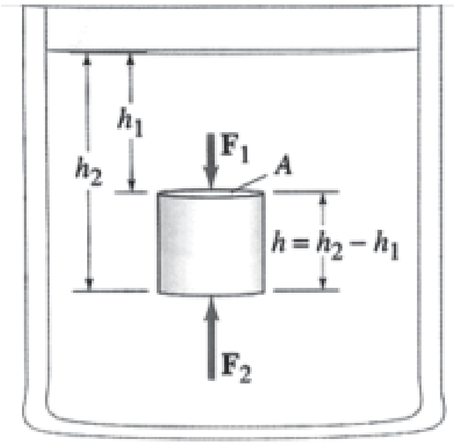


O princípio de Arquimedes pode ser descrito de uma maneira simples como sendo a resposta de um fluido (lembram-se das definições da aula passada?) à presença de um corpo imerso nele. Naturalmente que temos um enunciado formal que satisfaz a ciência.

> Todo corpo total ou parcialmente imerso em um fluido em equilíbrio, na presença de um campo gravitacional, fica sob ação de uma força vertical ascendente aplicada pelo fluido; esta força é denominada empuxo $\vec{E}$, e sua intensidade equivale ao peso do fluido deslocado pelo corpo, mas em sentido contrário.

Toda esta discussão já nos fez lembrar que existem objetos que parecem pesar menos quando estão dentro de um fluido, parece existir uma força de empuxo. Se você está segurando um bloco de madeira ou de aço dentro de uma piscina, eles parecem ter o mesmo peso, mas ao sair da piscina ocorre uma grande transformação. Na realidade temos sempre a força peso aplicada sobre os blocos, mas a força de empuxo é exercida pelo líquido.

A força de empuxo ocorre porque a pressão em um líquido aumenta com a profundidade. Portanto a pressão exercida sobre a face inferior do bloco e que aponta para cima é sempre maior que a pressão aplicada na parte superior do bloco e direcionada para baixo. Cabe aqui agora um desenho para poder ilustrar o nosso ponto.



Para verificar o efeito disto, considere o cilindro de altura *h* cuja área reta é dada por *A*. considere também que todo o cilindro se encontra submerso em um fluido cuja densidade é dada por r_F. o fluido exerce uma pressão $P_1=r_Fgh_1$ no topo da superfície do cilindro. A força devida à esta pressão no topo do cilindro é $F_1=P_1A=r_Fgh_1A$, e é direcionada para baixo. De uma maneira absolutamente análoga, o fluido exerce uma força para cima devida na base do bloco e é dada por $F_2=P_2A=r_Fgh_2A$ devida à pressão do fluido e que é chamada de *força de empuxo, E,* que age para cima e tem a seguinte magnitude.

$$E = F_2 - F_1 = \rho_F g A(h_2 - h_1) = \rho_F A g h = \rho_F g V$$

Onde naturalmente V=Ah é o volume do cilindro. Como r_F é a densidade do fluido, o produto r_F $gV=m_Fg$ é o peso do fluido que ocupa um volume igual ao volume do cilindro. Portanto a força de empuxo no cilindro é igual ao peso do fluido deslocado pelo cilindro. Eis aqui a prova do princípio de Arquimedes descrito acima.

ATIVIDADES

1. Um objeto de 70 kg foi encontrado no fundo do oceano. Seu volume é dado por $3.0X10^4$ cm^3. Quanta força será necessária para levantar este objeto?
2. Que volume de Hélio é necessário para fazer um balão flutuar, se o balão vazio e seu equipamento tem uma massa de 390kg?

COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

1. Podemos calcular facilmente a força de empuxo do objeto conhecendo apenas o volume do objeto e a densidade da água do mar, algo em torno de $1{,}025X10^3$ kg/m^3.

$$E = m_{H_2O}g = 3.0 \times 10^2 N$$

Como o peso da estátua é igual a 690 N, a força necessária é de apenas 390 N. Seria o mesmo que dizer que o objeto pesa apenas 400N.
2. O empuxo sobre o balão, devido ao ar deslocado, deve ser igual e eoposto ao pelos do balão com o equipamento, mais o Hélio. Assim, $E=(390+m_{He})g=\rho_{ar}gV$. Mas a massa do Hélio depende do volume do balão: $m_{He}=r_{He}V$. note que desprezamos o volume do balão vzio e o seu equipamento. Assim, $\rho_{ar}gV=(390+R_{He}V)g$, o que nos leva finalmente à resposta:

$$V = \frac{390}{\rho_{ar} - \rho_{He}} = 350\, m^3$$

DINÂMICA DOS FLUIDOS

Começaremos nossa discussão com um conceito extremamente importante chamado de incompressibilidade. Existe uma grande diferença entre líquidos e gases. A densidade de um gás é fácil de mudar, mas fluidos geralmente são incompressíveis. Incompressibilidade significa que a densidade de um fluido é independente da pressão. Isto não é perfeitamente correto, fluidos de fato se contraem e se expandem um pouco (pense nos amortecedores dos carros), mas realmente muito pouco. Esta expansão e compressão podem ser desprezadas. Nós já usamos o conceito de compressibilidade dos fluidos. Por exemplo, a fórmula de como a pressão depende da profundidade do fluido assumiu que a densidade se manteve constante, apesar do aumento da pressão. O Princípio de Pascal também depende disto. O princípio de Pascal afirma que se você empurra em uma extremidade do fluido, a pressão do fluido aumenta em todos os lugares. Se o fluido fosse compressível, o que aconteceria é que parte do fluido se tornaria mais denso. Isto é o que ocorre a um sólido. Um gás, por outro lado, se comprimirá uniformemente. Antes de chegarmos à famosa equação de Bernoulli, vamos discutir brevemente um segundo conceito conhecido como *equação da continuidade*. Até agora mantivemos a nossa discussão nos casos de fluidos estáticos. Agora iremos discutir fluidos em movimento. Se algo se move, ele deve ir a algum lugar. Este simples fato é justamente a conservação da massa. A conservação da massa resulta naquilo que é chamado de equação da continuidade. Consideremos uma pequena quantidade de um fluido em movimento a alguma velocidade *v*. durante um pequeno intervalo de tempo D*t* essa quantidade de fluido move-se uma distância *d*=vD*T*. O volume de fluido que atravessou este ponto é, portanto *V=dA=AvDt*, onde *A*, é a área que cruza este ponto. A massa de fluido é portanto:

$$\Delta m = \rho V = \rho A v \Delta T$$

E, a partir daí obtemos a taxa de fluxo de massa:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho A v$$

Uma outra maneira de escrever esta equação é:

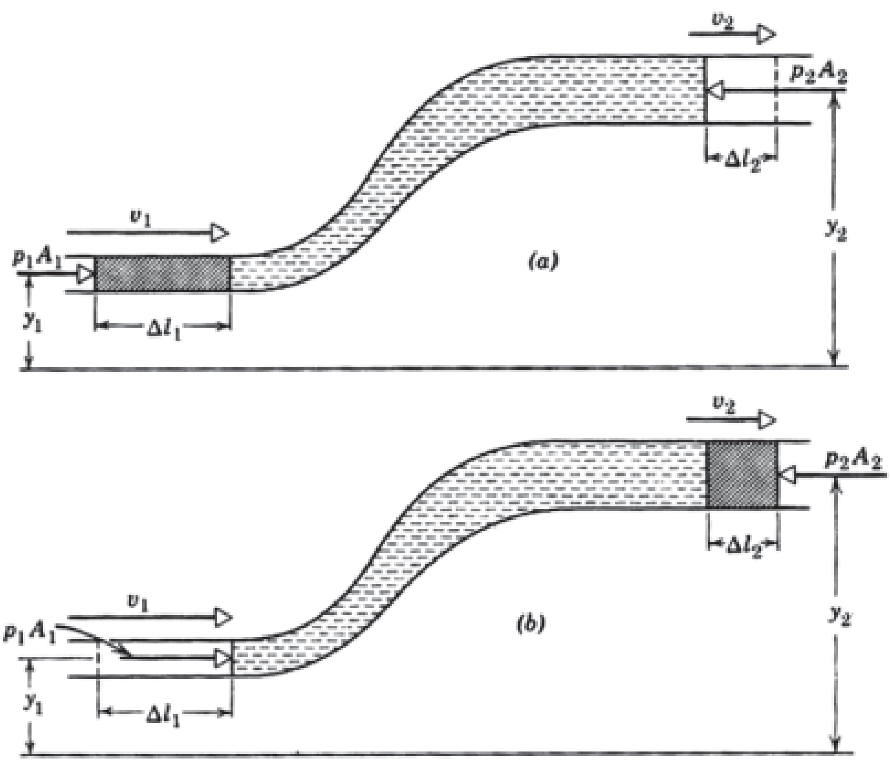
$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

A equação da continuidade é familiar se você já lidou com uma mangueira de jardim. Se você diminui a saída de água pela metade, você diminui a área de escape e em conseqüência a velocidade da água deve dobrar. Em geral isto significa que se o tubo se torna mais largo ou mais estreito, o fluxo de fluido se torna mais lento ou mais rápido.. a equação da continuidade também se aplica a gases: o gás se torna mais rápido quando canalizado entre grandes edifícios. Novamente, o ponto principal a se levar em consideração é o fato de que a massa precisa ir para algum lugar. No entanto, o problema é mais simples para um líquido por causa da sua incompressibilidade. A densidade deve ser a mesma em todos os lugares e por isto se $\rho 1=\rho_2$, então $A_1 v_1 = A_2 v_2$ em um líquido.

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Para facilitar a nossa discussão, faremos algumas simplificações. Em primeiro lugar descontaremos a viscosidade. Você pode pensar na viscosidade como sendo uma espécie de atrito entre os fluidos. Um segundo ponto a se considerar por simplicidade é assumir que o fluido não apresentará nenhuma rotação enquanto flui.

Isto significa que o fluido tem a mesma velocidade em todos os lugares. Com estas pequenas mas importantes simplificações nos capacitamos a derivar a equação de Bernoulli. Poderíamos facilmente escrever a equação, mas a sua derivação é mais importante que o seu próprio uso no sentido da física utilizada. Esta equação é simplesmente uma variação da derivação do teorema trabalho energia que já estudamos em aulas passadas. Nós vamos considerar o escoamento estacionário através de um tubo como o mostrado abaixo



O trecho mostrado na canalização tem à esquerda, seção transversal uniforme de área A_1; esta parte é horizontal e está situada, em relação a certo sistema de coordenadas a certa altura y_1. O tubo se alarga e se eleva gradualmente de tal modo que o trecho à direita tem seção transversal uniforme de área A_2 e está, em relação ao mesmo sistema de coordenadas, à altura y_2. Vejamos agora com um pouco mais de atenção quem são estes personagens das figuras. Elas parecem idênticas, mas não são. Existe uma porção central preenchida com linhas curtas e paralelas. Esta região corresponde àquela parte do tubo onde sempre há um fluido. Agora aparecem as diferenças: no desenho mais acima temos a impressão de que uma certa quantidade de fluido está aprisionada em um pequeno duto cujo volume é dado por $A_1\Delta l_1$. Onde A_1 é a área transversal e Δl_1. Do desenho também podemos deduzir que esta quantidade de água está em movimento para a direita com uma certa velocidade v_1. Este volume de água também se encontra em média à uma altura dada por y_1 e há uma pressão p_1 sendo exercida por extraterrestres da esquerda para a direita. Pronto, descrevemos adequadamente as variáveis do lado esquerdo da parte de cima da figura. Ainda falta muito, tenha paciência. Passemos para o lado direito da mesma figura de cima. Podemos definir sem muito suor as seguintes variáveis: A_2, y_2, Δl_2 e v_2. A pressão p_2 pode parecer um pouco estranha, mas sem ela a água estaria escorrendo para fora...nosso trabalho será estudar o movimento da água que se encontra no tubinho a para o tubinho b. note que e, todos os pontos da parte estreita do tubo a pressão é p_1 e a velocidade v_1; em todos os pontos da parte mais larga a pressão é p_2 e a velocidade v_2.

Vamos agora lembrar que o teorema do trabalho energia estabelece que: O trabalho resultante efetuado sobre um objeto é igual à variação em sua energia cinética: W=ΔK. Na figura acima as forças que realizam trabalho sobre o sistema são as forças de pressão p_1A_1e p_2A_2, que atuam respectivamente nas extremidades esquerda e direita e *a força da gravidade*. Enquanto o fuido escoa através do tubo, o efeito resultante pode ser visualizado nas partes a e b da figura acima: é o transporte da porção de fluido representada pelas áreas diagonalizadas, que passa da mostrada na parte a da figura para a parte b da figura. A porção de fluido assinalada com marcas horizontais permanece o mesmo enquanto o fluido escoa.

Pode-se determinar o trabalho *W*, realizado pela força resultante sobre o sistema, como se segue:

- O trabalho realizado sobre o sistema pela força de pressão p_1A_1 é $p_1A_1Dl_1$.;
- O trabalho realizado sobre o sistema pela força de pressão p_2a_2 é $-p_2a_2\Delta l_2$, é negativo, o que significa que o *sistema* realiza um trabalho positivo.
- O trabalho realizado pela gravidade sobre o sistema está associado à elevação da porção de fluido representada pela porção de linhas inclinadas, desde a altura y1', à altura y2 e vale –mg (y2-y1); m é a massa da porção de fluido contido em qualquer uma das áreas marcadas diagonalmente. Também este trabalho é negativo, porque o sistema realiza trabalho *contra* as forças gravitacionais. O trabalho *W* realizado sobre o sistema pela força resultante é obtido somando os três termos discutidos até aqui:

$$W = P_1A_1\Delta l_1 - P_2A_2\Delta l_2 - mg(y_2 - y_1)$$

Para trabalhar um pouco melhor esta equação, vamos verificar que os volumes contidos nas duas áreas diagonalizadas são iguais: $A_1\Delta l_1 = A_2\Delta l_2$. Isto já não era nenhum segredo, mas vamos bagunçar um pouco agora esta equação, lembrando da própria definição de densidade (que assumimos uniforme): $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{A\Delta L}$. Essa confusão adicional pode enrolar um pouco a sua cabeça, então refaça estas contas em um pedacinho de papel ao lado só para se convencer de que não estou inventando.

$$W = (p_1 - p_2)\left(\frac{m}{\rho}\right) - mg(y_2 - y_1)$$

Não se preocupe em absoluto com a aparência da equação, logo veremos que ela nos ajudará bastante.

Agora sim utilizaremos o teorema do trabalho e da energia cinética:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W$$

O que nos levará finalmente à equação:

$$(p_1 - p_2)\left(\frac{m}{\rho}\right) - mg(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Que pode ser reescrita sob a seguinte forma:

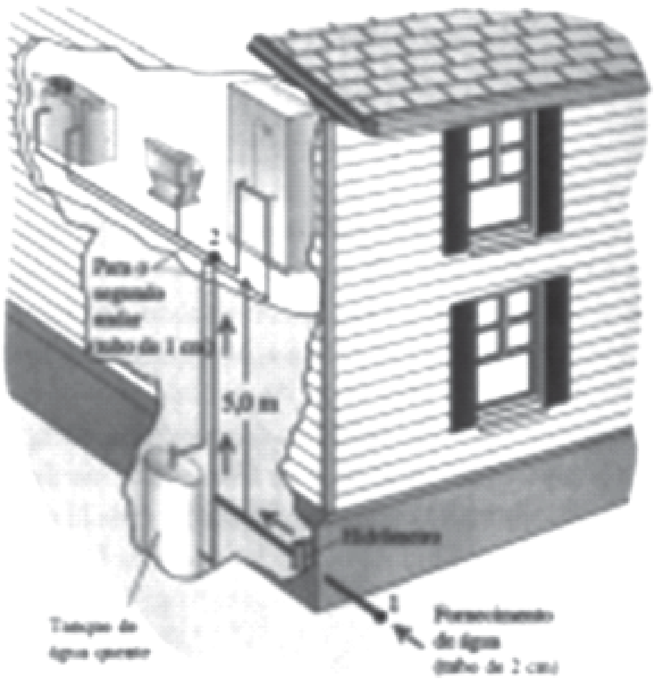
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 = constante$$

Como estes índices 1 e 2 se referem a *quaisquer* posições no tubo de escoamento, elas valem em qualquer lugar. Esta é a conhecida equação de Bernoulli para escoamento estacionário, incompressível e não viscoso. Agora que nos encontramos prontos para alguns exercícios que elucidarão os conceitos até aqui estudados.

ATIVIDADES

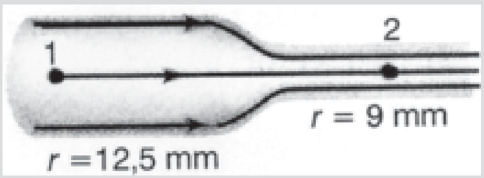
1. Um conjunto de água se afunila de um raio de 12,5 mm para um raio de 9 mm. Se a velocidade da água na parte mais larga é de 1,8 m/s, qual é a velocidade da água na parte mais estreita do conduto? Qual é a taxa de fluxo volumétrico?Qual é a taxa de fluxo da massa?
2. A água entra em uma casa através de um tubo com diâmetro interno de 2,0 cm com uma pressão absoluta igual a 4,0X 10^5 Pa (cerca e 4 atm). Um tubo com diâmetro interno de 1,0 cm se liga ao banheiro do segundo9 andar a 5,0 metros de altura (examine a figura). Sabendo que no tubo de entrada a velocidade é igual a 1,5 m/s, ache a velocidade di escoamento, a pressão e a vazão volumétrica no banheiro.

3.



COMENTÁRIO SOBRE AS ATIVIDADES

1. Vejamos como este problema se parece coma a introdução de uma pequena figura:



Aplicando a equação da continuidade para um fluido incompressível, obtemos:

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = v_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} = 3{,}5 m/s$$

A taxa de fluxo volumétrico, é dada simplesmente por:

$$v_1 A_1 = 8{,}8 \times 10^{-4} m^3/s$$

E, finalmente, a taxa de fluxo de massa é:

$$\rho v_1 A_1 = 0{,}88 kg/s$$

2. Os pontos 1 e 2 devem ser colocados no tubo de entrada e no banheiro, respectivamente. A velocidade no banheiro v_2 é obtida a

partir da equação da continuidade:

$$v_{2=}\frac{A_1}{A_2}v_1 6.0\ m/s$$

Por uma questão de simplicidade podemos impor que $y_1=0$ na entrada e já sabemos que $y=5,0m$ no banheiro. Conhecemos p_1 e v_1 e podemos achar p_2 pela equação de Bernoulli:

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g y_1-\frac{1}{2}\rho v_2^2-\rho g y_2=p_2$$

Substituindo os valores fornecidos pelo problema chegamos facilmente ao resultado:

$$p_2=3{,}3\ atm$$

CONCLUSÃO

Nesta aula estudamos um tópico que geralmente é negligenciado nos cursos mais voltados às áreas de exatas. Seus conceitos que aqui aparecem como sendo muito abstratos se mostrarão de grande utilidade por ocasião do estudo do sistema circulatório. Nesta ocasião será possível a compreensão matemática de como a força de bombeamento do coração durante os esforços físicos possibilita a utilização de vasos capilares geralmente inertes.

RESUMO

Nesta aula tratamos dos seguintes tópicos:
- Princípio de Arquimedes
- Equação da continuidade
Equação de Bernouli

PRÓXIMA AULA

Iniciar o estudo da termodinâmica através de sua lei zero. Estudar os diversos tipos de termômetros e escalas termométricas. Aprender a manipular as leis que regem a variação volumétrica com a temperatura para sólidos, líquidos e gases.

REFERÊNCIAS

GIANCOLI, Douglas C. **Physics for Scientists and Engineers**, 3 ed. Editora Prentice Hall, New Jersey, 2000.

YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física I – Mecânica**, 10 ed. Tradução de Adir Moysés Luiz. Editora Addison Wesley, São Paulo, 2003.

FREDERICK, J. Keller; GETTYS, W. Edward; SKOVE, Malcolm J. **Física**, v. 1, 1 ed. Tradução de Alfredo Alves de Farias. Editora Makron Books, São Paulo, 1997.

RESNICK, Robert; HALLIDAY, David; KRANE, Kenneth S. **Física 1**, 5 ed. Tradução de Pedro M. C. L. Pacheco, Marcelo A. Savi, Leydervan S. Xavier, Fernando R. Silva. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2003.