Física C

Milan Lalic

CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA - UFS

São Cristóvão/SE
2011

Física C

Elaboração de Conteúdo
Milan Lalic

Projeto Gráfico e Capa
Hermeson Alves de Menezes

FICHA CATALOGRÁFICA PRODUZIDA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Lalic, Milan.
L195f Física C/ Milan Lalic. -- São Cristóvão: Universidade Federal de Sergipe, CESAD, 2011.

1. Física . 2. Ondas. 3.Movimentos oscilatório
4. Eletromagnetismo I. Título.

CDU 537.6/.8

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Cidade Universitária Prof. "José Aloísio de Campos"
Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze
CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE
Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Sumário

Aula 1

PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DO MOVIMENTO OSCILATÓRIO

META
Introduzir aos alunos conceitos básicos do movimento oscilatório

OBJETIVOS
Ao final desta aula, o aluno deverá:
Descrever oscilações em termos de amplitude, período e frequência angular.
Fazer cálculos com movimento harmônico simples.
Utilizar conceitos da energia para analisar movimento harmônico simples.
Reconhecer realizações práticas do movimento harmônico simples: pêndulo simples e pêndulo físico.
Analisar o que e como amortecem todas as oscilações reais.
Identificar características das oscilações forçadas e do fenômeno da ressonância.

PRÉ-REQUISITO
Trigonometria básica; cálculo diferencial básico; mecânica.

Introdução

Todo movimento que se repete em intervalos de tempo iguais é chamado de **periódico**. Podemos definir **movimento oscilatório** como qualquer movimento periódico (ou repetitivo) que se realiza em torno de uma posição de equilíbrio. A última se define como uma posição em que o objeto que executa o movimento não sente nenhuma força. Existem muitos tipos de movimentos oscilatórios (ou oscilações): corpo ligado a uma mola, pêndulo, vibração de corda, vibração de átomos que compõem uma molécula ou um sólido..., são somente alguns dos exemplos. Alguns desses movimentos são bem complexos e complicados. Porém, mostra-se que todos eles podem ser analisados em termos de oscilação mais simples possível, que se chama **movimento harmônico simples (MHS)**. Esse fato justifica a atenção que daremos ao esse tipo de movimento específico. Começaremos nosso estudo aprendendo exatamente as características principais do MHS. Depois disso, seremos mais capazes de entender e descrever oscilações que acontecem na vida real: oscilações amortecidas e forçadas, bem como o fenômeno de ressonância.

1.1 Movimento Harmônico Simples (MHS)

● <u>Identificação da causa do MHS</u>

Ao invés de definir o MHS imediatamente através das funções matemáticas, vamos escolher outra estratégia. Vocês já sabem que qualquer movimento é causado por alguma força (segunda lei do “velho” Isaac Newton). Então, vamos definir o MHS a partir da sua causa, i.e., da força que o provoca! Para facilitar, consideraremos o movimento de um sistema concreto: um objeto com a massa m ligado a uma mola leve, cuja massa pode ser desprezada (figura 1.1). Imagine ainda que a superfície na qual o objeto se move é tão lisa que podemos considerar que não existe nenhum atrito. Assim, a única força exercida sobre o objeto é força da mola, F.

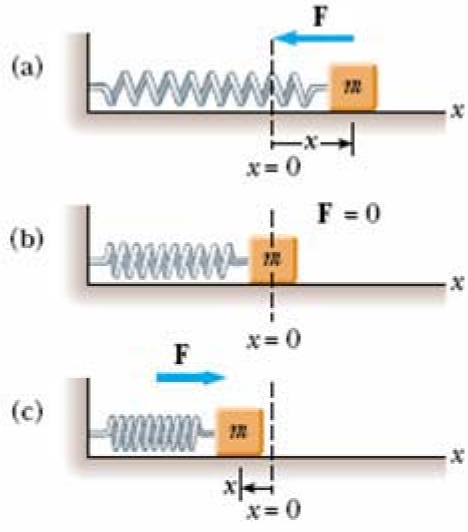


Figura 1.1. O corpo ligado a uma mola movendo-se em uma superfície sem atrito. (a) Quando o corpo se encontra a direita do equilíbrio (x>0), a força da mola aponta para esquerda. (b) Quando o corpo está em equilíbrio (x=0), a força da mola é zero. (c) Quando o corpo está à esquerda do equilíbrio (x<0), a força da mola aponta para direita.

Quando a mola nem é comprimida nem esticada, o corpo não sente força e não se move. Essa é a posição de equilíbrio, e por razões práticas, sempre colocaremos nesta posição a origem de sistema de coordenadas. Como o movimento ocorre em uma só dimensão, para descrevê-lo precisaremos somente de um eixo, x, e a posição de equilíbrio será descrita com x=0. Agora use sua imaginação para prever o que vai acontecer se você esticasse a mola até o certo ponto x=A! Neste ponto o corpo sofre a força no sentido do ponto de equilíbrio, e começa a se mover nessa direção. Ficando cada vez menos esticada, a mola exerce cada vez menor força sobre o corpo, até que ele atinja o equilíbrio e força se iguale à zero. O corpo passará o ponto de equilíbrio devido à sua inércia (primeira lei do “velho” Isaac Newton) e começará a comprimir a mola (passando para o outro lado de eixo x, x-negativo). Nesse lado o corpo sofrerá de novo a força em direção ao ponto de equilíbrio, que desta vez se opõe ao seu movimento. Finalmente, ele vai conseguir chegar até o ponto x=-A, onde vai parar num instante, começando o movimento na direção oposta. Então, o corpo vai executar um movimento oscilatório entre os pontos x=-A e x=+A sob influência de uma única força que sempre aponta para a posição de equilíbrio e fica mais intensa quando o corpo se encontra mais longe dele. Esta força, que é proporcional ao deslocamento, chama-se **força restauradora**, pois sempre tem tendência de devolver o corpo à sua posição de equilíbrio. Matematicamente, ela é descrita como:

$$F = -kx \qquad (1.1)$$

e é ela que provoca o movimento harmônico simples! No caso do nosso exemplo corpo-mola, a força restauradora (1.1) é a força elástica da mola (obedecendo a lei de Hook). Porém, podemos generalizar as coisas e dizer o seguinte: **Qualquer que seja o sistema observado, o objeto que se move sob influência de uma única força restauradora (com a forma matemática 1.1) vai executar o movimento harmônico simples.**

● Descrição matemática do MHS

Agora, sabendo qual força provoca o MHS, podemos descrevê-lo matematicamente aplicando a segunda lei de Newton.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \;\;\Rightarrow\;\; \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad (1.2)$$

Definindo:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad (1.3)$$

chega-se a equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad (1.4)$$

cuja solução é qualquer combinação linear das funções *sin(x)* e *cos(x)*, ou em forma mais compacta:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1.5)$$

Essa função descreve matematicamente como o deslocamento do objeto (x) que executa MHS se comporta em função do tempo (t). Quando t cresce a função cossenos muda de um valor extremo (-1) para o outro (+1), e o deslocamento x passa de $-A$ para $+A$. Portanto, o objeto oscila entre –A e A, e nós sabemos exatamente onde ele se encontra em qualquer instante t!

● Características do MHS

Vamos agora analisar a equação (1.5) definindo e explicando os símbolos matemáticos que aparecem lá.

● O deslocamento $x(t)$ frequentemente se chama elongação. A elongação de uma oscilação é a distância contada a partir da posição de equilíbrio em que o corpo se encontra no instante considerado.

● A é amplitude de oscilação. Define-se como máxima elongação, isto é, a maior distância que o corpo alcança a partir da posição de equilíbrio em sua oscilação.

● φ é constante de fase que define o deslocamento no instante t=0. Observe que sem essa constante seria sempre $x(0) = A$, i.e., no início da contagem de tempo o corpo se encontraria sempre na mesma posição!

● ω é a frequência angular, uma quantidade que descreve periodicidade do movimento. Qualquer movimento oscilatório se repete após algum tempo que costumamos chamar o **período de movimento** e anotamos com letra T. Mais preciso, o período é o tempo necessário para um objeto percorrer um ciclo completo de oscilação. No nosso exemplo corpo-mola, é o tempo preciso para que o objeto, saindo da posição x=A, volte à mesma, percorrendo então a distância 4A. Qualquer que seja a posição do objeto em algum instante *t*, após um período ele se encontrará de novo na mesma posição, ou matematicamente:

$$x(t+T)=x(t)$$

Levando em conta fórmula (1.5), segue:

$$A\cos[\omega(t+T)+\varphi]=A\cos(\omega t+\varphi)$$

A equação acima será satisfeita somente se os argumentos da função cosseno estivessem iguais ou diferenciados por 2π ,

$$\Rightarrow \quad \omega(t+T)+\varphi=\omega t+\varphi+2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega T=2\pi$$

ou seja,

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \tag{1.6}$$

Agora podemos interpretar a **frequência angular** ω**:** ela é definida como a fração de 2π radianos percorridos pelo oscilador durante o período T. A unidade de ω é rad/s. A **frequência linear f** de um movimento oscilatório é o inverso do período e representa o número de oscilações realizado por unidade do tempo:

$$f=\frac{1}{T} \tag{1.7}$$

A unidade de frequência é o inverso da unidade de tempo, ou seja, 1/segundo. Esta unidade é também chamada de "hertz" (Hz). Eliminando T das equações (1.6) e (1.7) podemos obter a conexão entre as frequências linear e angular:

$$\omega=2\pi f \tag{1.8}$$

As equações (1.6), (1.7) e (1.8) são gerais e válidas para qualquer movimento periódico. No caso específico do MHS, porém, está valendo a equação (1.3) que estabelece um resultado muito importante:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \rightarrow \quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \rightarrow \quad f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.9}$$

Ou seja: a frequência e o período no MHS dependem somente da rigidez da força restauradora (medida pela constante k) e da massa do corpo, e não das condições iniciais do movimento (i.e., quanto a mola foi inicialmente esticada, no exemplo corpo-mola).

Sabendo como a elongação depende do tempo (1.5), podemos facilmente calcular a velocidade e a aceleração de um corpo que executa MHS:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \tag{1.10}$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \tag{1.11}$$

Ambas são funções harmônicas do tempo e variam entre valores extremos:

$$v_{máx} = \pm\omega A = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}A \quad ; \quad a_{máx} = \pm\omega^2 A = \pm\frac{k}{m}A \tag{1.12}$$

Lembre-se que velocidade e aceleração são quantidades vetoriais e o sinal negativo perfeitamente faz sentido: ele aponta para direção negativa do eixo x! Como as funções seno e cosseno diferem somente pela diferença de fase (de 90^0), podemos correlacionar elongação, velocidade e aceleração do MHS e apresentá-las como na figura 1.2.

Para entender o significado dos gráficos, vamos analisar as seguintes situações:

● entre t = 0 e t = T/4 o corpo se move na direção negativa do eixo x (partindo da posição x=+A para a posição de equilíbrio); a velocidade cresce no mesmo sentido enquanto aceleração diminui. No instante t = T/4 o corpo se encontra na posição de equilíbrio, sem aceleração (a força é zero) e com velocidade máxima.

● entre t = T/4 e t = T/2 o corpo continua se movendo na direção negativa do eixo x; a velocidade está diminuindo, enquanto aceleração está aumentando. No instante t = T/2 o corpo se encontra na posição de amplitude x=-A, possuindo velocidade zero e aceleração máxima (devido à força máxima).

● entre t = T/2 e t = 3T/4 o corpo se move na direção positiva do eixo x; sua velocidade cresce no mesmo sentido e sua aceleração decresce. No instante t = 3T/4 o corpo passa de novo pela posição do equilíbrio, possuindo velocidade máxima e aceleração zero.

● entre t = 3T/4 e t = T o corpo continua se movendo na direção positiva do eixo x; a velocidade está diminuindo e aceleração está aumentando. No instante t = T o corpo se encontra na posição de amplitude x=+A, executando um ciclo completo de MHS

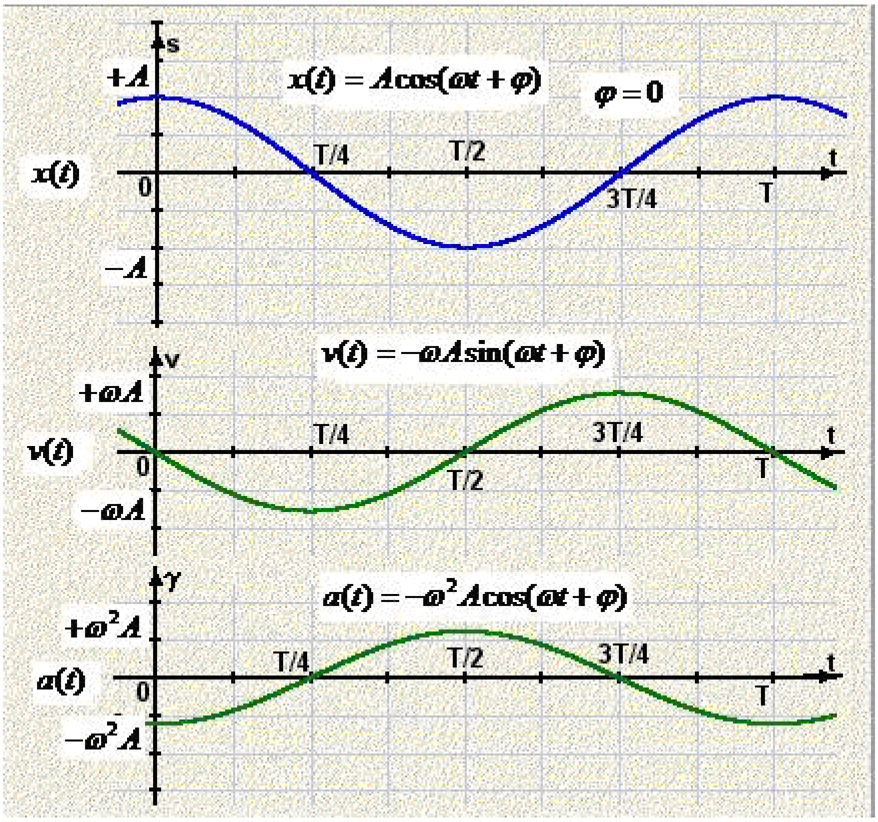


Figura 1.2. Gráficos de elongação, velocidade e aceleração de um corpo que executa o movimento harmônico simples.

As considerações discutidas acima são feitas para um caso particular, quando o movimento começa a partir da posição da amplitude x=+A (que corresponde à condição $\varphi = 0$ na equação (1.5)). Porém, no caso geral, usando as propriedades das funções seno e cosseno, podemos confirmar que a fase da velocidade difere da fase da elongação por 90^0 enquanto a aceleração e elongação estão sempre em contra-fase (diferem por 180^0):

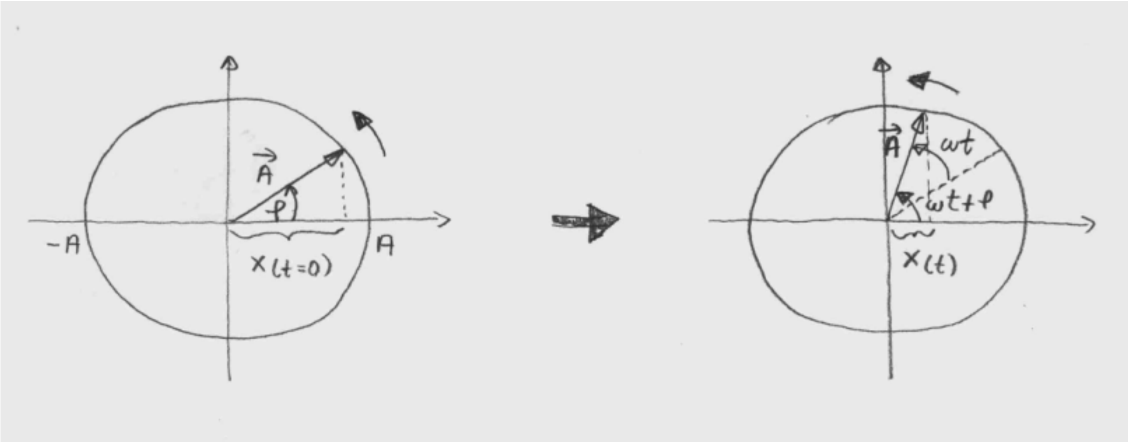
$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t + \phi) \\ v &= \omega A\cos(\omega t + \varphi + \pi/2) \\ a &= \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Observe que nas equações (1.13), que descrevem o MHS, a frequência angular ω (1.3) é característica do movimento, i.e., não depende das condições iniciais do movimento (quanto, por exemplo, nós esticamos a mola para iniciar as oscilações). A amplitude A e a constante de fase φ, porém, dependem das condições iniciais do movimento.

Exercício: Desenhe os gráficos de x(t), v(t) e a(t) no caso das seguintes condições iniciais: x(t=0)=0 e v(t=0)=0.

● Representação do MHS pelos fasores

O MHS pode ser representado pelo movimento circular de um vetor, como mostrado na figura 1.3.



a) $x(t=0) = A\cos\varphi$ b) $x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$

Figura 1.3: Rotação uniforme de um vetor com comprimento A, com velocidade angular ω. A projeção desse vetor no eixo x em qualquer instante representa o MHS (equação 1.5).

A relação entre elongação, velocidade e aceleração de um corpo que executa o MHS, já discutida anteriormente, pode ser representada em termos de fasores, como na figura 1.4. Nesta figura, os três vetores com magnitudes A, ωA e $\omega^2 A$ executam rotação uniforme ao longo de eixo z (saindo do plano do papel para seu olho), mantendo os ângulos entre eles constantes durante a rotação ($\pi/2$ e π, respectivamente). As projeções desses vetores no eixo x representam elongação, velocidade e aceleração do MHS, respectivamente, em qualquer instante t.

Os vetores mostrados nas figuras 1.3 e 1.4 chamam-se fasores. A representação do MHS em termos de fasores é muito útil quando é preciso combinar dois ou mais movimentos harmônicos, pois essa combinação se reduz simplesmente na adição de dois ou mais vetores.

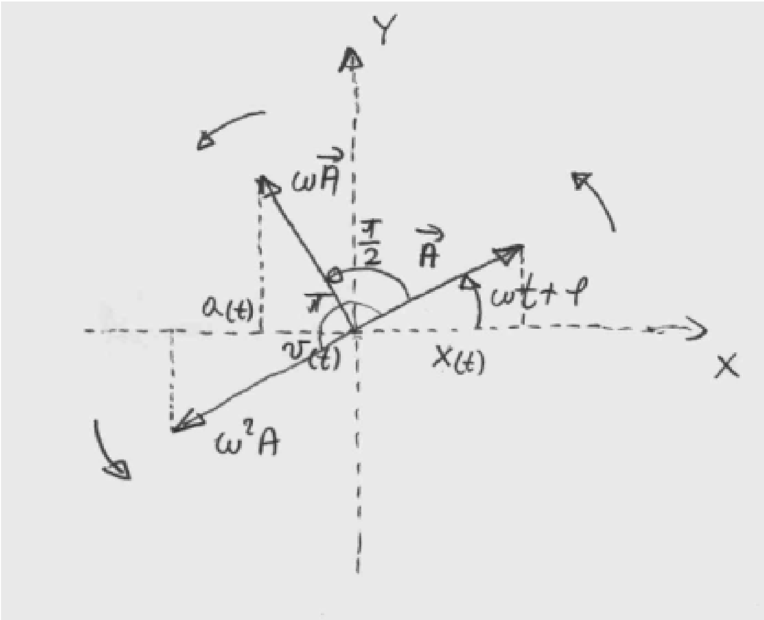


Figura 1.4: Rotação uniforme de vetores com comprimentos A, ωA e ω^2A com velocidade angular ω.

● Energia do movimento harmônico simples

Conhecendo as equações cinemáticas que descrevem o MHS (equações 1.5, 1.10 e 1.11), podemos agora analisar a questão da energia envolvida no movimento. A energia cinética varia com tempo, já que a velocidade tem a mesma propriedade:

$$K\left(t\right)=\frac{1}{2}mv^2(t)=\frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \tag{1.14}$$

Usando a identidade trigonométrica $\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$ junto com a fórmula (1.5), podemos expressar a energia cinética de outra maneira:

$$K(t)=\frac{1}{2}m\omega^2 A^2\left[1-\cos^2(\omega t+\varphi)\right]=\frac{1}{2}m\omega^2\left[A^2-x^2(t)\right] \tag{1.15}$$

que facilita a concluir que K atinge o valor máximo quando o corpo está na posição de equilíbrio (x=0), e o valor mínimo (i.e., zero) nos pontos extremos do movimento ($x=\pm A$).

A energia potencial U depende da elongação e também varia com tempo:

$$U(t)=\frac{1}{2}kx^2(t)=\frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t+\varphi) \tag{1.16}$$

onde foi usado o fato de que $k = m\omega^2$ pela equação (1.3). $U(t)$ atinge o valor máximo nas posições extremas do corpo (amplitudes) $x = \pm A$, e fica igual a zero quando o corpo está em posição de equilíbrio $x = 0$.

A energia total do sistema é a soma das energias cinética e potencial. A partir das fórmulas (1.14) e (1.16) é fácil verificar que:

$$E = K + U = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \equiv \frac{1}{2} kA^2 \tag{1.17}$$

i.e., de que E não depende do tempo. Portanto, **a energia total do corpo que realiza o MHS é constante durante o movimento.** Esse resultado é esperado porque a força restauradora é conservativa (não depende explicitamente do tempo), não existem forças dissipativas (como atrito, por exemplo), e consequentemente a energia mecânica deve ser conservada (lembre-se de lições da mecânica). O que acontece no movimento MHS, na verdade, é a transformação da energia cinética em energia potencial e vice-versa, mas de maneira que a soma dessas energias esteja constante em qualquer instante t! Esse fato é ilustrado na figura 1.5.

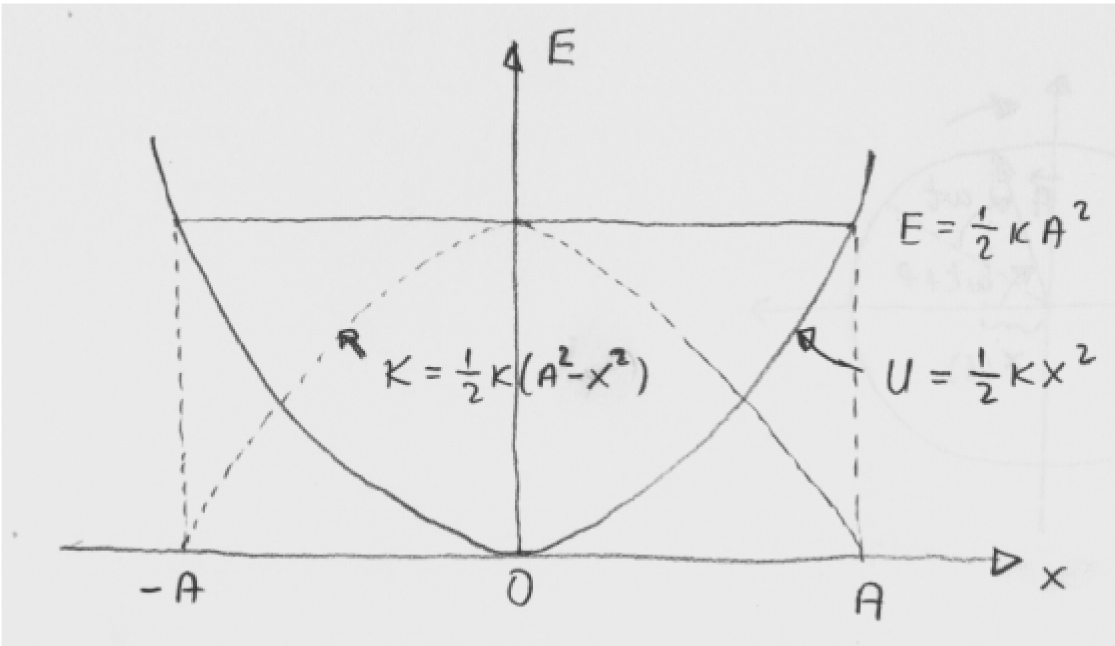


Figura 1.5: Energia cinética, potencial e total de um corpo que executa o MHS, como funções do deslocamento dele a partir de equilíbrio. Observe que para qualquer posição x (i.e., para qualquer instante t) K+V=E.

No ponto x=A toda energia do corpo consiste apenas da energia potencial U (neste ponto o corpo não se move e, portanto sua energia cinética é zero). Movendo-se para posição de equilíbrio (x=0), U diminui, mas K aumenta. Alcançando ponto de equilíbrio, o corpo perde toda energia potencial que se transformou em energia cinética. Continuando a se locomover, a energia cinética do corpo começa diminuir por conta do aumento da energia potencial, até que corpo chegue ao ponto x=-A, onde toda energia cinética se transformou em energia potencial. O processo se repete infinitamente, já que não há nenhum mecanismo de dissipação da energia.

Exemplo 1 do MHS: pêndulo simples.

Um pêndulo simples consiste de um corpo pontual com massa *m* suspenso por um fio leve e inextensível de comprimento *L* (figura 1.6).

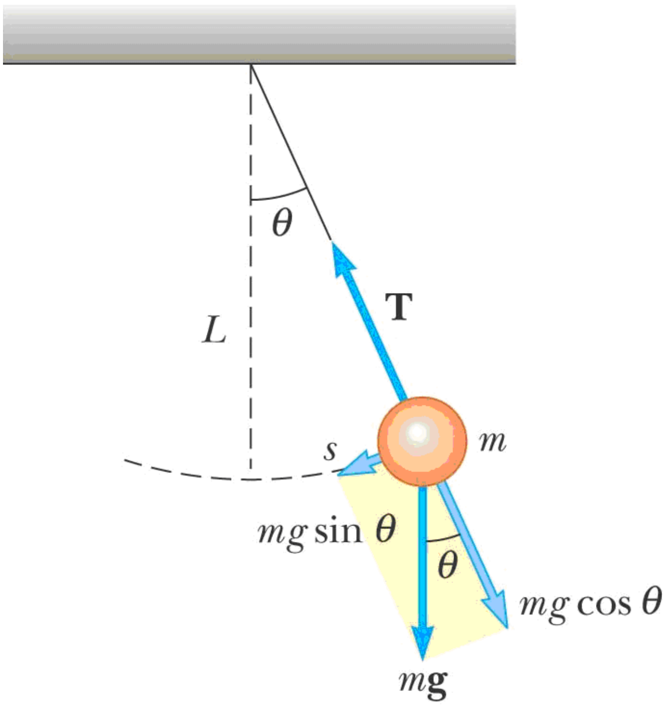


Figura 1.6: Ilustração de movimento de um pêndulo simples e das forças que atuam sobre o corpo em um ponto arbitrário da trajetória, descrito pelo ângulo θ.

Quando o pêndulo é deslocado da sua posição de equilíbrio, ele oscila sob a ação da força do seu peso, apresentando um movimento periódico. O parâmetro que define a posição do pêndulo é o ângulo θ, que é o ângulo que o fio faz com a vertical. Para que possamos descrever o movimento do pêndulo, precisamos saber como este ângulo muda em função do tempo, i.e., precisamos determinar a função $\theta(t)$. A posição de equilíbrio é obviamente definida por θ=0.

Estudaremos o movimento do pêndulo ao longo das direções radial e tangencial. Na ausência do atrito do ar (que pode ser desprezado), as forças que agem sobre o corpo são apenas duas: seu peso, *mg*, vertical para baixo, e a tração do fio T de direção radial e sentido indicado na figura 1.6. Na direção radial a força T é equilibrada com o componente do peso $mg\cos\theta$, e, portanto não há movimento. Na direção tangencial a componente do peso $mg\sin\theta$ sempre age na direção de $\theta = 0$, contrária ao deslocamento. Podemos identificar esta força, então, como força restauradora. A segunda lei de Newton resulta em:

$$ma_t = -mg\sin\theta \qquad (1.18)$$

onde $a_t = \dfrac{d^2s}{dt^2}$, e s é o arco circular percorrido pelo corpo. Quando o ângulo θ é pequeno, a relação entre ele e o arco é muito simples: $s = L\theta$. Portanto, $a_t = L\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$, e (1.18) se transforma em:

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

ou:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta \tag{1.19}$$

A equação (1.19) não é a equação do tipo (1.4), que define o MHS, portanto devemos concluir que o movimento que executa o pêndulo simples não é MHS! Porém, desenvolvendo o $\sin\theta$ em série de Taylor, temos:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$$

Se o ângulo θ fosse pequeno ($\leq 5^o$), podemos cortar a expansão e aproximar $\sin\theta \approx \theta$. Neste caso, a equação diferencial (1.19) se torna em:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \tag{1.20}$$

que é exatamente a forma da equação que determina o MHS. Portanto, o pêndulo simples executa o MHS somente para ângulos muito pequenos! Nesse caso, podemos escrever a solução da equação (1.20), usando analogia com equação (1.5):

$$\theta(t) = \theta_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \tag{1.21}$$

onde a frequência do movimento é:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{1.22}$$

e o período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{1.23}$$

As equações (1.21)-(1.23) descrevem o MHS que executa pêndulo simples. A fórmula (1.21) determina o ângulo θ (elongação) para qualquer instante t, enquanto as fórmulas (1.22) e (1.23) nos dizem que a frequência e o período do movimento não dependem nem da massa do corpo nem da amplitude, mas somente do comprimento de pêndulo. A amplitude θ_{max} e a diferença de fase φ, porém, dependem das condições iniciais do movimento.

Exemplo 2 do MHS: o pêndulo físico.

O pêndulo físico é um corpo rígido que gira sem atrito em torno de qualquer ponto O que não esteja o seu centro de massa (figura 1.7).

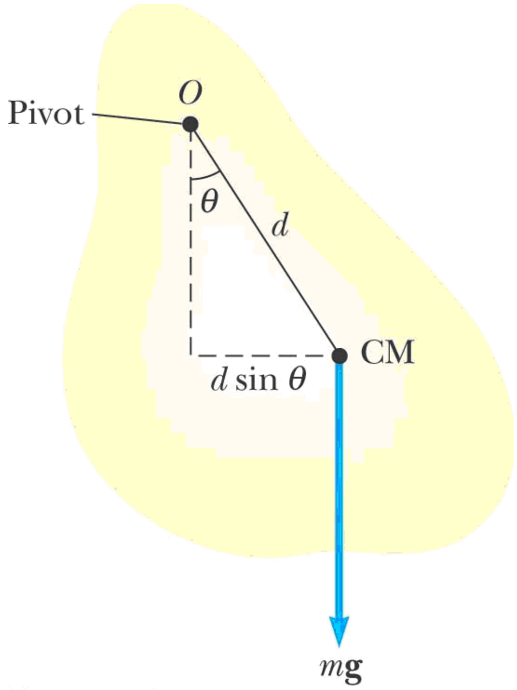


Figura 1.7: Ilustração de movimento de um pêndulo físico e das forças que atuam sobre o corpo em um ponto arbitrário de trajetória, descrito por ângulo θ.

O movimento de um corpo rígido pode ser descrito em termos do movimento do seu centro de massa (CM na figura 1.7), cuja distância a partir do ponto O é d. A componente tangencial do peso do corpo que atua na direção tangencial, sempre direcionada para o ponto de equilíbrio ($\theta = 0$), pode ser identificada como a força restauradora. Aplicando a segunda lei de Newton na direção tangencial, temos:

$$I\alpha = \tau \tag{1.24}$$

onde I é o momento da inércia do corpo rígido (em relação ao eixo que passa pelo ponto O), $\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ é a aceleração angular, e $\tau = -mgd\sin\theta$ é o torque resultante provocado pela força tangencial $-mg\sin\theta$. Portanto, a equação (1.24) se transforma em:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\sin\theta \tag{1.25}$$

Similarmente, como no caso do pêndulo simples, essa equação não é do tipo da equação (1.4), e, portanto o pêndulo físico, em geral, não realiza o MHS. Mas, para ângulos θ bem pequenos, $\sin\theta \approx \theta$, e equação do movimento muda para:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta \qquad (1.26)$$

Essa equação já tem a forma que define o MHS. Comparando ela com equação (1.4) e a sua solução (1.5), chegamos à conclusão de que o ângulo θ varia com o tempo de acordo com a fórmula:

$$\theta(t) = \theta_{máx}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1.27)$$

com frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad (1.28)$$

e com período

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (1.29)$$

Mas lembre-se sempre, as últimas fórmulas são válidas somente quando as oscilações do corpo são bem pequenas!

1.2 Oscilações amortecidas

Um oscilador harmônico que executa o MHS oscilará eternamente com a mesma amplitude, pois nunca perderá nenhuma parte da sua energia mecânica. Você têm que admitir que essa situação não é muito realística. No mundo real sempre existe algum atrito que causa dissipação da energia, diminuição gradual da amplitude, e afinal acaba com as oscilações. Portanto, a equação do movimento (1.2), que define o MHS, não é completa. Para que possamos descrever a situação real, temos que adicionar mais uma força ao sistema: a força de atrito! A equação do movimento de tal oscilador real em uma dimensão (ao longo de direção x) é:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt} \qquad (1.30)$$

O primeiro termo no lado direito é a nossa conhecida força restauradora. O segundo termo representa a força do atrito, que é proporcional à velocidade do objeto (nem sempre isso é verdade, mas frequentemente é uma aproximação bem razoável). A constante λ descreve rigidez da força do atrito, e o sinal menos significa que a força sempre se opõe ao movimento. A equação (1.30) descreve o movimento de um **oscilador amortecido**, cuja solução é:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\lambda}{2m}t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (1.31)$$

onde $x(t)$ é a elongação, e $Ae^{-\frac{\lambda}{2m}t}$ é a amplitude de oscilação. Veja que a amplitude não é constante, mas diminui com tempo com a taxa proporcional a λ, que é a constante que define o **amortecimento** do sistema (figura 1.8). A frequência angular das oscilações amortecidas:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2} \qquad (1.32)$$

é menor do que a frequência das oscilações harmônicas (i.e., MHS):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

que a partir de agora chamaremos de **frequência natural** de oscilação do objeto (pois depende somente da massa e da rigidez da força elástica, e não depende das condições externas, como, por exemplo, atrito).

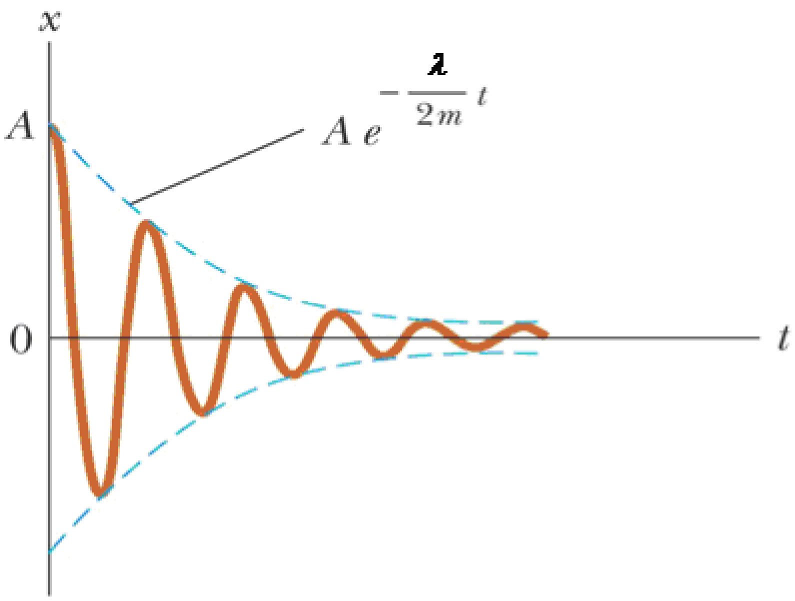


Figura 1.8: Elongação de um objeto que executa oscilações amortecidas em função do tempo. A amplitude decai exponencialmente, e depois algum tempo o movimento se encerra.

A frequência de oscilação ω de um oscilador amortecido depende da sua frequência natural ω_0, bem como da relação entre essa frequência e o amortecimento λ. Analisando a fórmula (1.32), podemos concluir que ω pode atingir o valor zero quando:

$$\omega_0^2 - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2} = 0$$

i.e., com a condição de:

$$\lambda = 2\sqrt{km} \tag{1.33}$$

A partir da fórmula (1.33), podemos distinguir três situações diferentes.

1.) Quando $\lambda < 2\sqrt{km}$ acontece um amortecimento subcrítico, ou **sub-amortecimento.** Objeto realiza várias oscilações com frequência ω determinada pela fórmula (1.32)**.** A amplitude de oscilação diminui exponencialmente, como é mostrado na figura 1.8.

2.) Quando $\lambda = 2\sqrt{km}$ e $\omega = 0$ acontece o **amortecimento crítico**. O objeto deslocado do equilíbrio retorna para o último sem oscilar!

3.) Quando $\lambda > 2\sqrt{km}$, acontece um **super-amortecimento**. O objeto deslocado do equilíbrio retorna para o último ainda mais lentamente do que no caso do amortecimento crítico.

As três situações são representadas na figura 1.9.

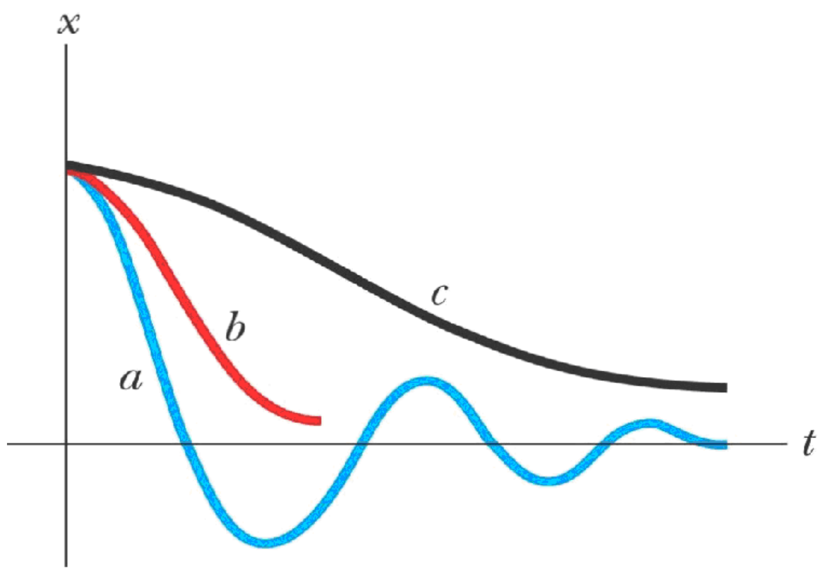


Figura 1.9: Elongação de um objeto que executa oscilações amortecidas, em função do tempo. (a) oscilações sub-amortecidas, (b) oscilações com amortecimento crítico e (c) oscilações com super-amortecimento. Nos casos (b) e (c) não existe nenhuma frequência angular associada ao movimento.

A energia mecânica de um oscilador amortecido não se conserva durante o tempo, como no caso de um oscilador harmônico (MHS). A taxa da perda dessa energia pode ser avaliada a partir do seguinte cálculo.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{(energia total = energia cinética + energia potencial)} \tag{1.34}$$

Diferenciando a expressão acima pelo tempo, segue:

$$\frac{dE}{dt} = mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = mva + kxv = v(ma + kx) \tag{1.35}$$

Sabendo que a equação de movimento do oscilador amortecido é:

$$ma = -kx - \lambda v \qquad \Rightarrow \qquad ma + kx = -\lambda v$$

e substituindo última expressão em (1.35), chegamos à seguinte fórmula:

$$\frac{dE}{dt} = -\lambda v^2 \tag{1.36}$$

A fórmula (1.36) descreve a taxa da perda de energia mecânica E, e expressa o fato de que a energia do oscilador amortecido constantemente diminui, qualquer que esteja sua velocidade, positiva ou negativa!

Muitos exemplos de oscilações amortecidas encontram-se no nosso dia-dia. Às vezes, elas não são desejadas (não queremos que as vibrações das cordas do violão ou diapasão sejam amortecidas). Às vezes, elas são indispensáveis, como no exemplo do amortecedor de um carro.

1.3 Oscilações forçadas e o fenômeno da ressonância

Se um oscilador amortecido é deixado livre, ele vai parar de oscilar depois de algum tempo devido à dissipação da sua energia mecânica. Porém, é possível compensar a perda dessa energia aplicando uma força externa, i.e., fazendo acoplamento do oscilador a um sistema que lhe forneça energia. Você já deve ter passado pela experiência de empurrar um balanço com algum primo seu sentado nele. No início o balanço não responde de forma satisfatória (tem que se fazer muita força), mas após certo intervalo de tempo o balanço começa a oscilar da forma desejada, e você tem que aplicar somente uma força pequena de vez em quando para manter a amplitude de oscilação. Na verdade, você aplicou uma força externa periódica à balança, transformando-a em um oscilador forçado!

Em geral, um oscilador forçado é definido como um oscilador real (amortecido), impulsionado por uma força externa periódica, que pode ser descrita por:

$$F(t) = F_0 \sin \omega t \tag{1.37}$$

O movimento desse sistema é determinado pela seguinte equação diferencial (segunda lei de Newton):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt} + F_0 \sin\omega t \tag{1.38}$$

O primeiro termo no lado direito representa a força restauradora (elástica), o segundo termo descreve a força do atrito (que amortece as oscilações), e o terceiro termo é a força externa periódica que bombeia periodicamente a energia para o sistema, com uma frequência angular ω. O sinal positivo da força periódica significa que esta força sempre age em favor do movimento, e não se opõe a ele. A solução da equação (1.38):

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{1.39}$$

determina a elongação do oscilador forçado em função do tempo, cuja forma matemática nos revela imediatamente dois fatos importantes.

(1) O objeto oscila com a mesma frequência ω da força externa. Esse fato ocorre no regime estacionário do movimento, após algum tempo inicial necessário para que esse regime seja alcançado.

(2) A amplitude de oscilação é constante (não muda com tempo como no caso das oscilações amortecidas). Esse fato permite que oscilações forçadas possam ser consideradas em termos de movimento harmônico simples. Porém, neste caso a magnitude de amplitude depende de muitos outros fatores:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\lambda\omega/m\right)^2}} \tag{1.40}$$

i.e., da amplitude da força externa, da massa, da frequência natural do oscilador e do amortecimento, como pode ser visto a partir da fórmula (1.40). O fato mais interessante que esta fórmula revela é a possibilidade de que a amplitude A das oscilações seja tremendamente aumentada sob determinadas condições. Veja bem o que aconteceria se a frequência ω da força externa fosse próxima à frequência natural ω_0 do oscilador e o amortecimento λ do sistema fosse pequeno. Nesse caso o denominador da fórmula (1.40) torna-se muito pequeno e, consequentemente, a amplitude A torna-se muito grande! Digamos que a força externa entrou em ressonância com oscilador, aumentando espetacularmente a amplitude das suas oscilações. O efeito se chama simplesmente **ressonância**.

Representação gráfica da equação (1.40) é mostrada na figura 1.10. O aumento significativo de amplitude ocorre somente quando a frequência da força externa está próxima da frequência natural do oscilador. A forma da curva $A(\omega)$ depende da magnitude de amortecimento do sistema λ. Ela se torna mais larga a medida que o amortecimento aumenta.

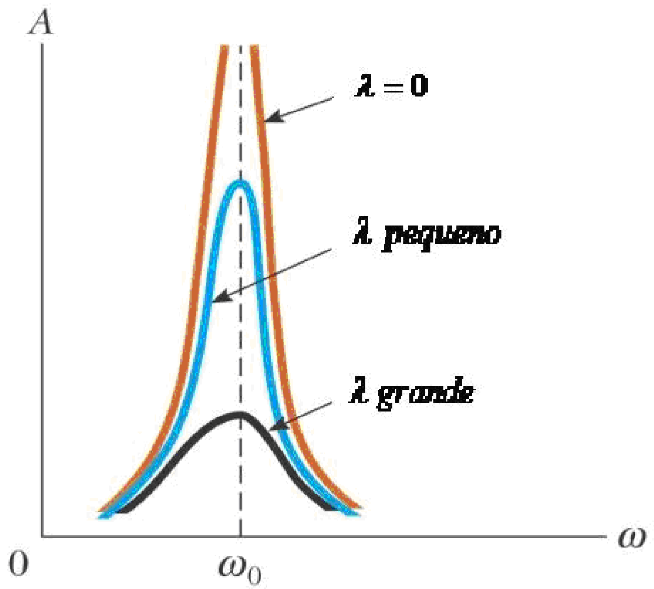


Figura 1.10: Amplitude das oscilações forçadas em função da frequência da força externa.

O fenômeno da ressonância tem muitas implicações na nossa vida cotidiana. Aqui nós vamos mencionar somente dois exemplos, mas você deve se lembrar de muitos outros.

Exemplo 1: terremotos

Quando ocorre um terremoto, o que causa a destruição das casas, prédios, estradas, pontes e outras estruturas feitas por homem? Exatamente a ressonância. Quando a terra começa a vibrar, ela força as estruturas a vibrarem também com a mesma frequência. A força da terra comporta-se como uma força periódica externa aplicada a um oscilador real (prédio, por exemplo). Se a força da terra tivesse uma frequência próxima a frequência natural do prédio, o prédio começaria vibrar com amplitude tão alta que a estrutura não aguentaria: o prédio iria desabar! Por causa disso, a estrutura de casas e, especialmente, prédios não pode ter frequência natural perto da frequência da vibração da terra no terremoto (que é aproximadamente 1-15 Hz). Além disso, é preciso incorporar amortecimento suficiente nessas estruturas, pois o grande amortecimento causa diminuição da amplitude de oscilação. Projetando as casas e prédios, os arquitetos e engenheiros têm que levar em conta seriamente esses fatos!

Exemplo 2: pontes

Você já sabia que os soldados são proibidos de desfilar em marcha sobre as pontes? Você sabe qual é a razão? De novo por causa do efeito da ressonância! Em 1831 uma ponte na Inglaterra caiu enquanto um regimento de soldados marchava em cima dela. A frequência da marcha era próxima da frequência natural da vibração da ponte. Ainda mais famoso é o exemplo da queda da ponte "Tacoma" nos Estados Unidos no ano de 1940. A queda foi provocada por um vento forte que causou turbulências e vórtices de ar com frequência próxima a frequência natural da vibração da ponte (veja a Fig. 1.1).

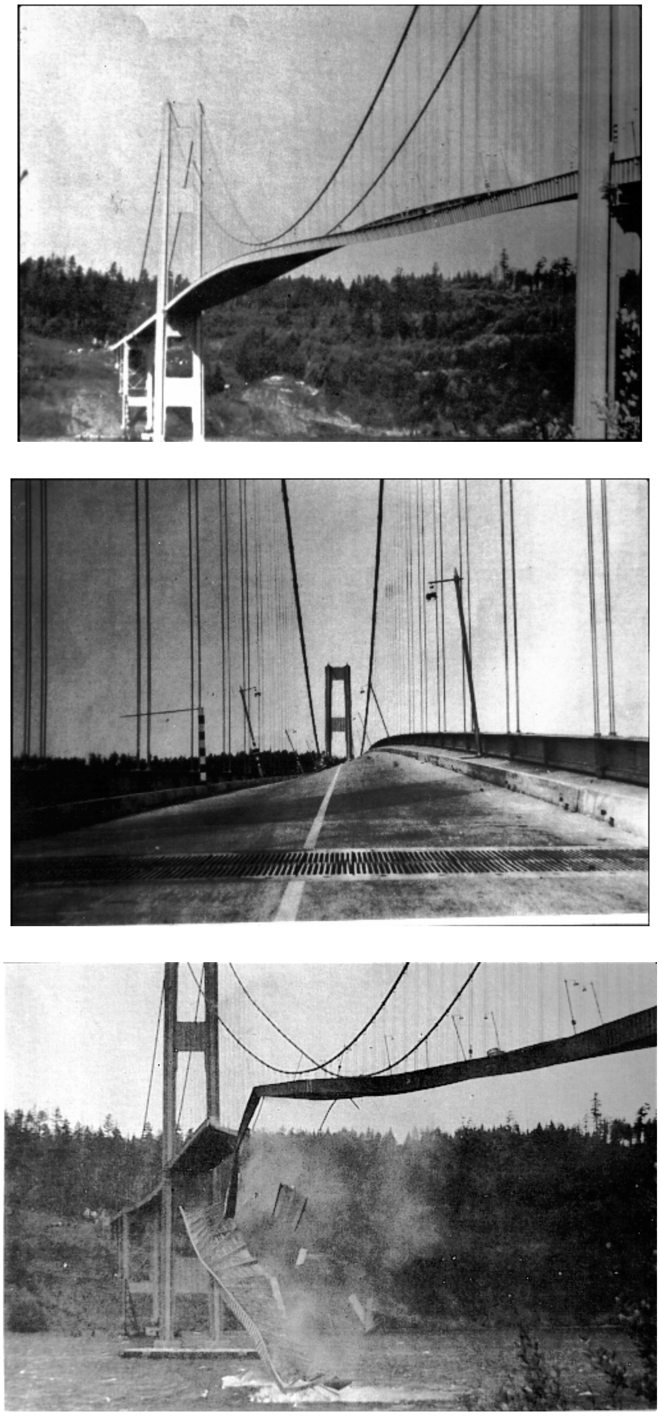


Figura 1.11: O colapso da ponte "Tacoma Narrows" nos Estados Unidos provocada pelos ventos fortes. Fonte: http://www.enm.bris.ac.uk.

Se estiver interessado, você pode achar na internet os vídeos da queda dessa ponte. Basta entrar no "Google" ou outro navegador, colocar "*Tacoma bridge*" (ponte Tacoma em inglês), pressionar a tecla "*Enter*", que vai sair muita coisa!

Bibliografia consultada

Alonso, M. S. e Finn, E. J., *Física*, Ed. Edgard Blucher Editora, São Paulo, 1999.

Young, H. D. e Freedman, R. A. *Física II - Termodinâmica e Ondas*, Pearson Education do Brasil (qualquer edição).

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. *Fundamentos de Física 2- Gravitação, Ondas e Termodinâmica,* Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (qualquer edição).

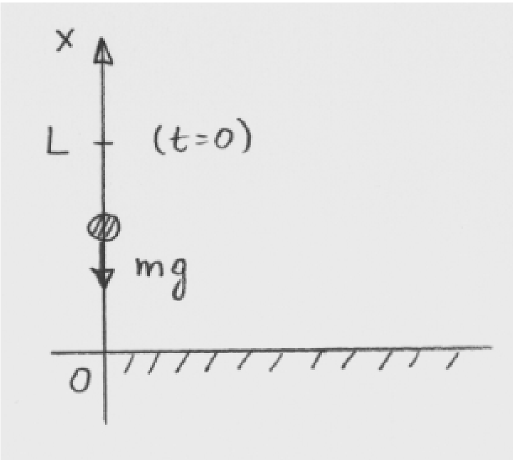
EXERCÍCIOS

Descrição matemática do movimento harmônico simples

1. Um arqueiro puxa a corda de seu arco para trás 0,400 m exercendo uma força na corda que aumenta uniformemente de zero a 230 N. (a) Qual é a constante de força equivalente do arco? (b) Quanto trabalho o arqueiro realiza ao puxar o arco?

2. Deixa-se cair uma bola de uma altura de 4,00 m. Ela faz uma colisão perfeitamente elástica com o solo. Supondo que nenhuma energia é perdida devido à resistência do ar, (a) demonstre que o movimento que se segue é periódico, (b) determine o período do movimento. (c) O movimento é harmônico simples? Explique.

Resposta



(a) No começo (t=0), a energia mecânica total da bola é a sua energia potencial mgL. Quando a bola cai e toca no chão (x=0), essa energia é completamente transformada em energia cinética. Depois da colisão, quando a bola começa subir, essa energia cinética é de novo transformada em energia potencial. Qual altura a bola vai atingir? A mesma do começo, L, pois não há nenhuma perda de energia total, e a bola vai parar quando toda energia cinética se transformar em energia potencial mgL! Então, a bola vai cair da altura L e depois da colisão com chão voltará a essa mesma altura. O processo vai se repetir infinitamente, i.e., o movimento é periódico!

(b) O período T do movimento é o tempo que a bola precisa para cair e voltar a altura L. Como o tempo de caída da bola (t_c) é igual ao tempo de subida (t_s), $T = 2 \cdot t_c$. Aplicando segunda lei de Newton para obter equação do movimento, segue:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \qquad \text{(E1)}$$

Integrando duas vezes essa equação:

$$m\frac{dx}{dt} = -mgt + c_1 \qquad \text{(E2)}$$

$$mx = -\frac{1}{2}mgt^2 + c_1t + c_2 \qquad \text{(E3)}$$

As constantes c_1 e c_2 podem ser determinadas a partir das condições iniciais: $t = 0$ $\Rightarrow$ $x = L$, $v \equiv dx/dt = 0$: $c_1 = 0$ e $mL = c_2$. Portanto, E3 se transforma em:

$$mx = -\frac{1}{2}mgt^2 + mL \quad \text{i.e.,}$$

$$x(t) = L - \frac{1}{2}gt^2$$

Agora, quando $t = t_c$, $x = 0$:

$$x(t_c) = 0 = L - \frac{1}{2}gt_c^2$$

$$\Rightarrow \quad t_c = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{2L}{g}} \qquad \text{i.e.,} \qquad T = \sqrt{\frac{8L}{g}}$$

Como $L = 4{,}00\,\text{m}$ e $g = 9.81\,m/s^2$, o período do movimento é $T = 1.81\,\text{s}$.

(c) O movimento não é MHS, pois não existe força restauradora (equação E1.1 não tem a forma da equação que determina MHS).

3. A posição de uma partícula é dada pela expressão $x = (4{,}00\,\text{m})\cos(3{,}00\,\pi t + \pi)$, onde x está em metros e t em segundos. Determine (a) a frequência e o período do movimento, (b) a amplitude do movimento, (c) a constante da fase e (d) a posição da partícula em $t = 0{,}250\,s$.

Resposta

Comparando a posição da partícula com a expressão geral (1.5): $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, podemos concluir que: $A = 4.00\,\text{m}$, $\omega = 3\pi$ rad/s e $\varphi = \pi$ rad. Portanto:

(a) $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{3\pi\, rad/s}{2\pi\, rad} = 1.5\,\text{Hz}$; $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{1.5\,s^{-1}} = 0.67\,s$

(b) $A = 4.00\,\text{m}$

(c) $\varphi = \pi$ rad

(d) $x(t=0.250\,s)=(4.00\,m)\cos(3\pi\cdot 0.250+\pi)=(4.00\,m)\cos(\frac{7}{4}\pi)=2.83\,m$

4. Uma partícula realiza um movimento harmônico simples com uma frequência de 3,00 Hz e uma amplitude de 5,00 cm. (a) Qual é a distância total que a partícula percorre durante um ciclo de seu movimento? (b) Qual a sua velocidade máxima? Onde ela ocorre? (c) Encontre a aceleração máxima da partícula. Em que ponto do movimento ocorre a aceleração máxima?

Resposta

(a) $4\times 5.0\,\text{cm}=20.0\,\text{cm}$

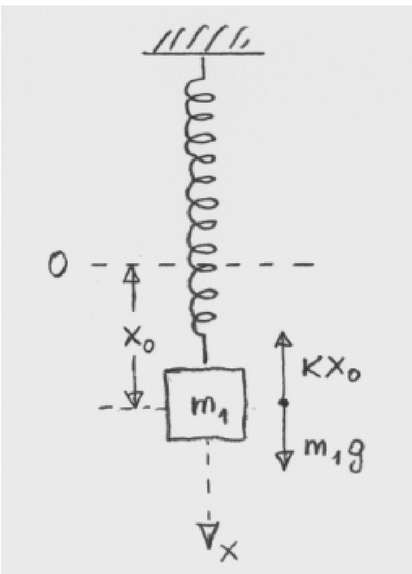
(b) $v_{\max}=\omega\cdot A=2\pi f\cdot A=2\cdot 3{,}14\,rad\cdot 3{,}00\frac{1}{s}\cdot 0{,}05\,m=0{,}94\frac{m}{s}$; ocorre na posição de equilíbrio.

(c) $a_{\max}=\omega^2 A=(2\pi f)^2\cdot A=17{,}75\ \frac{m}{s^2}$; ocorre nos pontos extremos

5. Em um motor, um pistão oscila com movimento harmônico simples de maneira que sua posição varie de acordo com a expressão $x=(5{,}00\text{ cm})\cos(2t+\pi/6)$, em que x está em centímetros e t em segundos. Em t = 0 encontre (a) a posição da partícula, (b) sua velocidade, e (c) sua aceleração. (d) Encontre o período e a amplitude do movimento.

6. Uma mola estica 3,90 cm quando um corpo de 10,0 g é pendurado nela em repouso. Se esse corpo for substituído por um corpo de 25,0 g colocado em movimento harmônico simples, calcule o período do movimento.

Resposta



Para calcular o período $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{m_2}{k}}$, onde $m_2=0{,}025\,kg$, precisamos encontrar a constante da mola k. Isso pode ser feito a partir da condição de equilíbrio da mola: a força do peso do corpo (atuando para baixo) se iguala a força restauradora, que atua para cima. Então:

$$m_1 g=kx_0 \quad\Rightarrow$$

$$k=\frac{m_1 g}{x_0}=\frac{0{,}010\,kg\cdot 9{,}81\,m/s^2}{0{,}039\,m}=2{,}51\ \frac{kg}{s^2}$$

Portanto: $$T = 2\cdot 3{,}14\cdot\sqrt{\frac{0{,}025\,kg}{2{,}51\,kg/s^2}} = 0{,}63\,s$$

7. Uma partícula que se move ao longo do eixo x em movimento harmônico simples parte de sua posição do equilíbrio, a origem, em t = 0 e move-se para a direita. A amplitude de seu movimento é 2,00 cm e a frequência é 1,50 Hz (a) Demonstre que a posição da partícula é dada por $x = (2{,}00\text{ cm})\text{sen}(3{,}00\pi t)$. Determine (b) a velocidade máxima e o primeiro instante (t> 0) no qual a partícula tem esta velocidade, (c) a aceleração máxima e o primeiro instante (t> 0) em que a partícula tem esta aceleração, e (d) a distância total percorrida entre t = 0 e t = 1,00 s.

8. Um corpo de 7,00 kg é pendurado da extremidade inferior de uma mola vertical presa a um suporte acima dela. O corpo é posto em oscilações verticais que têm um período de 2,60 s. Encontre a constante da força da mola.

9. A posição inicial e a velocidade inicial de um corpo realizando um movimento harmônico simples são x_i, v_i, e a_i; a frequência angular da oscilação é ω. (a) Demonstre que a posição e a velocidade do corpo para qualquer tempo podem ser escritas como

$$x(t) = x_i\cos\omega t + \left(\frac{v_i}{\omega}\right)\text{sen}\,\omega\text{t}$$
$$v(t) = -x_i\omega\,\text{sen}\,\omega\text{t} + \text{v}_i\cos\omega t$$

(**Dica**: em vez de considerar a elongação na forma $x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$ e procurar constantes A e φ, considere a elongação na forma $x(t) = A\cos(\omega t) + B\text{sen}(\omega t)$ e procure as constantes A e B a partir das condições iniciais do movimento. As duas formas da elongação são equivalentes, i.e., a segunda forma também é solução da equação 1.4 que define o MHS.)

(b) Se a amplitude do movimento for A, demonstre que

$$v^2 - ax = v_i^2 - a_i x_i = \omega^2 A^2$$

(**Dica**: neste caso use a primeira forma matemática de elongação do MHS).

Energia no movimento harmônico simples

10. Um automóvel que tem uma massa de 1000 kg é dirigido contra uma parede de tijolo em um teste de segurança. O amortecedor se comporta como uma mola com constante de $5{,}00\times 10^6$ N/m e se comprime 3,16 cm enquanto o carro atinge o repouso. Qual era a velocidade do carro antes do impacto supondo que a energia mecânica do carro se mantém constante durante o impacto contra a parede?

Resposta

Antes do impacto, o carro tinha energia $E_1 = \frac{1}{2}mv^2$, que é somente energia cinética. Depois do impacto, quando atinge o repouso, a energia do carro é somente potencial, com magnitude $E_2 = \frac{1}{2}kx_0^2$, onde x_0 é $3{,}16\,cm$. Como a energia mecânica se manteve durante o impacto, $E_1 = E_2$ e, portanto: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \Rightarrow$

$v = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x_0 = 2,23\frac{m}{s}$

11. Um bloco de massa desconhecida é unido a uma mola com uma constante de força de 6,50 N/m e realiza movimento harmônico simples com uma amplitude de 10,0 cm. Quando o bloco está no meio do caminho entre sua posição do equilíbrio e o ponto final, sua velocidade medida é de 30,0 cm/s. Calcule (a) a massa do bloco, (b) o período do movimento e (c) a aceleração máxima do bloco.

Resposta

Energia total do oscilador é: $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 6,5\frac{N}{m} \cdot (0,10\,m)^2 = 0,0325\,J$. Essa energia permanece constante durante o movimento. Quando a posição do oscilador é de $x_0 = 5,00\,cm$, sua velocidade é de $v_0 = 30\frac{cm}{s}$ e sua energia total é, claro, $E = 0,0325\,J$. Então:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

e resolvendo essa equação por m, achamos que massa do bloco é $m = 0,542\,kg$.

(b) $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 1,81\,s$

(c) $a_{\max} = \omega^2 A = \frac{k}{m}A = 1,20\frac{m}{s^2}$

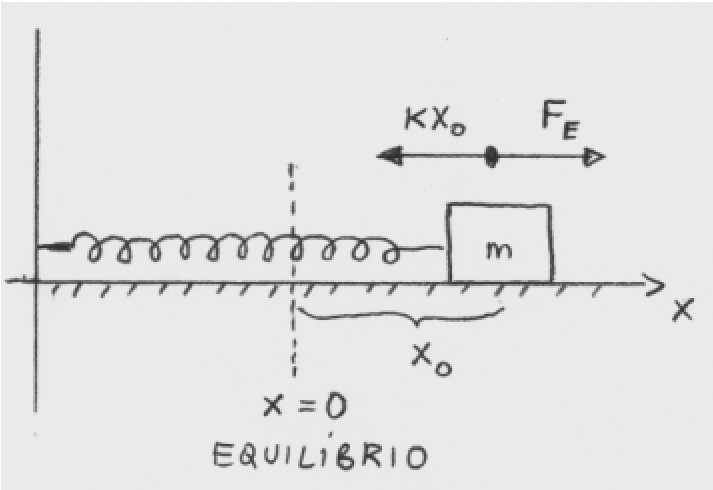
12. Um bloco de 200 g está unido a uma mola horizontal e executa o movimento harmônico simples em uma superfície sem atrito com um período de 0,250 s. Se a energia total do sistema é de 2,00 J, encontre (a) a constante de força da mola e (b) a amplitude do movimento.

13. Um sistema mola-bloco oscila com uma amplitude de 3,50 cm. Se a constante de força é 250 N/m e a massa é 0,500 kg, determine (a) a energia mecânica do sistema, (b) a velocidade máxima do bloco e (c) a aceleração máxima.

14. Um bloco de 50,0 g conectado a uma mola com uma constante de força de 35,0 N/m oscila sobre uma superfície horizontal sem atrito com uma amplitude de 4,00 cm. Encontre (a) a energia total do sistema e (b) a velocidade do bloco quando o deslocamento é de 1,00 cm. Encontre (c) a energia cinética e (d) a energia potencial quando o deslocamento é de 3,00 cm.

15. Um bloco de 2,00 kg é unido a uma mola e colocado em uma superfície horizontal lisa. Uma força horizontal de 20,0 N é necessária para manter o bloco em repouso quando é puxado 0,200 m de sua posição de equilíbrio. O bloco é liberado agora do repouso a partir deste ponto e realiza subsequentemente um movimento harmônico simples. Encontre (a) a constante de força da mola, (b) a frequência das oscilações e (c) a velocidade máxima do bloco. Onde ocorre essa velocidade máxima? (d) Encontre a aceleração máxima do bloco. Onde ela ocorre? (e) Encontre a energia total do sistema oscilante. Encontre (f) a velocidade e (g) a aceleração quando a posição se iguala a um terço do valor máximo.

Resposta



A situação inicial é mostrada na figura do lado. Como o sistema está em repouso, há equilíbrio entre as forças atuando no bloco: a força externa (F_E) se iguala a força restauradora (kx_0). Como o bloco é liberado a partir deste ponto, a distância x_0 será igual à amplitude A do movimento harmônico simples.

(a) $F_E = kx_0 \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{F_E}{x_0} = \dfrac{20,0\,N}{0,2\,m} = 100,0\dfrac{N}{m}$

(b) $\omega = 2\pi f = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 1,13\,Hz$

(c) $v_{\max} = \omega A = 2\pi f \cdot A = 2 \cdot 3,14 \cdot 1,13\,s^{-1} \cdot 0,2\,m = 1,42\dfrac{m}{s}$; ocorre no ponto $x = 0$.

(d) $a_{\max} = \omega^2 \cdot A = (2\pi f)^2 \cdot A = 10,07\dfrac{m}{s^2}$; ocorre nos pontos extremos $x = \pm A$.

(e) $E = \dfrac{1}{2}kA^2 = 2,00\,J$

(f) A posição é: $x = \dfrac{A}{3} = 0,067\,m$; nesta posição a soma das energias potencial e cinética do bloco é igual a energia total:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} = 1{,}33\frac{m}{s}$$

(g) Na posição $x = \frac{A}{3}$ o bloco sente a força cuja intensidade é $|F| = kx = k\frac{A}{3}$. Pela segunda lei de Newton, a aceleração do bloco nesta posição é:

$$a = \frac{|F|}{m} = \frac{kA}{3m} = \frac{100\frac{N}{m}\cdot 0{,}2\,m}{3\cdot 2{,}0\,kg} = 3{,}33\frac{m}{s^2}$$

Pêndulo simples e físico

16. Um pêndulo simples tem uma massa de 0,250 kg e um comprimento de 1,00 m. Ele é deslocado por um ângulo de 15,0° e então liberado. Calcule (a) a velocidade máxima, (b) a aceleração angular máxima e (c) a força restauradora máxima.

Resposta

Vamos considerar que o movimento do pêndulo seja o MHS (embora o ângulo inicial não seja muito pequeno). Nesse caso, o ângulo que o fio do pêndulo faz com a vertical muda com tempo da seguinte maneira:

$$\theta(t) = \theta_{\max}\cos(\omega t)$$

onde o $\theta_{\max} = 15^0$ e a constante de fase é zero (porque quando $t = 0$, $\theta = \theta_{\max}$).

(a) A relação entre a velocidade linear (v) e a velocidade angular (Ω) é a seguinte: $v = L\cdot\Omega = L\cdot\frac{d\theta}{dt} = -L\cdot\omega\theta_{\max}\mathrm{sen}(\omega t)$. Portanto, a velocidade máxima é: $v_{\max} = L\omega\theta_{\max}$. Para calcular essa velocidade, sabemos que a frequência angular do pêndulo é $\omega = \sqrt{g/L}$, e precisamos expressar $\theta_{\max}$ em radianos. O último pode ser feito a partir da regra de três: 180^0 corresponde ao π radianos, então 15^0 corresponde a x radianos. Portanto: $\frac{180^0}{\pi} = \frac{15^0}{x} \Rightarrow x = \frac{15^0}{180^0}\cdot\pi$, i.e., $\theta_{\max} = 0{,}26\,rad$. Agora temos todos os ingredientes para calcular a velocidade máxima:

$$v_{\max} = L\cdot\sqrt{\frac{g}{L}}\cdot\theta_{\max} = \sqrt{g\cdot L}\cdot\theta_{\max} = \sqrt{9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot 1{,}00\,m}\cdot 0{,}26 = 0{,}81\frac{m}{s}$$

(b) A aceleração angular é: $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta_{\max}\cos(\omega t)$. A aceleração máxima é, portanto: $\alpha_{\max} = \omega^2\theta_{\max} = \frac{g}{L}\,\theta_{\max} = 2{,}55\,\frac{rad}{s^2}$.

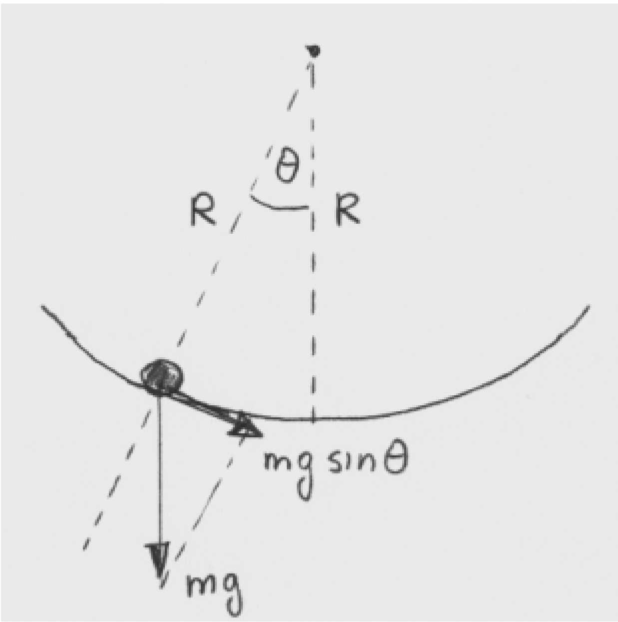
(c) A força restauradora é igual a: $F = mg\text{sen}(\theta) \approx mg\theta$, para ângulos θ pequenos. Portanto, a força máxima é:

$$F_{\max} = mg\theta_{\max} = 0,250\,kg \cdot 9,81\frac{m}{s^2} \cdot 0,26\,rad = 0,64\,N\,.$$

17. A posição angular de um pêndulo simples é representada pela equação $\theta = (0,320\,\text{rad})\cos\omega t$, onde θ está em radianos e ω = 4,43 rad/s. Determine o período e o comprimento do pêndulo.

18. Uma partícula de massa *m* desliza sem atrito dentro de uma cavidade hemisférica de raio *R*. Demonstre que se a partícula parte do repouso com um pequeno deslocamento da posição de equilíbrio, ela se move em movimento harmônico simples com frequência angular igual à de um pêndulo simples de comprimento R (isto é, $\omega = \sqrt{g/R}$).

Resposta



A única força que atua na partícula é o seu peso mg. O movimento ocorre na direção tangencial da curva da cavidade. Projetando a força do peso nessa direção, podemos aplicar a segunda lei de Newton:

$$ma_t = -mg\,\text{sen}(\theta)$$

onde $a_t = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$ é aceleração tangencial, definida como segunda derivada temporal do arco circular s percorrido pela partícula. Como $s = R \cdot \theta \quad \Rightarrow \quad a_t = R\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$, e a equação do movimento fica: $R\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -g\,\text{sen}(\theta)$, i.e. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{R}sen(\theta)$. Para o θ pequeno, $sen(\theta) \approx \theta$, e a equação se torna a equação que define MHS, com frequência angular $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$.

19. Um pêndulo físico na forma de corpo plano realiza movimento harmônico simples com uma frequência de 0,450 Hz. Se o pêndulo tem uma massa de 2,20 kg e o pivô está localizado a 0,350 m do centro de massa, determine o momento da inércia do pêndulo ao redor do pivô.

Oscilações amortecidas

20. Um pêndulo com um comprimento de 1,00 m é liberado de um ângulo inicial de 15,0°. Após 1000 s, sua amplitude foi reduzida pelo atrito a 5,50°. Qual é o valor de $\lambda/2m$?

<u>Resposta</u>

Amplitude diminui com tempo da seguinte maneira: $A(t) = A(0) \cdot e^{-\frac{\lambda}{2m}t}$.

$\Rightarrow\ e^{-\frac{\lambda}{2m}t} = \dfrac{A(t)}{A(0)}$, i.e. $\dfrac{\lambda}{2m}t = -\ln\left[\dfrac{A(t)}{A(0)}\right] \ \Rightarrow\ \dfrac{\lambda}{2m} = \dfrac{1}{t}\ln\left[\dfrac{A(0)}{A(t)}\right]$

Como $t = 1000\,s$, $A(0) = 15^0$ e $A(t = 1000s) = 5,5^0 \ \Rightarrow\ \dfrac{\lambda}{2m} = 0,001 s^{-1}$

Oscilações forçadas

21. Um corpo de 2,00 kg unido a uma mola é impulsionado por uma força externa dada por $F = (3,00\,N)\cos(2\pi t)$. Se a constante de força da mola é 20,0 N/m, determine (a) o período e (b) a amplitude do movimento. (Dica: suponha que não existe amortecimento, isto é, que $\lambda = 0$).

<u>Resposta</u>

A força externa tem forma $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. Portanto, a amplitude da força é $F_0 = 3,00N$ e a sua frequência angular é $\omega = 2\pi\, rad/s$.

(a) A frequência angular do corpo é igual à frequência angular da força externa. O período é: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi\, rad}{2\pi\, rad/s} = 1,00\, s$

(b) A amplitude é: $A = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\dfrac{\lambda\omega}{m}\right)^2}}$. Sabendo que a frequência natural do oscilador é $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m} = \dfrac{20\,N/m}{2,00\,kg} = 10,00\left(\dfrac{rad}{s}\right)^2$, e que a $\lambda = 0$, todos os parâmetros na fórmula da amplitude ficam conhecidos.

22. O amortecimento é desprezível para um corpo de 0,150 kg pendurado em uma mola leve de 6,30 N/m. O sistema é impulsionado por uma força oscilante com uma amplitude de 1,70 N. Em que frequência a força fará a massa vibrar com uma amplitude de 0,440 m?

Resumo da aula

Movimento que se repete em intervalos de tempo iguais é chamado de **periódico**. **Movimento oscilatório** é o movimento periódico que se realiza em torno de uma posição de equilíbrio. **Movimento harmônico simples (MHS)** é um movimento oscilatório que é descrito em termos de funções harmônicas, i.e., o deslocamento, a velocidade e a aceleração do objeto que executa o MHS são funções senoidais do tempo.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

A força que causa o MHS se chama força restauradora e tem forma: $F = -kx$

A frequência angular, a frequência e o período em MHS dependem somente da massa do objeto m e da constante da mola k:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

A energia total no MHS se conserva e pode ser expressa em termos da constante da mola e da amplitude:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \equiv \frac{1}{2}kA^2$$

O deslocamento de um **oscilador amortecido** tem a seguinte forma:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\lambda}{2m}t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Sua frequência angular $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2}$ é diferente da frequência natural $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
A amplitude das oscilações diminui com tempo, com uma taxa que depende do amortecimento do sistema λ. A energia do sistema se dissipa, diminuindo com a taxa $\frac{dE}{dt} = -\lambda v^2$.

Um oscilador real (amortecido), impulsionado por uma força externa periódica $F(t) = F_0 \sin \omega t$ executa **oscilações forçadas**. O deslocamento do objeto é:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

onde a frequência angular do movimento ω é igual à frequência angular da força externa. A amplitude das oscilações forçadas é dada pela fórmula:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\lambda\omega/m\right)^2}}$$

Quando a frequência ω da força externa se aproxima a frequência natural ω_0 do oscilador, e o amortecimento λ do sistema for pequeno, ocorre um fenômeno chamado **ressonância**: a amplitude das oscilações aumenta espetacularmente, mesmo aplicando uma força externa modesta.

Conclusão

Nessa aula apreendemos a reconhecer, descrever e analisar o movimento oscilatório. Este tipo de movimento ocorre frequentemente na natureza e é bastante utilizado em nosso dia-dia. Ele também está intimamente conectado com o movimento ondulatório, como veremos nas próximas aulas.

Informações sobre a próxima aula

Na próxima aula começaremos a estudar as características do movimento ondulatório. Investigaremos como se propaga uma onda mecânica através de um meio material. Veremos que o movimento oscilatório está intimamente conectado com o movimento ondulatório, pois as partículas do meio realizam oscilações durante a passagem de uma onda. Então, aprenda bem o material dessa aula, pois vamos usá-lo durante todo curso!