Aula 2

PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DO MOVIMENTO ONDULATÓRIO

META

Introduzir aos alunos conceitos básicos do movimento ondulatório

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá:
Explicar o que é uma onda mecânica.
Interpretar e usar uma descrição matemática para uma onda harmônica.
Interrelacionar frequência, comprimento de onda e velocidade de uma onda mecânica.
Entender conceitos de transferência da energia e a potência carregada por uma onda harmônica.
Identificar a equação geral da onda.
Generalizar o conceito matemático de onda no espaço de duas ou três dimensões.

PRÉ-REQUISITO

Trigonometria básica; cálculo diferencial básico; mecânica.

Introdução

Nosso Universo consiste de **matéria** e **radiação,** que são dois grandes conceitos da física moderna. Estes dois conceitos são bastante diferentes, pelo menos na física clássica. A matéria se descreve em termos das **partículas,** sugerindo uma grande concentração de energia no espaço. A radiação se descreve em termos de **ondas,** sugerindo justamente o oposto, ou seja, uma grande distribuição de energia no espaço por onde ela passa.

O movimento ondulatório é um movimento específico e bem diferente dos movimentos de objetos (i.e., partículas). Vamos considerar o exemplo de jogar uma pedra na água e observar movimento de uma folha na superfície. A folha se move para cima e para baixo, mas não altera sua posição na superfície. A conclusão é a seguinte: a pedra provocou uma ondulação que se move, mas a água não é carregada com esse movimento! Esta é uma grande característica do movimento ondulatório: ele não transporta matéria, somente energia e momento!

Podemos então definir o movimento ondulatório como **propagação de uma perturbação pelo espaço**. No caso das **ondas mecânicas**, necessita-se um meio para que as ondas possam se propagar. Ondas no lago se propagam através da água, ondas sonoras através do ar ou material sólido, ondas elásticas através da haste e as ondas sísmicas através da terra. No caso das **ondas eletromagnéticas** não é necessário nenhum meio de propagação. Trata-se de uma perturbação eletromagnética que pode se propagar tanto pelos meios quanto pelo espaço vazio (vácuo).

Nessa e nas próximas três aulas estudaremos as ondas mecânicas, mas na sexta aula veremos que a sua descrição matemática é utilizada também no caso das ondas eletromagnéticas.

2.1 Propagação das ondas mecânicas

Para que uma onda mecânica possa se propagar, tem que existir:

1) fonte da perturbação,
2) meio que possa ser perturbado, e
3) algum mecanismo físico pelo qual as partículas do meio possam influenciar umas às outras.

Dependendo de como a perturbação do meio ocorre, podemos classificar as ondas mecânicas em dois tipos **ondas transversais** e **ondas longitudinais**. Ondas transversais são aquelas nas quais a perturbação é perpendicular à direção de propagação. Um exemplo é mostrado na Figura 2.1. Balançando de uma vez a extremidade livre de uma corda com outra extremidade fixa, um único pulso é formado propagando-se à direita. Vê-se que os segmentos da corda oscilam em direção normal em relação à direção de propagação do pulso. A forma do pulso praticamente não muda durante o movimento.

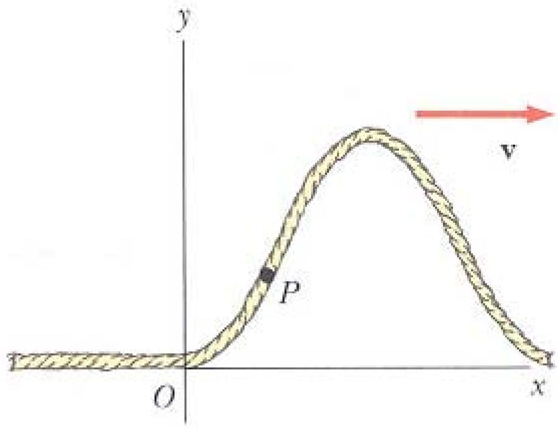


Figura 2.1: Um pulso se propagando ao longo de eixo x enquanto os segmentos da corda (ponto P, por exemplo) oscilam ao longo de eixo y: exemplo de uma onda transversal.

As ondas longitudinais apresentam a perturbação na mesma direção da propagação (Figura 2.2). As ondas acústicas são exemplos de ondas longitudinais (as moléculas do gás, do líquido ou do sólido através do qual a onda se propaga oscilam para frente e para trás).

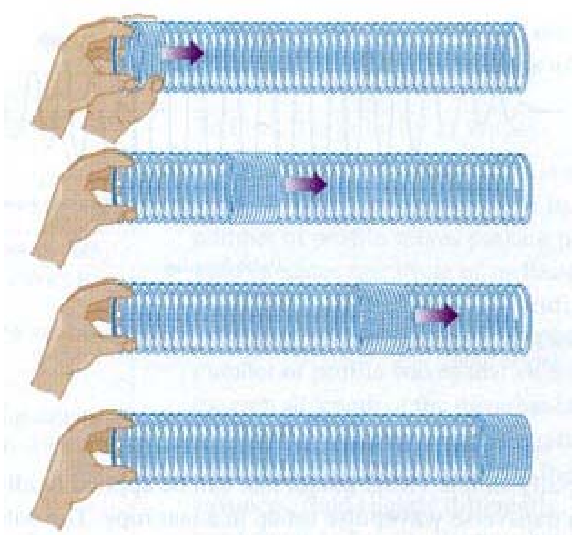


Figura 2.2: Um exemplo de onda longitudinal.

2.2 Descrição matemática do movimento ondulatório

Consideraremos primeiro um pulso discreto que se desloca ao longo de eixo x com velocidade v (Figura 2.3). Vamos supor que no tempo $t = 0$ o pulso seja descrito por uma função no espaço na forma $y(x,t=0) = f(x)$. A função $y(x,t)$ descreve o deslocamento vertical do elemento do meio (elongação) situado na posição x no instante t (trata-se, então, de uma onda transversal). Depois de um intervalo de tempo t o pulso se deslocou para a direita na distância vt. Supondo que o pulso permaneceu com a mesma forma, a descrição matemática na sua nova posição deve ser a mesma como na posição anterior. Isso significa que $y(x,t) = y(x - vt, 0)$. Caso o pulso se deslocasse para a esquerda, a descrição matemática seria $y(x,t) = y(x + vt, 0)$!

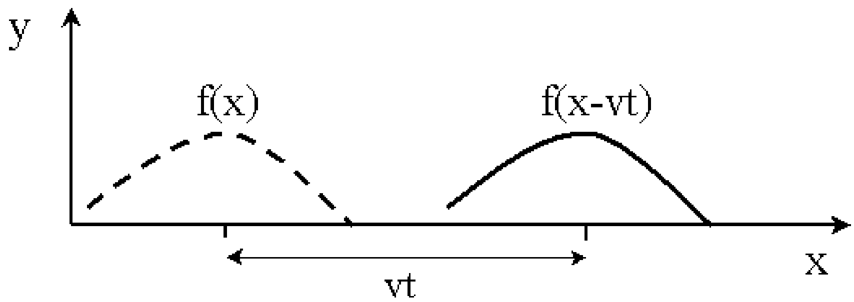


Figura 2.3: Deslocamento de um pulso discreto para a direita, com velocidade v.

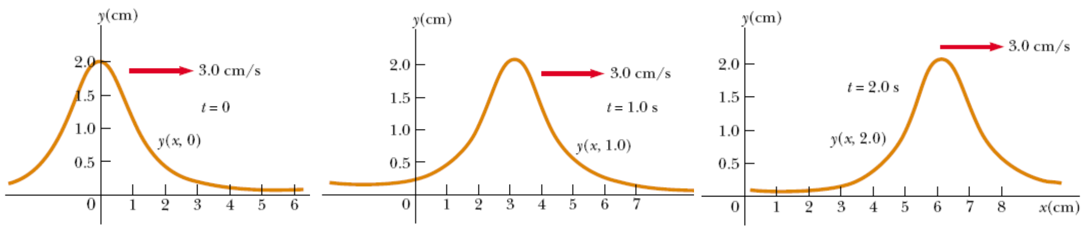
A função $y(x,t)$ descreve a forma e a posição de pulso durante todo seu movimento. Chamaremos essa função de **função de onda**. Ela depende de duas variáveis: variável espacial (x) e variável do tempo (t). Mas estas duas variáveis não são acopladas de qualquer maneira! Já vimos que y deve depender da combinação $x \pm vt$! Tendo esse fato em vista, podemos definir a forma matemática da função da onda que descreve movimento ondulatório de qualquer perturbação, sob condição de que a forma da perturbação não mude durante o movimento:

$$y(x,t) = f(x - vt) \quad \text{movimento ondulatório para a direita (x crescente)}$$
$$y(x,t) = f(x + vt) \quad \text{movimento ondulatório para a esquerda (x decrescente)} \qquad (2.1)$$

Fixando a posição da onda (x_0), $y(x_0, t)$ descreve movimento do elemento do meio situado em $x = x_0$ como função de tempo t. Quando se fixa o tempo (t_0), $y(x, t_0)$ descreve a forma da onda em todo espaço no instante t_0.

Exemplo

Vamos considerar uma função $y(x,t) = \dfrac{2,0}{(x - 3,0 \cdot t)^2 + 1}$, onde x e y são expressos em cm e t em segundos. Como a função tem forma $f(x - vt)$, podemos concluir que ela descreve movimento ondulatório de um pulso. Podemos também concluir que o movimento ocorre para direita, com velocidade $v = 3,0$ cm/s. O valor máximo do pulso (o pico) ocorre sempre quando $x - 3,0 \cdot t = 0$. O movimento do pulso é representado na ilustração abaixo para três instantes: $t = 0,1$ e 2 segundos. Em $t = 0s$ o pico do pulso é centrado em cima do ponto $x = 0$. Em $t = 1s$ o pico e centrado em cima de ponto $x = 3cm$, i.e., o pulso avançou para direita em três metros. Passando mais um segundo, o pulso se moveu por mais três metros, tendo seu pico centrado em cima de ponto $x = 6cm$.



$t = 0s$ $\qquad$ $t = 1s$ $\qquad$ $t = 2s$

$$y(x,0) = \frac{2,0}{x^2 + 1} \qquad y(x,1) = \frac{2,0}{(x-3,0)^2 + 1} \qquad y(x,2) = \frac{2,0}{(x-6,0)^2 + 1}$$

Agora estamos preparados para analisar o movimento de uma onda contínua. Ela pode ser produzida, por exemplo, se algum oscilador balança continuamente a extremidade livre de uma corda com outra extremidade fixa (Figura 2.4).

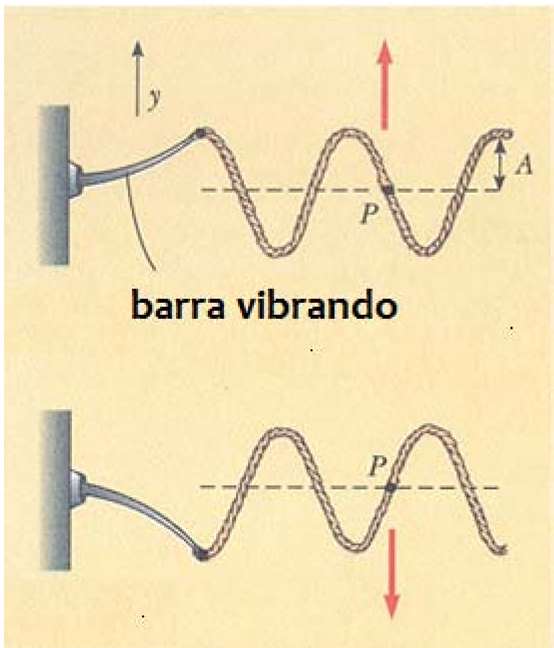


Figura 2.4: Uma barra produz vibrações na extremidade livre de uma corda, provocando uma onda contínua transversal que se propaga para o lado fixo da corda.

Se o oscilador executa o movimento harmônico simples, então cada elemento da corda (ponto P na figura 2.4) movimenta-se verticalmente em MHS. A onda produzida é periódica e chama-se **onda harmônica,** pois sua forma matemática pode ser representada pelas funções harmônicas simples: seno e (ou) cosseno.

- **Características de uma onda harmônica**

A onda harmônica é uma onda mais simples para se descrever matematicamente. Ela pode ser analisada em termos de algumas características importantes, que estão listadas abaixo.

Amplitude (A) é o deslocamento máximo de um segmento do meio em relação a sua posição de equilíbrio (definido quando não há onda).

Comprimento de onda (λ) se define como distância mínima entre quaisquer dois pontos do meio que se encontram em movimento idêntico (com a mesma elongação e no mesmo ciclo do movimento). É mais fácil determinar como a distância entre duas cristas ou dois vales adjacentes (figura 2.5).

O período (T) da onda se define como o tempo mínimo para que um segmento do meio realize uma oscilação completa. Outra definição frequentemente usada é que o T é o tempo que a onda precisa para se deslocar na distância igual a um comprimento de onda.

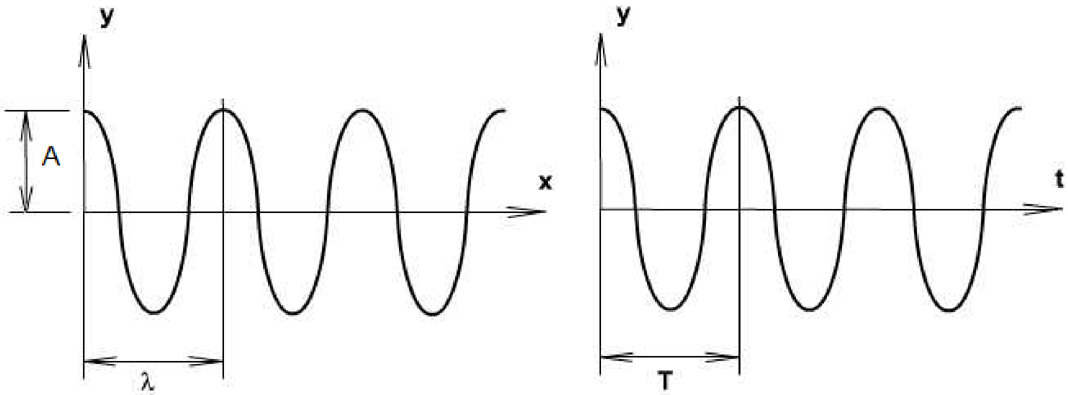


Figura 2.5: O comprimento de onda descreve periodicidade espacial da onda $y(x)$ em qualquer instante t fixo, enquanto o período caracteriza a periodicidade temporal $y(t)$ de uma onda harmônica.

Frequência da onda (f) é o inverso do período $f = 1/T$. Descreve o número de oscilações completas que um segmento do meio executa em um segundo.

Velocidade de propagação da onda (v) é a velocidade de propagação da perturbação no meio. Ela depende das propriedades do meio, enquanto as outras características ondulatórias dependem da fonte que produz a onda.

Onda harmônica é realmente uma idealização teórica. Ela possui uma única frequência (bem definida) e não é localizada no espaço (propaga-se em princípio pelo todo Universo). Ondas reais, ao contrário, não se estendem infinitamente e usualmente contêm uma mistura de frequências. São mais complicadas de se descrever matematicamente. Porém, mostra-se que qualquer onda real possa ser descrita em termos da mistura (combinação linear) das ondas harmônicas (teorema de Fourier). Esse fato justifica a atenção que daremos às ondas harmônicas.

Vamos então descrever a onda harmônica através da linguagem matemática, i.e., usando uma fórmula. Vamos considerar uma onda transversal supondo que ela se mova ao longo de eixo x, na direção de x crescente. Em $t=0$ a elongação em um ponto arbitrário x deve ter a seguinte forma:

$$y(x,0) = A\sin(\frac{2\pi}{\lambda}x)$$

já que sabemos que o valor da elongação (y) deve se repetir quando $x=\lambda, 2\lambda, 3\lambda ....$ Também sabemos que y deve depender do argumento $x-vt$, pois o movimento é ondulatório e ocorre na direção de x crescente (veja condições (2.1)):

$$y(x,t) = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right] \tag{2.2}$$

O tempo que a onda precisa para se deslocar a distância λ é o período T. Então, a velocidade da onda é:

$$v = \frac{\lambda}{T} \tag{2.3}$$

e a função da onda obtém a seguinte forma:

$$y(x,t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \tag{2.4}$$

O argumento da função seno na fórmula (2.4) contém dois termos. O primeiro descreve a periodicidade da onda no espaço: para qualquer instante fixo t, o y tem os mesmos valores nas posições $x, x+\lambda, x+2\lambda, ...$ O segundo termo expressa a periodicidade temporal da onda: em qualquer posição fixa x, o y tem os mesmos valores nos instantes $t, t+T, t+2T, ...$ Fixando a posição de qualquer segmento do meio ($x = x_0$), a fórmula (2.4) se transforma em:

$$y(x_0,t) = A\text{sen}\left[\frac{2\pi x_0}{\lambda} - 2\pi v t\right] = A\text{sen}(const - \omega t)$$

demonstrando que o segmento executa o movimento harmônico simples (pois é descrito como $y(t) = (amplitude) * \sin(\omega t + \varphi)$, que é a representação matemática do MHS). Essa conclusão é completamente geral: <u>as partículas do meio através do qual se propaga uma onda harmônica executam o MHS durante a passagem da onda.</u> E o mesmo vale tanto para onda harmônica transversal quanto para onda harmônica longitudinal.

Definindo uma nova quantidade física, **número de onda angular:**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2.5}$$

e substituindo em (2.4): $2\pi/T = 2\pi f = \omega$, chegamos a fórmula matemática final que descreve a propagação de uma onda harmônica transversal através de qualquer meio:

$$\boxed{y(x,t) = A\mathrm{sen}(kx \pm \omega t + \varphi)} \tag{2.6}$$

onde o sinal $+$ descreve a situação quando a onda se propaga no sentido de x decrescente (para esquerda), o sinal $-$ descreve movimento no sentido de x crescente (para direita) e φ é a **constante de fase** que permite que a elongação y em $x = 0$ e $t = 0$ possa ter um valor não igual a zero. A função da onda (2.6) descreve o afastamento transversal y de qualquer ponto x do meio em relação ao equilíbrio (chamada elongação) como função do tempo t. A mesma fórmula é usada para descrever uma onda harmônica longitudinal, mas neste caso o $y(x,t)$ descreve o afastamento longitudinal (ao longo de eixo x) em relação à posição de equilíbrio, para qualquer instante t. Conhecendo a função da onda, podemos facilmente determinar a velocidade e a aceleração de qualquer pedaço do meio que se move sob ação de uma onda harmônica:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \pm \omega A \cos(kx \pm \omega t + \varphi) \tag{2.7}$$

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mp \omega^2 A \sin(kx \pm \omega t + \varphi) \tag{2.8}$$

Não se confunda: estas não são a velocidade e a aceleração da onda! Por isso foi introduzido o subscrito y!

Combinando as fórmulas acima, podemos deduzir algumas relações úteis, que usaremos mais para frente.

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda/2\pi}{T/2\pi} = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega}{k} \tag{2.9}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad \Rightarrow \quad v = \lambda \cdot f \tag{2.10}$$

2.3 Energia e potência carregada por uma onda

Já foi dito que a onda mecânica é uma perturbação que se propaga através de um meio. Essa perturbação é provocada por alguma fonte que fornece uma energia local. Logo, devido à propagação, essa energia passa de um ponto a outro no espaço. A energia por unidade de tempo carregada por uma onda, ou potência, pode ser mais facilmente calculada no caso de ondas em cordas. Suponha que tomemos um elemento de corda com massa $dm = \mu dx$, onde μ é a massa linear da corda (massa por unidade de comprimento) e dx é comprimento infinitesimal desse elemento. Se pela corda passar uma onda harmônica, $y = A\text{sen}(kx - \omega t)$, então nosso elemento vibrará para cima e para baixo executando um movimento harmônico simples com energia cinética dada por $dK = 1/2\, dm \cdot v_y^{\,2}$, onde v_y é a velocidade do elemento na direção vertical. Essa velocidade pode ser calculada usando-se a equação:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\cos(kx - \omega t)$$

de modo que

$$dK = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)\cdot dx$$

Fixando um instante $t = 0$, essa energia passa a ser:

$$dK = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2 kx \cdot dx$$

Agora podemos calcular a energia cinética contida em tal comprimento da corda que corresponde a um comprimento da onda:

$$K_\lambda = \int_0^\lambda dK = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx)dx$$

A integral acima pode ser entendida como uma média de todos os elementos da corda ao longo de um comprimento de onda, ou, equivalentemente, ao longo de um período da onda. Ela é calculada facilmente usando a seguinte transformação trigonométrica:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

Com isso:

$$\int_0^\lambda \cos^2(kx)dx = \frac{1}{2}\lambda$$

e

$$K_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda \qquad (2.11)$$

A onda não carrega apenas energia cinética. Quando os átomos da corda se deslocam em relação à posição de equilíbrio, eles estão sob a atuação de forças restauradoras (a tensão, no caso da corda), que estão associadas às energias potenciais. Logo, a onda também carrega energia potencial. Pode-se mostrar que o valor médio da energia potencial é igual ao valor médio da energia cinética. Isto parece razoável, já que as duas energias se revezam, uma se transformando na outra, ao longo da propagação (afinal, cada elemento da corda executa o MHS). Como a energia total é a soma das energias cinética e potencial, chegamos à conclusão de que a energia total contida em um comprimento da onda é:

$$E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda \qquad (2.12)$$

Dito equivalente, essa quantidade da energia passa por um determinado ponto da corda durante um período de oscilação. A potência, ou taxa de transferência da energia no movimento ondulatório é:

$$P = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1/2\,\mu\omega^2 A^2 \lambda}{T} \qquad (2.13)$$

onde T é o período. Como $\lambda/T = v$ (velocidade de propagação da onda pela corda), o resultado final é:

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \qquad (2.14)$$

Os resultados (2.12) e (2.14) mostram que a energia e a potência carregadas por uma onda são proporcionais ao quadrado da frequência e ao quadrado da amplitude das oscilações.

Mais uma quantidade física é muito usada para descrever a transferência de energia de uma onda: intensidade. **Intensidade** de uma onda se define como potência média carregada pela onda por unidade de área perpendicular à direção de propagação.

$$I = \frac{\langle P \rangle}{S} \qquad (2.15)$$

A unidade da intensidade é W/m^2. Por exemplo, se a fonte da onda fosse puntiforme, que emite uniformemente em todas as direções, a intensidade a uma distância r seria calculada como potência média emitida pela fonte, dividida pela área da esfera com raio r:

$$I = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2} \qquad (2.16)$$

i.e., neste caso a intensidade de uma onda varia com o inverso do quadrado da distância. Combinando a fórmula (2.16) com a fórmula (2.14) vemos que a intensidade de uma onda harmônica é proporcional ao quadrado de amplitude e ao quadrado da frequência da onda, bem como no caso da energia e potência carregada pela onda. Essa conclusão não é restrita somente para ondas que se propagam em cordas, mas se estende para qualquer tipo da onda mecânica (seja transversal ou longitudinal) que se propaga através de qualquer tipo de meio.

2.4 Reflexão e transmissão das ondas

Até agora estudamos somente as ondas que se propagam através do mesmo meio e na mesma direção. Mas, o que acontece quando uma onda encontra a fronteira de um meio? Neste caso, ela pode ser ou totalmente refletida, voltando inteiramente para o meio inicial, ou pode ser parcialmente refletida, caso em que uma parte da onda volta para o meio inicial e a outra parte é transmitida, continuando a se propagar pelo outro meio.

Vamos primeiro considerar a situação de reflexão total. Na figura 2.6 vemos uma onda em uma corda incidindo sobre uma parede, em que possui uma extremidade presa. A corda na parte da onda que chega à parede exerce uma força para cima sobre a mesma. Pela terceira lei de Newton, a parede exerce uma força igual e para baixo sobre a corda, invertendo a amplitude da onda, e enviando para trás um pulso igual e invertido.

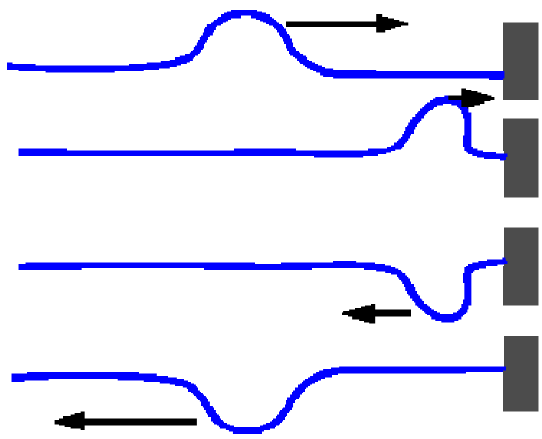


Figura 2.6: Reflexão de um pulso ondulatório na extremidade fixa de uma corda.

Se a corda não estiver presa à parede, o pulso retorna a partir do extremo aberto, mas não há inversão do mesmo, pois não existe força exercida neste extremo. Isso é mostrado na figura 2.7.

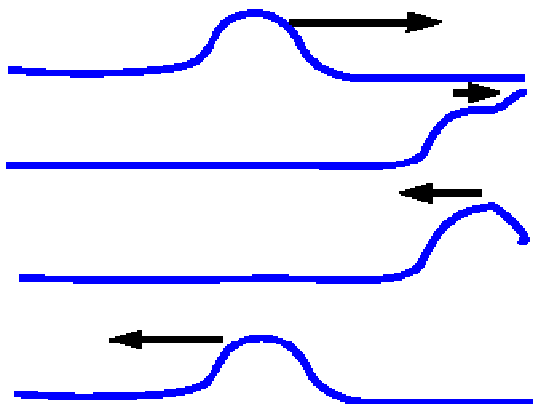


Figura 2.7: Reflexão de um pulso ondulatório na extremidade livre de uma corda.

Quando a onda passa de um meio a outro, uma parte da mesma é refletida enquanto que outra parte é transmitida (figura 2.8). A onda refletida pode interferir com a onda incidente resultando numa forma de interferência, que será estudada mais adiante.

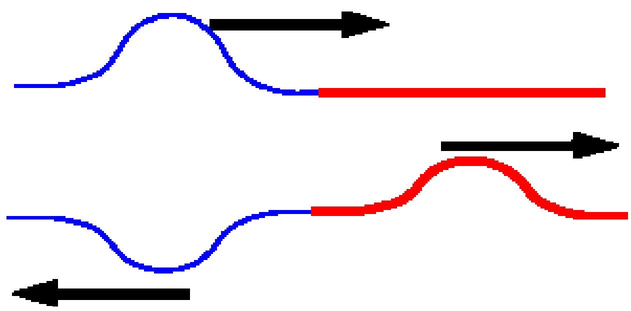


Figura 2.8: Onda passando de um meio para outro é parcialmente refletida e parcialmente transmitida.

2.5 Equação geral do movimento ondulatório

Você já aprendeu na disciplina mecânica como descrever o movimento de qualquer partícula com massa m, quaisquer que sejam as forças F que atuam sobre ela: tem que resolver a equação diferencial $ma = F$ definida pela segunda lei de Newton.

Analogamente, mostra-se que existe uma equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.17}$$

cuja solução geral é função:

$$y(x,t) = Af\,(x - vt) + Bf\,(x + vt) \tag{2.18}$$

que descreve qualquer movimento ondulatório que se propaga com velocidade v e sem distorção ao longo de eixo x (direita ou esquerda). A e B são constantes de integração, e a função y é uma superposição de dois movimentos ondulatórios nas direções opostas. A equação (2.9) chama-se **equação de onda**.

Atividade

Demonstre que as seguintes funções:

1. $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$

2. $y(x,t) = \dfrac{2{,}0}{(x - 3{,}0 \cdot t)^2 + 1}$

são soluções da equação da onda.

2.6 Ondas em duas e três dimensões

Quando se descreve movimento ondulatório em duas ou três dimensões, é útil usar conceitos de **raios** e **frentes** de onda. É comum adotar a notação **raio** para a direção em que a onda se propaga, enquanto a **frente de onda** descreve lugar geométrico de pontos nos quais a onda exibe a mesma elongação (usualmente se escolhem os pontos nos quais a elongação da onda é máxima ou zero). Vamos considerar, por exemplo, ondas em um tanque de água. Como vemos na figura 2.9, os raios estão em orientações diferentes no espaço, dependendo da direção de observação da onda. Os máximos de onda (amplitudes) formam lugares comuns, que são círculos concêntricos. Estes círculos são chamados de frentes de onda. O espaçamento entre quaisquer duas frentes de onda é o mesmo, e é claramente igual a um comprimento de onda λ.

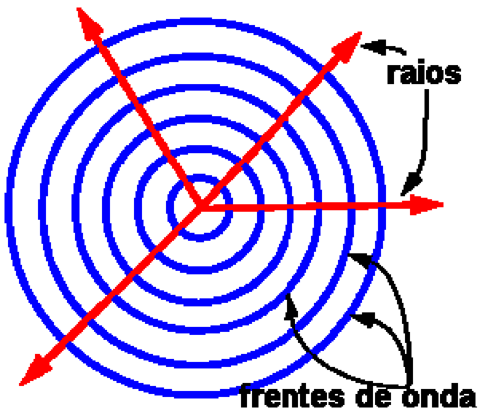


Figura 2.9: Raios e frentes de uma onda bi-dimensional, originada de uma fonte pontual.

Situação especialmente simples ocorre quando todos os raios são perpendiculares às frentes de onda (veja figura 2.10). Isto acontece com as ondas de água, por exemplo, quando se está observando a onda a uma distância muito grande da sua origem (fonte). Estas ondas são conhecidas como **ondas planas**. Qualquer tipo da onda observada de muito longe da sua fonte pode ser aproximada para uma onda plana.

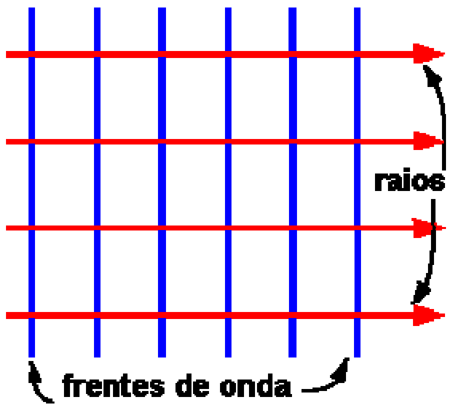


Figura 2.10: Representação gráfica de uma onda plana.

Vamos agora generalizar a descrição matemática das ondas, considerando que elas possam se propagar no espaço com duas ou três dimensões. Já aprendemos que a função $\xi(x,t) = f(x - vt)$ descreve o movimento ondulatório ao longo de eixo x com uma velocidade v. Vamos agora perguntar o seguinte: o que representa essa função se o movimento ondulatório ocorresse em três dimensões?

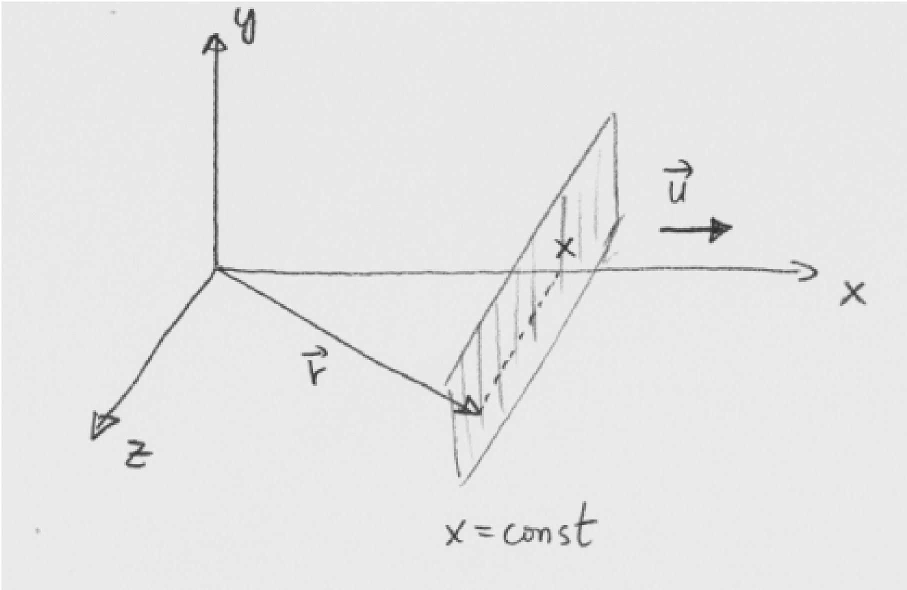


Figura 2.11: Representação gráfica da frente da onda propagando-se ao longo de eixo x no espaço 3D.

A figura 2.11 mostra que a função ξ tem o mesmo valor para qualquer ponto no espaço com a mesma coordenada x, i.e., no plano $x = const$ (que é o plano perpendicular ao eixo x). Então, $f(x - vt)$, em um gráfico em três dimensões, representa uma fronteira das ondas que se propagam ao longo de eixo x. Agora, se a direção do eixo x for determinada pelo vetor unitário $\vec{u}$, qualquer vetor posição $\vec{r}$ que termine no plano $x = const$ tem projeção igual $x = \vec{u} \cdot \vec{r}$ (veja a figura 2.11). Portanto, a função de onda pode ser descrita na seguinte forma:

$$\xi(\vec{r}, t) = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt) \tag{2.19}$$

Esta forma geral descreve o movimento ondulatório no espaço bi- ou tri-dimensional ao longo de uma direção arbitrária determinada pelo vetor unitário $\vec{u}$.

No caso especial de ondas harmônicas, a função da onda é:

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \text{sen}(\vec{k}\vec{r} - \omega \text{t}) \tag{2.20}$$

O vetor $\vec{k} \equiv k\vec{u}$ se chama **vetor de onda.** Ele contém duas informações extremamente úteis sobre a onda: (1) a direção da propagação, e (2) o comprimento de onda $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$. A função de onda harmônica pode ser reescrita na forma:

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \text{sen}(\vec{k}\vec{r} - \omega \text{t}) = \xi_0 \text{sen}(\text{k}_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$$

onde k_i são componentes do vetor da onda, obedecendo a relação:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 / v^2$$

Além de ondas cuja frente é um plano, existem ondas cilíndricas, esféricas e outras, cujas frentes possuem outro tipo de geometria: cilindro, esfera etc. A forma da frente de onda permanece inalterada durante o movimento se o meio for **isotrópico** (com as mesmas características ao longo de qualquer direção). Nos meios **anisotrópicos** a velocidade de propagação da onda é diferente em direções diferentes, fato que causa distorção da forma da frente de onda.

Bibliografia consultada

Alonso, M. S. e Finn, E. J. *Física*, Ed. Edgard Blucher Editora, São Paulo, 1999.

Young, H. D. e Freedman, R. A. *Física II - Termodinâmica e Ondas*, Pearson Education do Brasil (qualquer edição).

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. *Fundamentos de Física 2- Gravitação, Ondas e Termodinâmica,* Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (qualquer edição).

EXERCÍCIOS

Propagação de uma perturbação

1. Em t = 0, um pulso ondulatório transversal em um fio é descrito pela função:

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

onde x e J estão em metros. Escreva a função *y(x, t)* que descreve essa onda se ela estiver se deslocando no sentido positivo de x com uma velocidade de 4,50 m/s.

Resposta

$$y = \frac{6}{\left(x - 4,5 \cdot t\right)^2 + 3}$$

2. Ondas do oceano com uma distância de 10,0 m de uma crista à outra podem ser descritas pela função de onda:

$$y(x,t) = (0.800m) \cdot \sin[0.628(x - vt)]$$

onde v = 1,20 m/s. (a) Esboce *y(x,t)* em $t = 0$. (b) Esboce *y(x, t)* em t = 2,00 s. Observe como toda a forma da onda se desloca 2,40 m no sentido positivo de x neste intervalo de tempo.

Descrição matemática da onda harmônica

3. Uma onda senoidal está se deslocando ao longo de uma corda. O oscilador que gera a onda completa 40,0 vibrações em 30,0 s. Além disso, um determinado máximo se desloca 425 cm ao longo da corda em 10,0 s. Qual é o comprimento de onda?

Resposta

O período da onda é: $T = \dfrac{40\,\text{vibrações}}{30\,\text{segundos}} = 1,333\,s$ e, portanto, a frequência é: $f = \dfrac{1}{T} = 0,75\,Hz$; velocidade da onda é: $v = \dfrac{4,25\,m}{10,0\,s} = 0,425\,\dfrac{m}{s}$. Como $v = \lambda \cdot f$, o comprimento da onda é: $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{0,425\,m/s}{0,75\,s^{-1}} = 0,567\,m$

4. Para uma determinada onda transversal, a distância entre duas cristas sucessivas é de 1,20 m, e oito cristas passam por um determinado ponto ao longo do sentido do deslocamento a cada 12,0 s. Calcule a velocidade da onda.

5. A função de onda para uma onda progressiva em uma corda esticada é (em unidades do SI):

$$y(x,t) = (0,350m)\cdot \text{sen}(10\pi t - 3\pi x + \pi/4)$$

(a) Quais são a velocidade e a direção de deslocamento da onda? (b) Qual é o deslocamento vertical da corda em t = 0, x = 0,100 m? (c) Quais são o comprimento de onda e a frequência da onda? (d) Qual é o valor máximo da velocidade transversal da corda?

<u>Resposta</u>

Todas as informações sobre a onda são contidas na apresentada forma matemática. Comparando a com fórmula geral que descreve a onda harmônica (eq. 2.6), podemos extrair as seguintes informações:
$A = 0,350\,m$; $k = 3\pi\, m^{-1}$; $\omega = 10\pi\ rad/s$; $\varphi = \pi/4\ rad$

(a) $v = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{10\pi\, rad/s}{3\pi\, m^{-1}} = 3,33\,\dfrac{m}{s}$; a onda se desloca na direção x decrescente, pois fatores kx e ωt têm sinais opostos.

(b) $y = (0,350\,m)\cdot \text{sen}\left(\pi/4 - 3\pi\cdot 0,100\right) = -0,017\,m$

(c) $\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{3\pi} = 0,67\,m$; $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{10\pi}{2\pi} = 5,00\,Hz$

(d) $v_{\max} = \omega\cdot A = 10\pi\,\dfrac{rad}{s}\cdot 0,350\,m = 11,00\,\dfrac{m}{s}$

6. Uma onda é descrita por $y = (2,00\,cm)\cdot \text{sen}(kx - \omega t)$, onde k = 2,11 rad/m, ω = 3,62 rad/s, x está em metros e t em segundos. Determine a amplitude, o comprimento de onda, a frequência e a velocidade da onda.

7. Uma onda transversal em uma corda é descrita pela função de onda:

$$y = (0,120m)\cdot \text{sen}(\pi x/8 + 4\pi t)$$

(a) Determine a velocidade e a aceleração transversais em t = 0,200 s para o ponto da corda situado em x = 1,60 m. (b) Quais são o comprimento de onda, o período e a velocidade de propagação dessa onda?

8. (a) Escreva a expressão para y em função de x e t para uma onda senoidal que se desloca ao longo de uma corda no sentido *negativo* de x com as seguintes características: A=8,00 cm, λ=80,0 cm, f=3,00 Hz e $y(0, t)$=0 em t=0. (b) Escreva a expressão para *y* em função de *x* e *t* para a onda do item (a) supondo que *y(x*, 0) = 0 no ponto *x* = 10,0 cm.

Resposta

(a) Devemos representar a onda com fórmula geral: $y(x,t) = A\text{sen}(kx \pm \omega t + \varphi)$.

$A = 0,08\,m$; $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{0,8\,m} = 7,85\,m^{-1}$; $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 3,00\,s^{-1} = 18,84\dfrac{rad}{s}$.

Constante da fase φ é encontrada a partir das condições iniciais. $x = 0 \quad t = 0 \quad \Rightarrow$ $y = 0 = Asen(\varphi) \;\Rightarrow\; \varphi = 0$. Portanto, a função de onda é:

$y(x,t) = (0,08\,m)\cdot\text{sen}(7,85\,x + 18,84\,t)$, onde x está em metros e t em segundos.

(b) $y(x,t) = (0,08\,m)\cdot\text{sen}(7,85\,x + 18,84\,t - \pi/4)$

9. Uma onda senoidal transversal em uma corda tem um período $T = 25\,ms$ e se desloca no sentido negativo de *x* com uma velocidade de 30,0 m/s. Em *t* = 0, uma partícula da corda em *x* = 0 tem um deslocamento de 2,00 cm e está se deslocando para baixo com uma velocidade de 2,00 m/s. (a) Qual é a amplitude da onda? (b) Qual é o ângulo de fase inicial? (c) Qual é a velocidade transversal máxima da corda? (d) Escreva a função de onda para essa onda.

Resposta

A elongação e a velocidade transversal das partículas da corda são descritas pelas fórmulas (2.6) e (2.7): $y = A\text{sen}(kx + \omega t + \varphi)$; $v_y = \omega A\cos(kx + \omega t + \varphi)$.

(a) e (b) Para determinar o A e φ, devemos usar as condições iniciais do movimento (validos para $t = 0$ e $x = 0$):

$$y(0,0) = 0,02\,m = A\text{sen}(\varphi)$$

$$v_y(0,0) = -2,00\frac{m}{s} = \omega A\cos(\varphi) = \frac{2\pi}{T}A\cos(\varphi)$$

Dividindo essas duas equações, segue: $-\dfrac{0,02\,m}{2,00\,m/s} = \dfrac{T}{2\pi}\cdot\text{tg}(\varphi)$. Sabendo que $T = 25\cdot 10^{-3}\,s$, podemos calcular a constante de fase: $\varphi = -1,19\,rad$ (ou $-68,29^0$). Usando agora a primeira das duas equações acima, podemos calcular a amplitude: $A = \dfrac{0,02\,m}{\text{sen}(\varphi)} \;\Rightarrow\; A = -0,0215\,m$, i.e., a magnitude da amplitude é: $A = 2,15\,cm$.

(c) $v_{y\max} = \omega\cdot A = \dfrac{2\pi}{T}\cdot A = \dfrac{2\cdot 3,14\,rad}{25\cdot 10^{-3}\,s}\cdot 0,0215\,m = 5,40\dfrac{m}{s}$

(d) Para escrever a função de onda, falta informação sobre o número de onda k e a frequência angular ω.

$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{6,28\,rad}{5,40\,m/s \cdot 25 \cdot 10^{-3}\,s} = 46,52\,m^{-1}$; $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6,28\,rad}{25 \cdot 10^{-3}\,s} = 251,20\,\frac{rad}{s}$

$\Rightarrow \quad y(x,t) = (2,15\,cm) \cdot \text{sen}(46,52 \cdot x + 251,20 \cdot t - 1,19)$, onde x está em metros e t em segundos.

10. Mostre que a função de onda $y = e^{b(x-vt)}$ é uma solução da equação de onda linear, onde b é uma constante.

Taxa de transferência de energia por ondas harmônicas em cordas

11. Uma corda esticada tem massa de 0,180 kg e comprimento de 3,60 m. Qual potência deve ser fornecida à corda a fim de gerar ondas senoidais que tenham uma amplitude de 0,100 m, um comprimento de onda de 0,500 m e se propaguem com uma velocidade de 30,0 m/s?

Resposta

A potência transmitida pela onda harmônica na corda é descrita pela fórmula (2.14): $P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$. Os valores de A e v são fornecidos.

$\omega = v \cdot k = v \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = 30,0\,\frac{m}{s} \cdot \frac{2 \cdot 3,14\,rad}{0,500\,m} = 376,8\,\frac{rad}{s}$; $\quad \mu = \frac{m}{L} = \frac{0,180\,kg}{3,60\,m} = 0,05\,\frac{kg}{m}$.

Portanto, $P = 1064,8\,W$

12. Ondas senoidais de amplitude de 5,00 cm devem ser transmitidas ao longo de uma corda que tenha uma densidade de massa linear igual a $4,00 \times 10^{-2}$ kg/m. Se a fonte puder fornecer uma potência máxima de 300 W e a corda estiver sob uma tensão de 100 N, qual é a frequência vibratória mais elevada na qual a fonte pode operar?

Dica: Usar a seguinte expressão para velocidade da onda em corda: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, onde T é a tensão da corda e μ sua densidade linear.

13. Um segmento de 6,00 m de uma longa corda tem massa 180 g. Uma fotografia de alta velocidade mostra que o segmento contém quatro ciclos completos de uma onda. A corda está vibrando senoidalmente com frequência de 50,0 Hz e com um deslocamento do "pico-ao-vale" de 15,0 cm. (O deslocamento do pico-ao-vale é a distância vertical entre o maior deslocamento positivo e o maior deslocamento negativo.) (a) Escreva a função que descreve essa onda que se propaga no sentido positivo *x*. (b) Determine a potência que está sendo fornecida à corda.

Resumo da aula

Onda mecânica é uma perturbação que se propaga através de um meio material. O que é perturbado durante esse movimento é o meio, i.e., as partículas que o compõem. O movimento ondulatório transfere a energia e o momento, mas não matéria.

Ondas transversais são aquelas nas quais a perturbação é perpendicular à direção de propagação. As **ondas longitudinais** apresentam a perturbação na mesma direção da propagação.

A função da onda que descreve movimento ondulatório ao longo de eixo x deve ter a seguinte forma:

$y(x,t) = f(x - vt)$ movimento ondulatório para a direita (x crescente)
$y(x,t) = f(x + vt)$ movimento ondulatório para a esquerda (x decrescente)

onde o y é deslocamento da partícula do meio posicionada em ponto x no instante t, medido a partir da posição de equilíbrio. Essa função satisfaz a **equação da onda**:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

onde v é velocidade de propagação da onda.

Onda harmônica é uma onda que pode ser descrita em termos das funções harmônicas (seno e cosseno):

$$\boxed{y(x,t) = A\text{sen}(kx \pm \omega t + \varphi)}$$

com definida amplitude A, frequência angular ω, e comprimento da onda λ (“escondido” em número de onda angular $k = 2\pi/\lambda$).

Velocidade de propagação da onda é conectada com sua frequência e comprimento de onda através das fórmulas:

$$v = \frac{\omega}{k} \;\; ; \;\; v = \lambda \cdot f$$

Em duas ou três dimensões, as ondas são representadas pela frente da onda e pelos raios. Em uma **onda plana**, os raios são perpendiculares às frentes de onda. A onda que se propaga ao longo da direção definida pelo vetor unitário $\vec{u}$ é descrita pela seguinte função da onda:

$$\xi(\vec{r},t) = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

e descreve deslocamento da partícula do meio posicionada no ponto $\vec{r}$ e no instante t. No caso das ondas harmônicas:

$$\xi(\vec{r},t) = \xi_0 \text{sen}(\vec{k}\,\vec{r} - \omega t)$$

onde o $\vec{k} \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{u}$ é o **vetor da onda**.

Conclusão

Essa aula foi dedicada ao começo do estudo das ondas mecânicas. Aprendemos como se formam essas ondas, qual é sua natureza, e como se propagam pelos meios materiais. Também aprendemos como descrever matematicamente o movimento ondulatório, definimos quantidades físicas que o caracterizam: amplitude, frequência, comprimento de onda e velocidade de propagação, bem como as relações entre eles. Prestamos atenção especial para um tipo de onda, ondas harmônicas, tanto em uma quanto em duas ou três dimensões.

Informações sobre a próxima aula

Na próxima aula estudaremos com mais detalhes vários tipos de ondas mecânicas: ondas que se propagam pelas cordas, ondas elásticas que se propagam nos materiais sólidos, ondas sísmicas e ondas na superfície da água. Cada uma delas, embora sejam diferentes e bem específicas, possuem as mesmas características gerais que já aprendemos nessa aula