Introdução à Mecânica Quântica

Stoian Ivanov Zlatev

CESAD
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2012

Introdução à Mecânica Quântica

Elaboração de Conteúdo
Stoian Ivanov Zlatev

Capa
Hermeson Alves de Menezes

FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Zlatev, Stoian Ivanov
Z82i Introdução à Mecânica Quântica / Stoian Ivanov Zlatev. --
São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2012.

1. Mecânica quântica. 2. Radiação. 3. Fótons.
4. Átomo. 5. Spin nuclear. I. Título.

CDU 530.145

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. “José Aloísio de Campos”
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

Aula 1: Radiação do corpo negro **1**

1.1 Introdução 2

1.2 Radiação térmica 2

1.2.1 Radiação térmica 2

1.2.2 Distribuição espectral da radiação térmica 3

1.2.3 Corpo negro 5

1.3 Radiação de cavidade 5

1.3.1 A fórmula de Rayleigh-Jeans 7

1.3.2 A fórmula de Planck 8

1.4 Conclusões 12

1.5 Resumo 12

1.6 Glossário 13

1.7 Atividades 14

1.8 Referências 14

Aula 2: Fótons **15**

2.1 Introdução 16

2.2 O efeito fotoelétrico 16

2.2.1 O que é efeito fotoelétrico? 16

2.2.2 Aspectos do efeito fotoelétrico 18

2.2.3 A teoria de Einstein 20

2.3 O efeito Compton 23
2.3.1 Espalhamento de fótons por elétrons 23
2.3.2 As experiências de Compton 24
2.3.3 A fórmula de Compton 25
2.4 Conclusões 27
2.5 Resumo 28
2.6 Glossário 28
2.7 Atividades 29
2.8 Referências 29

Aula 3: A teoria quântica antiga **31**
3.1 Introdução 33
3.2 O modelo de Bohr para o átomo 33
3.2.1 O átomo de Rutherford e o problema de estabilidade . . 33
3.2.2 Espectros de linhas 34
3.2.3 O espectro do hidrogênio 36
3.2.4 O modelo de Bohr 37
3.2.5 Correção para a massa nuclear finita. 41
3.3 Regras de quantização 42
3.4 Ondas de de Broglie 44
3.5 A necessidade de uma nova mecânica 46
3.6 Conclusões 46
3.7 Resumo 47
3.8 Glossário 47
3.9 Atividades 48
3.10 Referências 49

Aula 4: A equação de Schrödinger **51**
4.1 Introdução 53
4.2 A equação de Schrödinger 53

4.2.1 O que se espera de uma mecânica? 53
4.2.2 A relação energia-momento 54
4.2.3 A equação de Schrödinger 57
4.2.4 Duas propriedades da equação de Schrödinger 61
4.3 A função de onda 61
4.3.1 Interpretação de Born para a função de onda 62
4.3.2 Normalização da função de onda 63
4.3.3 Conservação da probabilidade 65
4.4 Equação de Schrödinger independente do tempo 67
4.4.1 Separação de variáveis 67
4.4.2 Partícula livre 69
4.4.3 Estados estacionários 70
4.5 Conclusões 71
4.6 Resumo 72
4.7 Glossário 73
4.8 Atividades 73
4.9 Referências 74

Aula 5: O formalismo da mecânica quântica e a sua interpretação 75

5.1 Introdução 77
5.2 Estados e observáveis 78
5.2.1 O que é um observável? 78
5.2.2 Valores esperados 78
5.2.3 Estados 81
5.2.4 O espaço de Hilbert 82
5.2.5 Operadores 86
5.2.6 Observáveis 89
5.3 Medidas 90
5.3.1 Medidas na mecânica clássia 90

5.3.2 Possíveis resultados de uma medida segundo a mecânica quântica . . . 91

5.3.3 Espectros de operadores hermitianos . . . 93

5.3.4 Probabilidades . . . 94

5.3.5 Postulados da mecânica quântica . . . 96

5.4 Incertezas . . . 97

5.4.1 Desvio padrão . . . 97

5.4.2 Relações de incerteza . . . 98

5.5 Conclusões . . . 101

5.6 Resumo . . . 102

5.7 Glossário . . . 102

5.8 Atividades . . . 103

5.9 Referências . . . 104

Aula 6: Sistemas em uma dimensão: estados ligados 105

6.1 Introdução . . . 107

6.2 Estados ligados . . . 107

6.2.1 Estados ligados e espalhamento na mecânica clássica . . . 107

6.2.2 Estados ligados na mecânica quântica . . . 109

6.3 Poço infinito . . . 110

6.3.1 Equação de Schrödinger . . . 111

6.3.2 Autovalores e autofunções . . . 111

6.3.3 Observáveis e valores esperados . . . 114

6.4 Oscilador harmônico . . . 115

6.4.1 Hamiltoniano e equação de Schrödinger . . . 116

6.4.2 O método algébrico . . . 117

6.4.3 Espectro e autofunções . . . 120

6.4.4 Valores esperados . . . 123

6.5 Conclusões . . . 124

6.6 Resumo 125
6.7 Glossário 125
6.8 Atividades 126
6.9 Referências 126

Aula 7: Sistemas em uma dimensão: estados não ligados 127

7.1 Introdução 129
7.2 Partícula livre 129
7.2.1 Equação de Schrödinger 129
7.2.2 Pacote de onda 131
7.2.3 O movimento da partícula livre 134
7.3 Potencial degrau 135
7.4 Barreira de potencial 141
7.5 Resumo 145
7.6 Conclusões 145
7.7 Resumo 146
7.8 Glossário 146
7.9 Atividades 147
7.10 Referências 147

Aula 8: Movimento em um campo de forças centrais 149

8.1 Introdução 151
8.2 Mecânica quântica no espaço de dimensão três 151
8.2.1 Coordenadas e momentos 151
8.2.2 Observáveis 152
8.3 O problema de dois corpos 153
8.3.1 O problema de dois corpos na mecânica clássica. 153
8.3.2 O problema de dois corpos na mecânica quântica 154
8.4 A equação de Schrödinger em coordenadas
esféricas 154

8.4.1 Equação de Schrödinger independente do tempo 155

8.4.2 Separando variáveis 155

8.4.3 Harmônicos esféricos 157

8.5 Momento angular 158

8.5.1 Operadores do momento angular 158

8.5.2 Quantização do momento angular 159

8.5.3 Incertezas 162

8.5.4 Conservação do momento angular 164

8.6 Conclusões 166

8.7 Resumo 167

8.8 Glossário 167

8.9 Atividades 167

8.10 Referências 168

Aula 9: Átomos de um elétron **169**

9.1 Introdução 170

9.2 O átomo do hidrogênio 170

9.2.1 A equação radial 171

9.2.2 O espectro discreto do hamiltoniano 172

9.2.3 Estados do átomo 174

9.2.4 Degenerescência 177

9.2.5 Números quânticos 178

9.2.6 Notação espectroscópica 179

9.2.7 Densidade de probabilidade 180

9.3 Átomos hidrogenóides 182

9.4 Conclusões 183

9.5 Resumo 183

9.6 Glossário 184

9.7 Atividades 184

9.8 Referências 185

Aula 10: Spin e Princípio de exclusão de Pauli **187**

10.1 Introdução 189

10.2 Momento magnético e spin 189

10.2.1 Momento magnético 189

10.2.2 A experiência da Stern-Gerlach 191

10.2.3 Spin 192

10.3 Spin 1/2 na mecânica quântica 193

10.3.1 Spinors 193

10.3.2 Operadores do spin 194

10.3.3 Estados de spin 195

10.3.4 Estados de um elétron 196

10.3.5 Razão giromagnética 197

10.3.6 Momento angular total 197

10.4 Átomos de muitos elétrons e princípio de exclusão 199

10.4.1 Átomos de muitos elétrons 199

10.4.2 Princípio de exclusão de Pauli 201

10.4.3 Configurações eletrônicas dos átomos 203

10.5 Atividades 204

10.6 Conclusões 204

10.7 Resumo 205

10.8 Glossário 205

10.9 Atividades 206

10.10 Referências 206

A Integral Gaussiana **209**

B Constantes **211**

Radiação do corpo negro

1
AULA

METAS:

- Introduzir os principais conceitos usados na descrição da radiação do corpo negro.
- Explicar as dificuldades enfrentadas pela teoria clássica na descrição da radiação do corpo negro.
- Explicar a solução, proposta por Planck, do problema da radiação do corpo negro .

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- Usar as leis de radiação do corpo negro.
- Explicar a solução proposta por Planck para o problema do corpo negro.

PRÉ-REQUISITOS:

- Oscilador harmônico.
- Ondas eletromagnéticas.

1.1 Introdução

No conjunto de teorias da física a mecânica quântica ocupa um lugar especial. Não se trata apenas do fato bem-conhecido de que muitas das descobertas e das invenções do século XX (a energia nuclear, os transistores e os lasers, entre outros) só se tornaram possíveis depois do desenvolvimento da visão "quântica" sobre a realidade física. Outras teorias da física - a mecânica Newtoniana, a termodinâmica, a física estatística, a eletrodinâmica - também serviam como base para um rápido progresso científico e tecnológico. No entanto, nenhuma delas trouxe uma mudança no pensamento físico tão radical e tão abrangente como aquela que acompanhou o desenvolvimento da mecânica quântica. Com efeito, a mecânica dos meios contínuos, a eletrodinâmica e, num certo sentido, até a teoria de relatividade geral são baseados em fundamentos que ainda Newton construiu. Os físicos aprendiam como tratar sistemas cada vez mais complexos, mas, até o final do século XIX, não tinham muitos motivos para questionar os conceitos fundamentais da mecânica Newtoniana.

1.2 Radiação térmica

1.2.1 Radiação térmica

Todo corpo com temperatura acima do zero absoluto emite radiação eletromagnética. Esta radiação, chamada *radiação térmica*, é gerada no movimento térmico das partículas carregadas da matéria. Com efeito, toda partícula carregada em movimento acelerado emite ondas eletromagnéticas.

Radiância A intensidade da radiação térmica depende da temperatura T do corpo e, também, da natureza do corpo. A *radiância* R_T é uma característica da intensidade da emissão em função da temperatura T. Ela á dada pela potência emitida por unidade de área da superfície[1]:

$$R_T = \frac{\text{potência emitida}}{\text{área da superfície do corpo}}\,.$$

A radiância cresce rapidamente quando aumenta a temperatura do corpo.

1.2.2 Distribuição espectral da radiação térmica

A função radiância R_T é útil no cálculo da energia perdida por um corpo através da radiação térmica. No entanto, frequentemente precisamos de informações mais detalhadas sobre a emissão. A radiação térmica de um corpo consiste em vários pulsos de radiação emitidas pelas partículas carregadas do corpo no movimento térmico. Essa radiação pode ser representada por uma superposição de ondas monocromáticas com todos os comprimentos de onda possíveis - de zero até o infinito. Geralmente, todos os comprimentos de onda são emitidas - mas não todas com a mesma intensidade. É importante conhecer a distribuição espectral da energia na radiação térmica. O sol emite todas as ondas do espectro eletromagnético. Mas qual a parcela da energia das ondas na região da luz visível nessa radiação? A radiância R_T não traz informações sobre a distribuição espectral da energia.

No estudo de distribuições espectrais podemos usar o comprimento de onda λ como parâmetro, ou, alternativamente, a frequência ν da onda. Com efeito, essas grandezas são relacionadas pela equação

$$\lambda\nu = c, \tag{1.1}$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo (suponhamos que a radiação se propaga no espaço vazio). A função que usaremos na descrição da distribuição espectral

[1] Suponhamos que todas as partes da superfície possuem propriedades iguais. Pois fica claro, que, no geral, a radiância é uma característica "local". A emissão térmica pode seguir padrões diferentes em partes diferentes do corpo se essas partes são pintadas em cores diferentes, por exemplo.

da energia emitida terá, então, duas formas nas quais variáveis espectrais são o comprimento de onda e a frequência, correspondentemente.

A radiância espectral $R_T(\lambda)$ é uma função de duas variáveis, T e λ, tal que a potência da radiação emitida por unidade de área e cujos comprimentos de onda estão entre λ_1 e λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) é dada por

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Potência das ondas com comprimento de}\\ \text{onda entre } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ por unidade de área.}\end{array}} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R_T(\lambda)\, d\lambda. \tag{1.2}$$

Em particular, se $\Delta\lambda$ for pequeno (e positivo), a potência das ondas emitidas por unidade de área e cujos comprimentos de onda estão no intervalo de λ até $\lambda + \Delta\lambda$ é aproximadamente igual a $R_T(\lambda)\,\Delta\lambda$. Pondo $\lambda = c/\nu$ na eq. (1.2), temos

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R_T(\lambda)\, d\lambda = \int_{\nu_2}^{\nu_1} R_T\left(\frac{c}{\nu}\right) \frac{c}{\nu^2}\, d\nu, \tag{1.3}$$

onde[2]

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1}, \qquad \nu_2 = \frac{c}{\lambda_2}. \tag{1.4}$$

Definindo uma nova função $R(\nu, T)$ por

$$R(\nu, T) = R_T\left(\frac{c}{\nu}\right) \frac{c}{\nu^2} \tag{1.5}$$

e usando as equações (1.2), (1.3), (1.4), temos

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Potência das ondas com frequências}\\ \text{entre } \nu_2 \text{ e } \nu_1 \text{ por unidade de área.}\end{array}} = \int_{\nu_2}^{\nu_1} R(\nu, T)\, d\nu. \tag{1.6}$$

Usaremos o mesmo nome *radiância espectral* para as funções $R_T(\lambda)$ e $R(\nu, T)$. Verifica-se facilmente que, para $\Delta\nu$ positivo e pequeno,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Potência das ondas emitidas por unidade}\\ \text{de área e com frequências entre } \nu \text{ e } \nu+\Delta\nu.\end{array}} \approx R(\nu, T)\, \Delta\nu. \tag{1.7}$$

Obviamente, as seguintes relações são validas:

$$\int_0^\infty R(\nu, T)\, d\nu = \int_0^\infty R_T(\lambda)\, d\lambda = R_T. \tag{1.8}$$

Porque definimos *duas* formas da radiância espectral, $R_T(\lambda)$ e $R(\nu, T)$? Geralmente, em experiências são medidos os comprimentos de onda. Fazer medidas diretas das frequências da luz visível, por exemplo, não seria uma tarefa fácil: essas frequências têm ordem de grandeza de 10^{14} Hz. Por outro lado, em considerações teóricas as vezes é mais conveniente usar as frequências.

[2] Note que $\nu_1 > \nu_2$.

1.2.3 Corpo negro

Em 1859, Gustav Kirchhoff mostrou que a capacidade de um corpo de emitir radiação eletromagnética é relacionada a capacidade do corpo de absorver radiação[3]. Um absorvedor ideal seria também o melhor emissor de radiação térmica.

O conceito de corpo negro foi introduzido por Kirchhoff em 1860. Alguns corpos reais possuem características de absorção e de emissão bastante próximas às do corpo negro. Em 2009 cientistas japoneses produziram um material na base de nanotubos de carbono que absorve entre 98 e 99% da radiação incidente.

Corpo negro. Um sistema que absorve completamente a radiação eletromagnética incidente é denominado *corpo negro.*

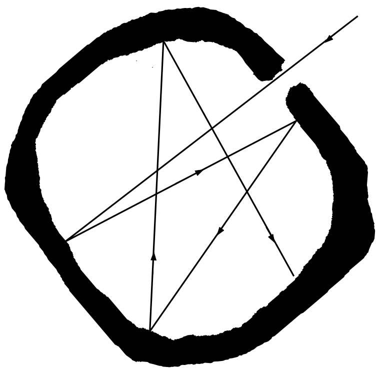

Figura 1.1: Corpo negro

Trata-se, aparentemente, de uma idealização. Os corpos reais refletem uma parcela da radiação incidente. No entanto, é possível construir um modelo de corpo negro. Suponhamos que uma cavidade em um sólido, mantido em temperatura T, está ligada com o exterior por um pequeno orifício. A radiação, entrando na cavidade pelo orifício, sofre múltiplas reflexões nas paredes. Em cada reflexão uma parcela dessa radiação é absorvida. Finalmente, a radiação que entrou pelo orifício é completamente absorvida pelas paredes. O orifício absorve toda a radiação incidente comportando-se como um corpo negro.

Segundo a lei de Kirchhoff, o orifício é também um emissor ideal: ele emite como um corpo negro porque ele absorve como um corpo negro.

1.3 Radiação de cavidade

Uma analise teórica do modelo do corpo negro fornece a forma da radiância espectral $R_T(\lambda)$ para o corpo negro.

[3]Trata-se da *lei da emissão de radiação térmica* de Kirchhoff; ver, por exemplo, GASIOROWICZ, S. *Quantum physics.* Third edition. New York: Wiley, 2003.

Suponhamos, que as paredes da cavidade estão com temperatura T. Estabelece-se rapidamente equilíbrio térmico entre as paredes e a radiação eletromagnética na cavidade. O valor da temperatura T determina a energia, como também a *distribuição espectral da energia* desta *radiação de cavidade.* Definiremos as grandezas usadas na descrição da radiação de cavidade.

- A *densidade de energia* u_T da radiação de cavidade é igual à energia da radiação por unidade de volume.

- A *densidade espectral de energia* $u(\nu, T)$ definimos de modo análogo à radiância espectral: a energia por unidade de volume das ondas com frequências entre ν e $\nu + d\nu$ é dada por $u(\nu, T)\, d\nu$.

A distribuição espectral da radiação emitida pelo orifício está relacionada à distribuição espectral da energia das ondas eletromagnéticas na cavidade, [4],

$$R(\nu, T) = \frac{c}{4} u(\nu, T). \tag{1.9}$$

Deste modo, a analise da distribuição espectral da radiação de cavidade permite tirar conclusões sobre a radiância espectral do corpo negro.

As vezes pode ser mais conveniente usar o comprimento de onda λ (e não a frequência ν) como parâmetro espectral. A forma da densidade espectral de energia que usaremos nesse caso é dada por

$$u_T(\lambda) = u(\frac{c}{\lambda}, T)\, \frac{c}{\lambda^2} \tag{1.10}$$

e, para qualquer intervalo de comprimentos de onda $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, vale

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} u_T(\lambda)\, d\lambda = \int_{\nu_2}^{\nu_1} u(\nu, T)\, d\nu,$$

onde $\nu_1 = c/\lambda_1$ e $\nu_2 = c/\lambda_2$.

[4] Ver, por exemplo, GREINER, W. *Quantum Mechanics: An Introduction*, Berlin: Springer-Verlag, 2000.

1.3.1 A fórmula de Rayleigh-Jeans

Argumentação baseada na física clássica foi usada por Lord Rayleigh na dedução de uma fórmula para a radiação de cavidade em 1900. Cinco anos mais tarde, uma dedução mais completa da fórmula foi apresentada por Rayleigh e Jeans. Do ponto de vista da física clássica, o campo eletromagnético na cavidade é uma superposição de ondas estacionárias. A energia $\mathcal{E}(\nu)$ de uma onda estacionária com frequência ν flutua em torno do seu valor médio $\bar{\mathcal{E}}(\nu)$. Este valor, segundo a física clássica, é dado por

$$\bar{\mathcal{E}}(\nu) = \int_0^\infty \mathcal{E} P_\nu(\mathcal{E})\, d\mathcal{E} \tag{1.11}$$

A flutuação de $\mathcal{E}(\nu)$ se deve ao movimento térmico dos elétrons nas paredes da cavidade. As flutuações da energia total do campo eletromagnético na cavidade são desprezíveis. O papel importante da interação dos elétrons da parede com as ondas estacionárias na cavidade está no estabelecimento do equilíbrio térmico: a energia média $\bar{\mathcal{E}}(\nu)$ é determinada pela temperatura T das paredes.

em que $P_\nu(\mathcal{E})$ e a densidade de probabilidade[5] de encontrar a onda estacionária de frequência ν com energia $\mathcal{E}$. A densidade de probabilidade $P_\nu(\mathcal{E})$, dada pela lei de Boltzmann, independe de ν,

$$P_\nu(\mathcal{E}) = P(\mathcal{E}) = \frac{e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}}}{\int_0^\infty e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}}} = \frac{1}{kT} e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}}. \tag{1.12}$$

em que k é a constante de Boltzmann, $k = 1,380658 \times 10^{-23}$ J/K. Substituindo a eq. (1.12) na eq. (1.11), temos

$$\bar{\mathcal{E}}(\nu) = kT. \tag{1.13}$$

Para uma cavidade de forma simples (um cubo, por exemplo), podemos calcular o número de ondas estacionárias por unidade de volume e com frequências no intervalo entre ν e $\nu + d\nu$. Encontramos[6] que este número é dado por

$$N(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\, d\nu. \tag{1.14}$$

[5] Isto é, a probabilidade de encontrar uma onda estacionária de frequência ν (um oscilador de frequência ν) com uma energia no intervalo entre $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ será igual a $P_\nu(\mathcal{E})\, d\mathcal{E}$. A probabilidade de encontrar o oscilador com energia no intervalo $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E} < \mathcal{E}_2$ será dada pela integral $\int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} \mathcal{P}_\nu(\mathcal{E})\, d\mathcal{E}$.

[6] Ver, por exemplo, EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica: Átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas.* Rio de Janeiro: Campus, 1979.

Multiplicando a densidade $N(\nu)$ pela energia média $\mathcal{E}(\nu)$, obtemos a *fórmula de Rayleigh-Jeans para a radiação do corpo negro*:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT. \tag{1.15}$$

A função $u_T(\lambda)$ tem a forma

$$u_T(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}. \tag{1.16}$$

Na Figura 1.2 são mostrados gráficos da densidade espectral da radiação de cavidade (ou da radiância espectral $R_T(\lambda)$ do corpo negro, sendo $R_T(\lambda)$ proporcional a $u_T(\lambda)$) observada em experiências, como também o gráfico da função dada na fórmula de Rayleigh-Jeans. A fórmula (1.16) oferece uma descrição razoável da densidade espectral na região das frequências baixas ($\lambda \to \infty$). Mas, no geral, ela não é compatível com os resultados das experiências. Mais do que isso: a fórmula de Rayleigh - Jeans leva a um resultado inesperado e inaceitável. Com efeito, a densidade de energia da radiação de cavidade é dada pela integral de $u_T(\lambda)$:

$$u_T = \int_0^\infty u_T(\lambda)\, d\lambda. \tag{1.17}$$

No entanto, a integral da função $u_T(\lambda)$, eq. (1.16), diverge! O comportamento pouco realista de $u_T(\lambda)$ (e, consequentemente, de $R_T(\lambda)$) na região de altas frequências (comprimentos de onda pequenos) é conhecido como a "catástrofe da ultravioleta".

1.3.2 A fórmula de Planck

A densidade espectral $u(\nu, T)$, eq. (1.15), é dada pelo produto da densidade espectral de ondas estacionárias $N(\nu)$, eq. (1.14), e da energia média $\bar{\mathcal{E}}(\nu)$ de uma onda estacionária. A teoria clássica afirma que $\bar{\mathcal{E}}(\nu)$ obedece a lei de equipartição (1.13) e, por causa disso, independe de ν. Planck deduziu, em 1900, uma outra fórmula para $u(\nu, T)$. Ele não questionou o método de cálculo

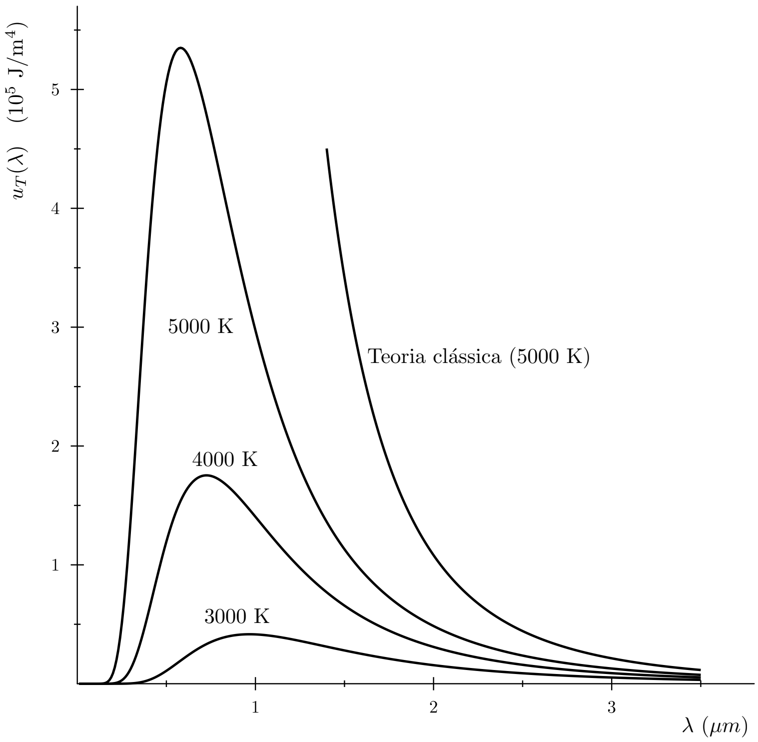

Figura 1.2: Densidade espetral de energia da radiação de cavidade.

da densidade espectral $N(\nu)$ das ondas estacionárias, mas as regras clássicas usadas no cálculo de $\bar{\mathcal{E}}(\nu)$.

A hipótese de Planck. A eq. (1.11) sugere que a energia $\mathcal{E}$ de uma onda estacionária monocromática na cavidade pode tomar qualquer valor positivo (tem uma integral em $\mathcal{E}$ de zero até o infinito no segundo membro da equação). A *hipótese de Planck* sugere que os valores da energia de uma onda estacionária monocromática são *quantizadas*, a saber:

- a energia de uma onda estacionária de frequência ν pode tomar apenas valores pertencentes a um conjunto discreto, $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$;

- os valores possíveis da energia são dados por $\mathcal{E}_n = h\nu \ (n = 0, 1, 2, \dots)$, em que h é uma nova constante fundamental, denominada hoje *constante de Planck*.

A constante de Planck tem dimensão de momento angular (ou, energia $\times$ tempo). O valor é igual a $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J$\cdot$s.

A energia média da onda estacionária será dada pela soma

$$\mathcal{E}(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n P_\nu(\mathcal{E}_n), \tag{1.18}$$

em que a probabilidade de encontrar a onda estacionária com energia $\mathcal{E}_n$ é igual a

$$P_\nu(\mathcal{E}_n) = \frac{e^{-\frac{\mathcal{E}_n}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\mathcal{E}_n}{kT}}}. \tag{1.19}$$

Aparentemente, a lei de Boltzmann foi mantida (compare a eq. (1.12 com a eq. (1.19)), mas um cálculo simples mostra[7], que a energia média (1.18) é igual a

$$\bar{\mathcal{E}}(\nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{1.20}$$

um resultado diferente do resultado clássico (1.13).

A fórmula de Planck para a densidade espectral de energia. Uma expressão para a densidade espectral da energia $u(\nu, T)$ é obtida através da multiplicação de $\mathcal{E}(\nu)$, eq. (1.20) por $N(\nu)$, eq. (1.14):

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{1.21}$$

Esta é a fórmula de Planck para a distribuição espectral da radiação de cavidade. Usando a equação (1.10), obtemos

$$u_T(\lambda) = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}. \tag{1.22}$$

[7]Ver, por exemplo, EISBERG, R .; RESNICK, R. *Física quântica.* Rio de Janeiro: Campus, 1979.

Decorre da fórmula de Planck (1.21) que a radiância espectral $R_T(\lambda)$ terá a forma

$$R_T(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}. \tag{1.23}$$

A integral (em λ, de zero até o infinito) desta função existe (como, também, existe a integral análoga da densidade espectral de energia, dada pela eq. (1.22)). A fórmula de Planck, ao contrário da fórmula de Rayleigh-Jeans, está livre dos problemas da "catástrofe da ultravioleta". A fórmula de Planck está de acordo com a radiância espectral do corpo negro experimentalmente observada. Portanto, a fórmula de Planck explica também a *lei de Stefan* e a *lei de deslocamento de Wien.*

A lei de Stefan. Enunciada na forma de uma lei empírica em 1879, a lei de Stefan afirma que a radiância integral R_T é dada pela equação

$$R_T = \sigma T^4, \tag{1.24}$$

onde σ é a *constante de Stefan – Boltzmann*,

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4}.$$

A expressão para R_T obtida teoricamente por integração da radiância espectral está de acordo com a lei de Stefan. Com efeito,

$$R_T = \int_0^\infty R(\nu, T)\, d\nu = \frac{(2\pi)^5}{240} \cdot \frac{k^4}{c^2 h^3}\, T^4. \tag{1.25}$$

Usando as equações (1.24) e (1.25) podemos determinar a constante de Planck.

A lei de deslocamento de Wien. A lei de deslocamento foi deduzida por Wien em 1893 na base de argumentos da termodinâmica. A lei se refere à posição $\lambda_{\max}$ do valor máximo no gráfico da radiância espectral $R_T(\lambda)$:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

em que b é a *constante de Wien*, $b = 2,897 \times 10^{-3}$ m $\cdot$ K.

A lei de deslocamento de Wien pode ser deduzida a partir da fórmula de Planck. A constante de Wien b se exprime em termos das constantes h, c e k. O valor de b obtido está de acordo com os resultados das experiências.

O espectro do corpo negro. Finalmente, medidas da densidade espectral da energia de cavidade feitas por Coblentz em 1916 estavam de acordo com a previsão de Planck. O valor calculado da constante de Planck era igual a $6,67 \times 10^{-34}$ J $\cdot$ s.

1.4 Conclusões

- Todo corpo com temperatura acima do zero absoluto emite radiação eletromagnética.
- Um corpo que absorve toda a radiação eletromagnética incidente é chamado de corpo negro. O absorvedor perfeito é também o melhor emissor.
- As teorias da física clássica levaram à fórmula de Rayleigh-Jeans para a emissão do corpo negro. Esta formula é incompatível com os valores observados da radiância espectral na região de comprimentos de onda pequenos. Além disso, a integral da radiância espectral teórica de Rayleigh-Jeans diverge.
- Planck conseguiu uma descrição correta da emissão do corpo negro na base de uma hipótese de quantização da energia das ondas estacionárias.

1.5 Resumo

Introduzimos grandezas usadas na descrição da radiação térmica: a radiância e a radiância espectral. A radiância espectral para um corpo negro é proporcional à densidade espectral de energia de radiação em uma cavidade. Isso permite a dedução de uma expressão para a radiância espectral baseada nas leis da eletrodinâmica e da mecânica estatística. Mas a expressão deduzida - a fórmula de Rayleigh-Jeans - é incompatível com a realidade. Planck deduziu uma outra formula que está de acordo com os resultados das experiências. As leis de emissão do corpo negro - a lei de Stefan e a lei de deslocamento de Wien podem ser deduzidas da formula de Planck. Mas a fórmula de Planck não é baseada inteiramente nos conceitos da física clássica. Planck precisou de uma hipótese de quantização da energia das ondas estacionárias para deduzir a fórmula.

1.6 Glossário

- catástrofe do ultravioleta
- constante de Planck
- constante de Stefan-Boltzmann
- corpo negro
- lei de deslocamento de Wien
- lei de Stefan
- quantização da energia de um oscilador harmônico
- radiação de cavidade
- radiação térmica
- radiância
- radiância espectral

1.7 Atividades

ATIV. 1.1. Um corpo negro com temperatura inicial de 1000 K é aquecido até 300 K.

(a) Determine quantas vezes aumenta a radiância R_T.

(b) Determine a variação de λ_{max}.

(c) Determine quantas vezes aumenta o valor máximo da radiância espectral $R(\nu, T)$.

ATIV. 1.2. Determine λ_{max} para um corpo negro com temperatura de

(a) 1000 K;

(b) 2000 K;

(c) 3000 K.

1.8 Referências

1. EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica: Átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas.* Rio de Janeiro: Campus, 1979.

2. GASIOROWICZ, S. *Quantum physics.* Third edition. New York: Wiley, 2003.

3. GREINER, W. *Quantum Mechanics: An Introduction.* Berlin: Springer-Verlag, 2000.