# Aula 4

# ONDAS SONORAS

## META
Apresentar aos alunos as principais características de ondas sonoras que se propagam através dos gases, bem como as maneiras de descrevê-las matematicamente. Demonstrar a conexão entre velocidade do som e características do gás. Explicar o efeito Doppler acústico.

## OBJETIVOS
Ao final desta aula, o aluno deverá:
Descrever matematicamente uma onda sonora em termos de deslocamento das moléculas do gás ou de flutuação da pressão.
Entender a relação entre velocidade do som e a pressão ou temperatura do ar.
Entender a escala decibel para medição da intensidade do som.
Compreender e utilizar praticamente as fórmulas do efeito Doppler acústico.

## PRÉ-REQUISITO
Trigonometria básica; cálculo diferencial básico; mecânica básica; aulas 01-03

# Introdução

Ondas sonoras são as ondas mecânicas mais conhecidas e mais importantes para a humanidade. São ondas longitudinais e propagam-se através de qualquer meio material com velocidade que depende das propriedades físicas deste meio. A descrição matemática das ondas sonoras é muito parecida com descrição das outras ondas mecânicas, discutidas na aula anterior. Ondas sonoras podem ser divididas em três categorias, dependendo da sua frequência. (1) **Ondas audíveis** compreendem frequências entre 20 e 20000 Hz, que é o intervalo que a grande maioria dos ouvidos humanos percebe e interpreta estas ondas como **som**. (2) Ondas de **infra-som** são ondas sonoras com frequências abaixo do limite do intervalo audível (<20 Hz). (3) Ondas de **ultra-som** são ondas sonoras com frequências acima do limite do intervalo audível (>20000 Hz). Para seres humanos as ondas sonoras que se propagam através do ar têm maior importância. Portanto, o foco dessa aula será a estudar exatamente este tipo das ondas sonoras.

## 4.1 Descrição matemática das ondas sonoras harmônicas propagando-se através de um gás

As ondas sonoras podem ser geradas, no ar, por um diapasão, por uma pessoa falando, ou por um alto-falante que esteja vibrando com movimento harmônico simples. A fonte de vibração provoca a oscilação das moléculas do ar na sua vizinhança, em torno de seus pontos de equilíbrio. Os choques entre essas moléculas e as moléculas vizinhas criam uma perturbação que se movimenta pelo espaço como uma onda. Para estudar esse tipo de movimento, vamos nos concentrar no caso simples de uma onda harmônica que se propaga ao longo de eixo x, no seu sentido positivo. Conforme discutido nas aulas anteriores, essa onda é descrita por uma função da onda $\xi(x,t)$ que fornece o deslocamento $\xi$ de uma molécula do ar em relação ao seu equilíbrio, para uma posição $x$ no instante $t$:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \mathrm{sen}(kx - \omega t) \tag{4.1}$$

Os deslocamentos $\xi$ são orientados na direção de propagação da onda, de modo que as distâncias $\xi$ e $x$ são paralelas e não ortogonais, como no caso de uma onda transversal! A Figura 4.1 mostra a variação do deslocamento das moléculas do ar como função da posição delas.

A oscilação das moléculas do ar causa variação da densidade do ar, e a última provoca variação da pressão do ar. Como a pressão de um gás é proporcional à sua densidade, a variação de pressão (pois está superposta a uma pressão de equilíbrio) é máxima quando a variação de densidade for também máxima. A Figura 4.1 mostra que a variação de densidade (ou pressão) está defasada do deslocamento de 90°.

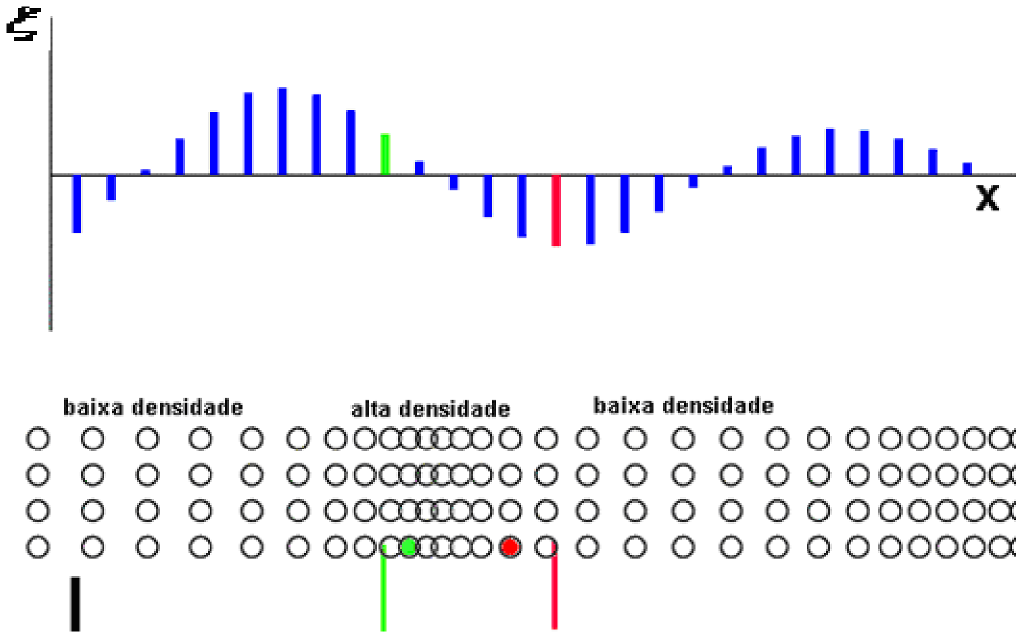



**Figura 4.1:** Gráfico do deslocamento das moléculas de ar durante passagem de uma onda sonora harmônica, num dado instante $t$.

Quando o deslocamento é zero, a variação de densidade (ou pressão) é máxima ou mínima. Quando o deslocamento é máximo ou mínimo, a variação de densidade (ou pressão) é nula. Desta forma podemos representar uma onda sonora como uma onda de pressão, defasada por $\pi/2$ em relação à onda do deslocamento (4.1), dada por:

$$p(x,t) = p_0 sen(kx - \omega t - \pi/2) \equiv p_0 \cos(kx - \omega t) \qquad (4.2)$$

onde $p$ é **variação de pressão** em relação á pressão de equilíbrio, e $p_0$ é o máximo (quando a função cosseno é igual um) desta variação de pressão. A função $p(x,t)$ fornece a diferença entre a pressão da onda e a pressão atmosférica normal $p_a$, de modo que a pressão absoluta do ar é igual a $p_a + p(x,t)$, e depende da posição e tempo. Num dado instante $t$, por exemplo, as posições $x$ onde $p = 0$ sofrem pressão atmosférica inalterada, já que as posições onde $p = \pm p_0$ sentem a pressão maximamente alterada $p_a \pm p_0$. Mostra-se que a amplitude da variação de pressão $p_0$ está relacionada com a amplitude do deslocamento $\xi_0$ por:

$$p_0 = \rho \omega v \xi_0 \qquad (4.3)$$

onde $v$ é a velocidade de propagação do som e $\rho$ a densidade do gás no equilíbrio. Portanto, podemos concluir que a descrição de propagação das ondas sonoras pode ser feita tanto em termos de deslocamento de moléculas do ar quanto em termos de variação da pressão do ar.

### 4.2 Velocidade das ondas sonoras

Já foi dito que a velocidade das ondas mecânicas depende das propriedades do meio, e não depende do movimento inicial da fonte das ondas; esta é uma propriedade geral do movimento ondulatório. Percebe-se que a velocidade de todas as ondas mecânicas obedece a seguinte lei:

$$v = \sqrt{\frac{\text{propriedade elâstica do meio}}{\text{propriedade inercial do meio}}} \tag{4.4}$$

Lembra-se do caso das ondas transversais que se propagam através da corda (aula 03): a velocidade delas obedece fórmula $v = \sqrt{T/\mu}$, onde a tensão é uma propriedade elástica da corda, e a massa linear é, como qualquer massa, uma propriedade inercial da corda.

As ondas sonoras propagam-se por todos os meios materiais: sólidos, fluidos e gases. A fórmula para velocidade de propagação do som através dos sólidos já foi deduzida na aula 03:

$$v = \sqrt{\frac{\Upsilon}{\rho}} \quad \text{(velocidade de som através de sólidos)} \tag{4.5}$$

onde o módulo da elasticidade de Young ($\Upsilon$) descreve a propriedade elástica do material, e a densidade $\rho$ a propriedade inercial. A fórmula para velocidade de propagação do som através de um fluido é deduzida de maneira equivalente, somente muda a descrição para a propriedade elástica do meio:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \text{(velocidade de som através de fluidos)} \tag{4.6}$$

O $B$ é o **módulo de compressão volumétrica** e quantifica a habilidade de compressão do fluido:

$$B = \frac{\Delta P}{\Delta V / V} \equiv \frac{\text{variação da pressão}}{\text{fração da variação do volume causada pela variação da pressão}} \tag{4.7}$$

i.e., os fluidos com maior $B$ alteram seu volume mais do que os fluidos com menor $B$, sob mesma variação da pressão.

A situação de propagação das ondas sonoras através dos gases é um pouco diferente, porque os gases são muito compressíveis e uma variação de pressão causa variação da densidade do gás (no caso dos sólidos e líquidos considerávamos que suas densidades ficassem constantes e independentes da mudança de pressão). A quantidade física que descreve as propriedades elásticas de um gás se chama **módulo volumétrico da elasticidade** $\kappa$ (letra grega kappa), e é representada pela fórmula:

$$\kappa = \rho\left(\frac{d\,p}{d\rho}\right) \tag{4.8}$$

A velocidade de propagação das ondas sonoras pelos gases é, portanto:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}} \quad \text{(velocidade de som através dos gases)} \tag{4.9}$$

Essa fórmula, porém, não é muito útil porque usualmente não sabemos valores de $\kappa$ para gases e, ainda mais, esses valores não são constantes, mas dependem das condições em quais os gases se encontram. É mais vantajoso saber como a velocidade do som depende da pressão ou da temperatura do meio gasoso, por exemplo. Portanto, vamos tentar transformar a fórmula (4.9) neste sentido, fazendo duas aproximações bem razoáveis:

(1) O processo que envolve colisões entre as moléculas do gás é tão rápido que não há tempo para transferência do calor entre elas. Em outras palavras, o processo é **adiabático**.

(2) Consideraremos os meios gasosos com baixa densidade (como ar, por exemplo), e neste caso podemos aproximá-los a um **gás ideal** (gás cujas moléculas não interagem entre si, com exceção das colisões que são elásticas).

Com essas duas preposições, a relação entre pressão e volume do gás fica a seguinte:

$$pV^{\gamma} = const$$

onde $\gamma$ (letra grega gama):

$$\gamma = \frac{C_{\mathrm{p}}}{C_{\mathrm{V}}} \tag{4.10}$$

é uma característica da espécie do gás, a razão entre suas capacidades caloríficas sob pressão constante ($C_{\mathrm{p}}$) e volume constante ($C_{\mathrm{V}}$). É um número sem dimensão que caracteriza as propriedades térmicas do gás. Por exemplo, nos gases que consistem de moléculas diatômicas $O_2$ e $N_2$, $\gamma$ tem o valor de 1,4. Como 98% do ar atmosférico é constituído por estes gases, este mesmo valor vale para o ar. Então, a pressão do gás é:

$$p = const \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{V}}\right)^{\gamma}$$

Como a densidade do gás é inversamente proporcional ao seu volume: $\rho \propto \frac{1}{\mathrm{V}}$, segue a relação entre a pressão e densidade do gás:

$$p = C\rho^{\gamma}$$

onde $C$ é uma constante. Essa relação pode ser utilizada para calcular o módulo volumétrico da elasticidade $\kappa$ do gás, através da fórmula (4.8):

$$\kappa = \rho\left(\frac{dp}{d\rho}\right) = \rho\gamma C\rho^{\gamma-1} = \gamma C\rho^{\gamma} = \gamma p$$

Colocando esse resultado na fórmula (4.9) podemos interligar a velocidade do som com a pressão do gás:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \qquad (4.11)$$

Desta forma chegamos à conclusão de que a **velocidade do som depende da pressão do gás**: o som se propaga com maior velocidade se a pressão do gás for maior e sua densidade for menor!

Nosso próximo objetivo é descobrir como a velocidade do som depende da temperatura do gás. Indo nessa direção, utilizaremos primeiro a equação de estado de um gás ideal, que interliga sua pressão ( $p$ ), volume ($V$ ), e temperatura absoluta ($T$ , em kelvins):

$$pV = nRT \text{ , i.e., } \quad p = \frac{1}{V}nRT$$

Nessa fórmula o $n$ é o número de mols do gás e $R$ é a constante de Rydberg dos gases ideais valendo 8,314 J/mol.K. Dividindo ambos os lados da fórmula pela densidade $\rho = m/V$ , onde $m$ é massa do gás, segue:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{V}nRT}{\frac{m}{V}} = \frac{nRT}{m} = \frac{RT}{\frac{m}{n}}$$

A massa total do gás ($m$ ) dividida por número de mols ($n$ ) é a massa molar $M$ do gás. Portanto,

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

e substituindo razão $p/\rho$ na fórmula (4.11), chegamos ao resultado final:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad (4.12)$$

ou,

$$v = \alpha\sqrt{T}$$

onde $\alpha = \sqrt{\frac{\gamma R}{M}}$ é o valor que caracteriza a espécie do gás. A fórmula (4.12) nos diz que a **velocidade do som varia proporcionalmente com a raiz quadrada da temperatura**, e a constante da proporcionalidade $\alpha$ depende das características do gás. Como consequência, em dias quentes o som se propaga através do ar com mais velocidade do que nos dias frios. A uma temperatura de 15,9 ºC, essa velocidade é de 340,9 m/s. Esta velocidade aumenta 60 cm/s para cada aumento de um grau na temperatura. A 0 ºC a velocidade do som no ar é de 331,4 m/s. Veja tabela 4.1 e compare as velocidades do som em vários materiais.

| Gases | | Líquidos | | Sólidos ($25^0$) | |
|---|---|---|---|---|---|
| H ($0^0$) | 1286 | Água ($0^0$) | 1402 | Diamante | 12000 |
| He ($0^0$) | 972 | Água ($20^0$) | 1482 | Vidro pyrex | 5640 |
| Ar ($0^0$) | 331 | Querosene ($25^0$) | 1324 | Ferro | 5130 |
| Ar ($20^0$) | 343 | Álcool ($25^0$) | 1143 | Alumínio | 5100 |

**Tabela 4.1**: Velocidades de propagação do som, em $m/s$, nos diferentes meios.

Nos líquidos e nos sólidos, onde as moléculas estão mais próximas umas das outras, a velocidade do som é bem maior do que em um gás. Na água, a velocidade do som é cerca de quatro vezes a sua velocidade no ar; a 25 ºC é de aproximadamente 1500 m/s. No aço chega a 5000 m/s, ou seja, cerca de quinze vezes maior. Se você ficar ao lado de uma estrada de ferro e escutar enquanto um trabalhador bate um espigão com o martelo, você ouvirá cada golpe duas vezes. O som que se propaga através do aço dos trilhos chega antes do som que se transmite através do ar.

### 4.3 Intensidade das ondas sonoras

Ondas sonoras, como qualquer tipo de ondas mecânicas, transferem a energia de uma região do espaço para outra. Uma maneira útil de se descrever este transporte é por meio da intensidade da onda, que já foi discutido na aula 02. Nosso objetivo nessa aula é expressar a intensidade de uma onda sonora em termos da amplitude do deslocamento $\xi_0$, ou da amplitude de pressão $p_0$.

Vamos primeiro utilizar a definição da intensidade, e tentar expressá-la em termos da pressão e da velocidade de propagação da onda. A intensidade $I$ é igual à taxa temporal média com a qual a energia é transportada através de uma área $S$ perpendicular à direção de propagação da onda, por unidade desta área. Então,

$$I = \frac{\langle P \rangle}{S} = \frac{\langle E \rangle}{S \cdot t} \tag{4.13}$$

onde o $\langle P \rangle$ é a potência média carregada pela onda, i.e., a energia média $\langle E \rangle$ dividida pelo tempo $t$. A energia média carregada pela onda pode ser expressa como média do produto da força $F$ que está movendo as moléculas do gás, e da distância $d$ percorrida por estas moléculas:

$$I = \frac{\langle F \cdot d \rangle}{S \cdot t} \tag{4.14}$$

Como $F/S = p$ (pressão do gás), e $d/t = v_\xi$ (velocidade das moléculas do gás), podemos escrever que

$$I = \langle p \cdot v_\xi \rangle \tag{4.15}$$

Agora utilizaremos expressões (4.1) e (4.2) para $p$ e $v_\xi$:

$$p \cdot v_\xi = p \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = p_0 \cos(kx - \omega t) \cdot \omega \xi_0 \cos(kx - \omega t) = p_0 \xi_0 \omega \cos^2(kx - \omega t)$$

O sinal menos, que surge pela derivação do deslocamento $\xi$, foi ignorado, pois ele somente indica o sentido da velocidade, e nós estamos interessados apenas em sua magnitude. A intensidade da onda sonora é, portanto:

$$I = p_0 \xi_0 \omega \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2} p_0 \xi_0 \omega \tag{4.16}$$

porque $\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle \equiv \left\langle \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sen}(kx - \omega t)) \right\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \langle \mathrm{sen}(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ (a média temporal das funções seno e cosseno é sempre zero, pois metade do tempo as funções são positivas e na outra metade negativas). Utilizando a relação (4.3) podemos expressar a intensidade em termos do deslocamento:

$$I = \frac{1}{2}(\rho \omega v \xi_0) \cdot \xi_0 \omega = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 \xi_0^2 \tag{4.17}$$

ou da amplitude de pressão:

$$I = \frac{1}{2} p_0 \cdot \frac{p_0}{\rho \omega v} \cdot \omega = \frac{1}{2 \rho v} \cdot p_0^2 \tag{4.18}$$

A equação (4.17) mostra que a **intensidade de uma onda sonora é proporcional ao quadrado da amplitude do deslocamento das moléculas do ar, e ao quadrado da frequência da onda**. A equação (4.17) também demonstra que as ondas sonoras harmônicas com mesma intensidade, mas com frequências diferentes, possuem amplitudes de deslocamento diferentes. A equação (4.18) nos diz algo diferente: as ondas com mesma intensidade, mas com frequências diferentes caracterizam-se com a mesma amplitude de pressão $p_0$!

Como o ouvido humano é sensível a um grande intervalo de intensidades, a descrição fornecida pelas equações (4.17) e (4.18) não é muito prática de se usar no nosso cotidiano. Podemos dizer que a sensação psicológica de sonoridade (volume do som) varia aproximadamente com o logaritmo da intensidade e não com a própria intensidade. Pra descrever o **nível de intensidade** de uma onda sonora, adota-se uma escala logarítmica $\beta$ (letra grega beta). A unidade de medida é o **decibel** (dB), definido por:

$$\beta = (10\,dB)\cdot \log \frac{I}{I_0} \tag{4.19}$$

onde $I$ é intensidade do som e o $I_0$ é o limiar da audibilidade ($10^{-12}\ W/m^2$). O símbolo “log” representa o logaritmo na base 10.

Quando a intensidade de uma onda sonora for igual a $10^{-12}\ W/m^2$, ou $I_0$, seu nível de intensidade sonora é igual a 0 dB:

$$\beta = 10\cdot \log \frac{I_0}{I_0} = 0\,dB$$

Por outro lado, a intensidade de 1 $W/m^2$ corresponde a 120 dB:

$$\beta = 10\cdot \log \frac{1}{10^{-12}} = 10\cdot \log 10^{12} = 10\cdot 12\cdot \log 10 = 120\,dB$$

que já é o nível de intensidade que causa a sensação de dor! A Tabela 4.2 mostra valores típicos de níveis de intensidade em dB de algumas fontes sonoras.

| *Fonte* | $I/I_0$ | *dB* | *Descrição* |
|---|---|---|---|
| | $10^0$ | 0 | *Limiar da audibilidade* |
| *Respiração normal* | $10^1$ | 10 | *Quase inaudível* |
| *Folhas sussurrantes* | $10^2$ | 20 | |
| *Murmúrios (a 5 cm)* | $10^3$ | 30 | *Muito silencioso* |
| *Biblioteca* | $10^4$ | 40 | |
| *Escritório tranqüilo* | $10^5$ | 50 | *Silencioso* |
| *Conversação normal (a 1 m)* | $10^6$ | 60 | |
| *Tráfego pesado* | $10^7$ | 70 | |
| *Escritório barulhento; fábrica comum* | $10^8$ | 80 | |
| *Caminhão pesado (a 15 m)* | $10^9$ | 90 | *Exposição constante prejudica a audição* |
| *Trem de metrô* | $10^{10}$ | 100 | |
| *Construção civil (a 3 m)* | $10^{11}$ | 110 | |
| *Concerto de rock com amplificadores (a 2 m; decolagem de jato (a 60 m)* | $10^{12}$ | 120 | *Limiar de audição dolorosa* |
| *Martelo pneumático; metralhadora* | $10^{13}$ | 130 | |
| *Decolagem de jato (nas vizinhanças)* | $10^{15}$ | 150 | |
| *Motor de foguete de grande porte (nas vizinhanças)* | $10^{18}$ | 180 | |

**Tabela 4.2**: Algumas fontes sonoras e seus respectivos níveis de intensidades.

A sensação de sonoridade depende da frequência e também da intensidade do som. A figura 4.2 mostra o nível de intensidade do som em função da frequência.

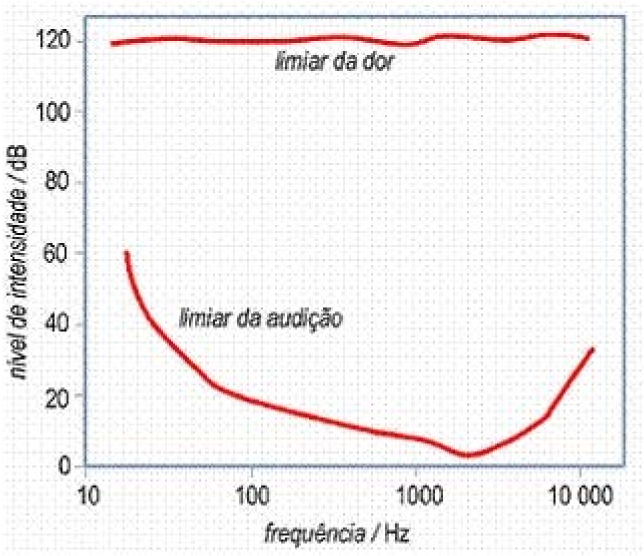



**Figura 4.2:** Gráfico mostrando nível da intensidade do som em função da frequência. Note que o ouvido humano é mais sensível, em todos os níveis de intensidade, aos sons com frequências aproximadamente de 4 kHz.

### 4.4 Efeito Doppler acústico

O efeito Doppler acústico é um fenômeno de alteração da frequência notada pelo observador quando existe um movimento relativo entre a fonte das ondas sonoras e o observador. Esse efeito recebeu o nome do cientista austríaco Christian Doppler (1803-1853), que foi o primeiro a explicá-lo.

Quando uma fonte de ondas (F) e o observador (O) estão em movimento relativo, a frequência percebida pelo último não coincide com a frequência emitida. Quando a fonte e receptor se aproximam um do outro, a frequência observada é maior do que a frequência emitida. Quando os dois se afastam um do outro, a frequência observada é menor do que a emitida. Qualquer um de nós pode observar esse fenômeno ouvindo o apito de uma locomotiva (ou carro) em movimento. O apito fica mais grave (frequência menor) quando a locomotiva está se afastando, após ter passado por você.

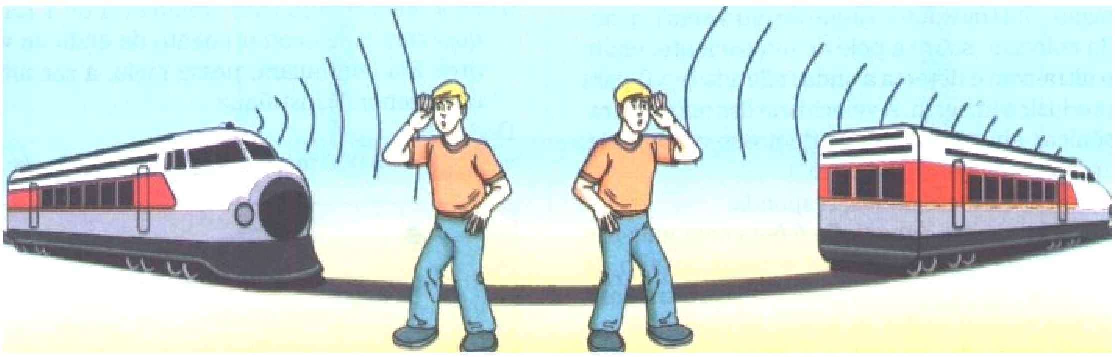


**Figura 4.3:** Manifestação do efeito Doppler. Quando o trem apitando passa ao lado de você, o som do apito muda de mais agudo para mais grave.

Denominando $f_O$ a frequência recebida pelo observador e $f_F$ a frequência emitida pela fonte, sabemos da nossa experiência cotidiana que:

• no caso de aproximação: $f_O > f_F$, observador percebe som mais agudo,

• no caso de afastamento: $f_O < f_F$, observador percebe som mais grave.

Vamos supor que o observador e a fonte se movem ao longo da mesma linha. Vamos ainda denotar com $v_O$ a velocidade do observador, com $v_F$ a velocidade da fonte sonora, e com $v$ a velocidade de propagação do som, todas em relação a algum ponto fixo na superfície da Terra (que será o zero do nosso sistema de coordenadas). Finalmente, vamos estabelecer qual será o sentido positivo para o sinal das velocidades $v_O$ e $v_F$: a partir do observador O para fonte F!

Nosso objetivo será de estabelecer a relação entre as quantidades físicas mencionadas acima (veja figura 4.4), e deduzir uma fórmula que expressará a frequência $f_O$ em termos de outras quantidades.

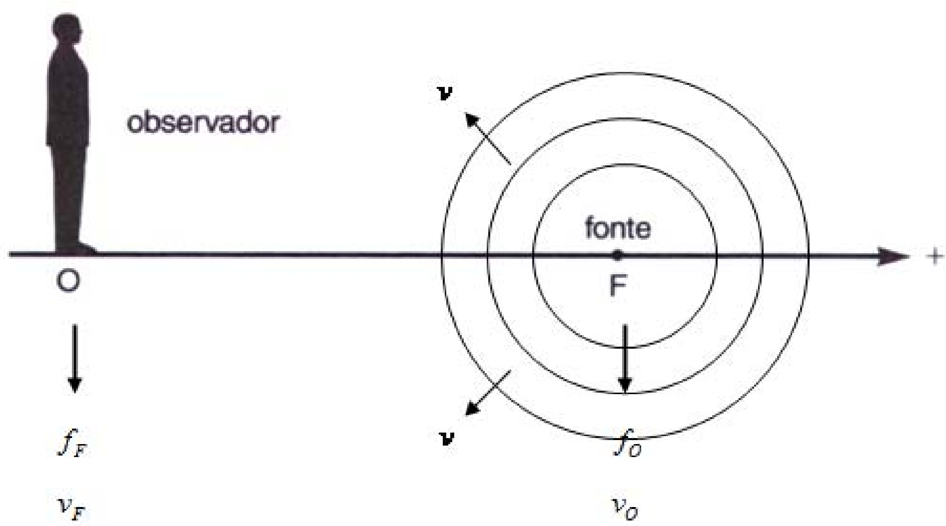



**Figura 4.4:** Apresentação gráfica de quantidades físicas envolvidas na explicação do efeito Doppler acústico.

• Situação simples: fonte em repouso ( $v_F = 0$ ), observador em movimento ( $v_O \neq 0$ ).

Analisaremos primeiro a seguinte situação: a fonte da onda sonora está em repouso, e o observador se move na direção dela (veja figura 4.5).

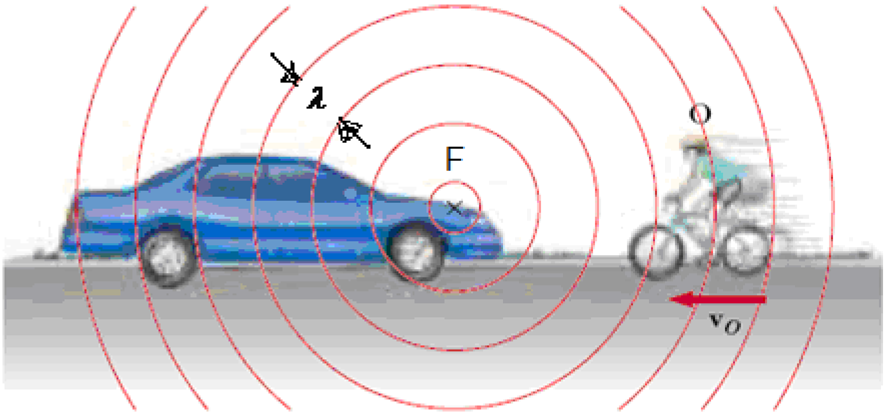



**Figura 4.5:** Um observador (ciclista) está se movendo em direção à fonte do som (buzina de um carro) estacionária. Ele ouve a frequência do som, que é maior do que a emitida.

A fonte F emite onda sonora com frequência $f_F$ e comprimento de onda $\lambda = v/f_F$ (lembre-se, produto da frequência e comprimento da onda é igual à velocidade de propagação da onda). Porém, o observador O mede a velocidade da onda sonora que chega ao seu ouvido como $v + v_O$ (pois ele próprio se move com velocidade $v_O$ ). Então, a frequência que o observador percebe é:

$$f_O = \frac{v + v_O}{\lambda} = \frac{v + v_O}{v/f_F} = f_F \frac{v + v_O}{v} \qquad \Rightarrow \qquad f_O = f_F \left(1 + \frac{v_O}{v}\right) \qquad (4.20)$$

No caso de aproximação, a velocidade $v_O$ é positiva (sentido de O para F), e a frequência registrada pelo observador é maior do que frequência emitida, $f_O > f_F$ . No caso de afastamento, a velocidade $v_O$ é negativa (sentido de F para O), e a frequência registrada pelo observador é menor do que a frequência emitida, $f_O < f_F$ . Então, a equação (4.20) prevê corretamente a relação entre $f_O$ e $f_F$, de acordo com nossa experiência cotidiana!

• Situação geral: fonte em movimento ( $v_F \neq 0$ ), observador em movimento ( $v_O \neq 0$ ).

Vamos agora analisar a situação geral: ambos, a fonte da onda sonora e o observador, são permitidos se mover ao longo da mesma direção (veja figura 4.6).

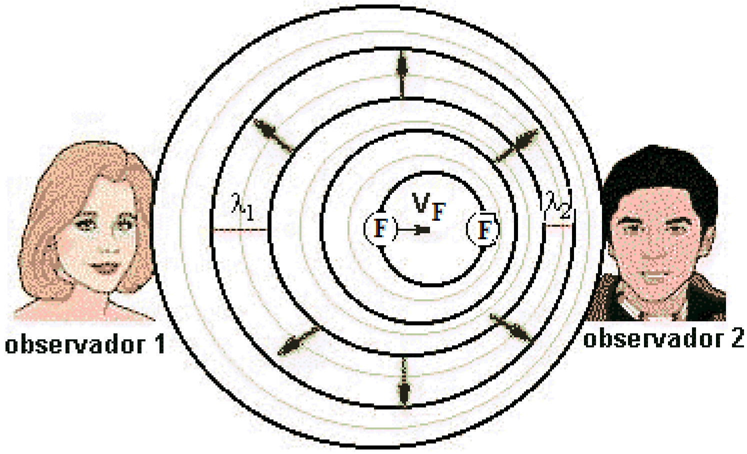



**Figura 4.6:** Fonte da onda sonora movendo-se na direção par observador 2. Devido a esse movimento, na frente da fonte as ondas são mais comprimidas, e atrás mais espaçadas, i.e., $\lambda_2 < \lambda_1$.

O que mudou em relação à situação simples quando a fonte estava parada? A velocidade de propagação da onda $v$ não mudou, pois essa velocidade depende somente das propriedades do meio. Porém, o comprimento da onda emitida não é mais o mesmo em todas as direções, e não é igual a $v/f_F$. Demonstraremos esse fato para o caso do comprimento de onda na frente da fonte em movimento, $\lambda_{\text{frente}}$. O tempo de emissão de um comprimento de onda completo pela fonte é o período de onda $T = 1/f_F$. Vamos imaginar que no instante $t = 0$ a fonte emitiu uma crista de onda, que seguiu para frente com velocidade $v$. No instante $t = T$ a fonte emite a próxima crista. Porém, durante esse tempo, a fonte se deslocou a distância $v_F T = v_F / f_F$, enquanto a primeira crista se deslocou a distância $vT = v/f_F$. Portanto, a distância entre as duas cristas consecutivas, que é, pela definição, um comprimento da onda, é igual à diferença entre essas duas distâncias:

$$\lambda_{\text{frente}} = \frac{v}{f_F} - \frac{v_F}{f_F} = \frac{v - v_f}{f_F} \tag{4.21}$$

Resta somente reconhecemos que o comprimento de onda na frente de uma fonte em movimento é menor do que $v/f_F$, i.e., as ondas são comprimidas. Usando o mesmo raciocínio, é fácil mostrar que o comprimento de onda atrás de uma fonte em movimento é maior do que $v/f_F$, i.e., as ondas são mais espaçadas. Basta somente reverter o sinal da velocidade $v_F$ na equação (4.21):

$$\lambda_{\text{atrás}} = \frac{v}{f_F} + \frac{v_F}{f_F} = \frac{v + v_f}{f_F} \tag{4.22}$$

Agora, qual é a frequência que percebe um observador? A resposta óbvia é:

$$f_O = \frac{\text{velocidade da onda que chega ao observador}}{\text{comprimento da onda que chega ao observador}}$$

A velocidade da onda que chega ao ouvido do observador é $v \pm v_O$ e depende do fato se ele se aproxima (sinal +) ou se afasta (sinal -) da fonte. O comprimento de onda que chega ao ouvido do observador é $v \mp v_F / f_F$ (de acordo com as equações (4.21) e (4.22)), e depende do fato se a fonte se aproxima (sinal -) ou afasta (sinal +) dele. Portanto, a fórmula geral que determina a frequência recebida pelo observador é:

$$f_O = f_f \frac{v \pm v_O}{v \pm v_F} \qquad (4.23)$$

com as seguintes regras para sinais das velocidades:

$$\begin{aligned} &v_0 \begin{cases} \rightarrow & + \ \textbf{observador se aproxima da fonte} \\ \leftarrow & - \ \textbf{observador se afasta da fonte} \end{cases} \\ &v_F \begin{cases} \rightarrow & + \ \textbf{fonte se afasta do observador} \\ \leftarrow & - \ \textbf{fonte se aproxima do observador} \end{cases} \\ &v_0 = 0, \ \textbf{o observador está parado} \\ &v_F = 0, \ \textbf{a fonte está parada} \end{aligned} \qquad (4.24)$$

Você, entretanto, não precisa decorar todas essas regras. A equação geral para o efeito Doppler acústico pode ser escrita em forma mais simples:

$$f_O = f_f \frac{v + v_O}{v + v_F} \qquad (4.25)$$

onde os sinais para $v_O$ e $v_F$ são determinados de acordo com a regra estabelecida no começo da aula, sinal + se aplica quando as velocidades têm o sentido do observador para a fonte, e sinal – no caso contrário (figura 4.4). É fácil verificar que essa regra está de acordo com as regras (4.24). Cuidado, a equação (4.25) tem validade limitada: ela se aplica somente no caso quando a velocidade da fonte é menor do que velocidade de propagação da onda!

No final, vale a pena ressaltar que o efeito Doppler não é uma exclusividade das ondas sonoras. Ele é um fenômeno ondulatório geral e acontece com todos os tipos da onda. Nós estudaremos mais tarde o efeito Doppler das ondas eletromagnéticas.

### 4.5 Ondas de choque

Acabamos de aprender que uma fonte sonora em movimento comprime as ondas emitidas pela frente, onde o comprimento da onda diminui de acordo com equação (4.21).

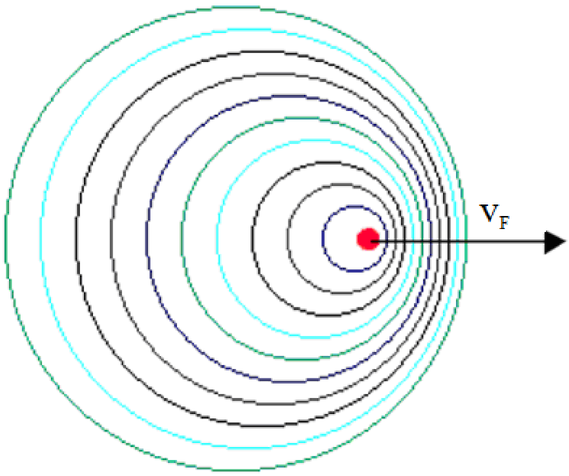



**Figura 4.7**: A onda emitida pela uma fonte em movimento, quando a velocidade da fonte é menor do que a velocidade de propagação da onda através do meio.

Vamos nos perguntar o seguinte: o que acontecerá se a velocidade da fonte se igualar a velocidade de propagação da onda? Pela própria equação (4.21), quando $v_F \to v$, então $\lambda_{\text{frente}} \to 0$. Fisicamente isso significa que a distância entre as cristas da onda diminui praticamente para zero, i.e., as cristas se agrupam (acumulam) na frente da fonte. Para elevar sua velocidade acima da velocidade de propagação da onda, a fonte precisa exercer uma grande força para “furar” esse acúmulo. No caso do avião supersônico, o acúmulo das ondas na frente do avião se chama **barreira de som**. Quando o avião perfura essa barreira, elevando sua velocidade acima da velocidade do som, formam-se ondas de choque que provocam grande desconforto nos nossos ouvidos e comprometem as estruturas dos prédios e outros objetos (quebrando vidros, por exemplo).

Vamos agora analisar detalhadamente o que acontece quando a velocidade da fonte $v_F$ ultrapassa a velocidade de propagação da onda $v$. Essa situação é ilustrada na figura 4.8. Os círculos representam fronteiras de ondas esféricas emitidas pela fonte nos vários instantes durante o movimento.

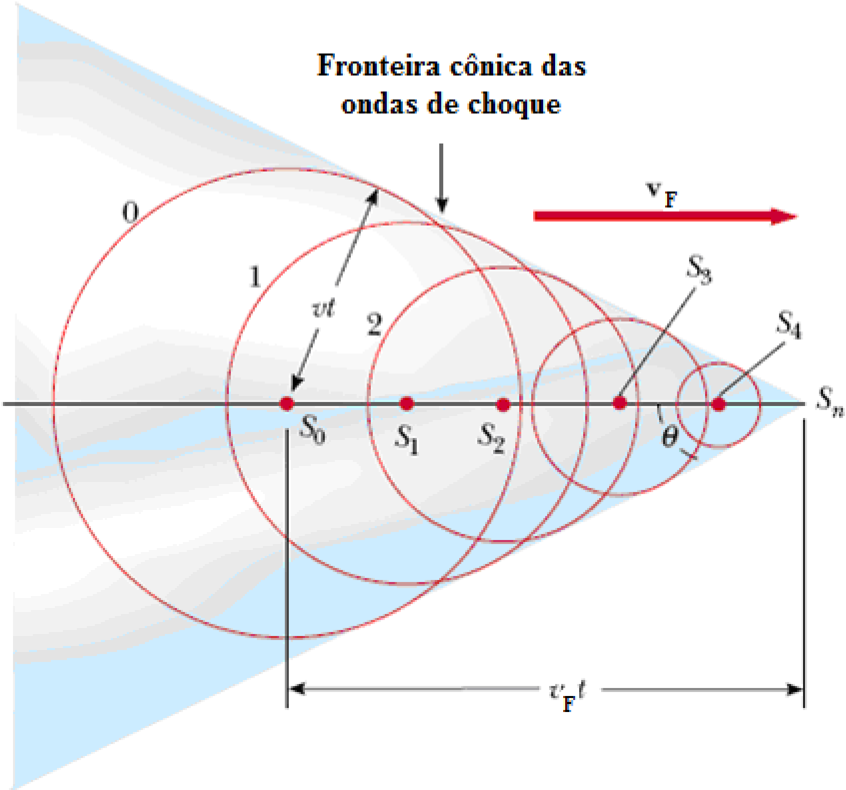



**Figura 4.8:** Ilustração da formação de uma onda de choque quando a fonte sonora se movimenta de um ponto $S_0$ até o ponto $S_n$ com velocidade $v_F$ maior que a velocidade de propagação da onda $v$ pelo meio. O envelope da fronteira de onda forma um cone, cujo ápice é determinado pelo ângulo $\theta$.

Vamos supor que no instante $t = 0$ a fonte estava no ponto $S_0$, e depois do intervalo $t$ a fonte se deslocou até o ponto $S_n$. Durante esse tempo, a fronteira da onda centrada em $S_0$ alcançou o raio igual a $v \cdot t$. No instante $t$ (ponto $S_n$) a onda ainda não é emitida. A tangente da fronteira da onda emitida de $S_0$, desenhada a partir do ponto $S_n$, é tangente de todas as fronteiras de onda emitidas nos instantes intermediários entre 0 e $t$. Em três dimensões, o conjunto dessas tangentes forma um cone. Ao longo das tangentes encontram-se as ondas com mesma fase (cristas anotadas na figura 4.7), e forma-se uma frente de onda com grande amplitude devido à interferência construtiva (vamos aprender mais sobre interferência na próxima aula). Essa fronteira com forma de cone chama-se **onda de choque**. No caso das ondas sonoras, quando a onda chega aos ouvidos do observador, provoca um som muito alto (devido a grande amplitude levada pela fronteira da onda).

A inclinação do cone é determinada pelo semi-ângulo $\theta$ do seu ápice. Utilizando a geometria simples mostrada na figura 4.8, o seno desse ângulo é:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v \cdot t}{v_F \cdot t} = \frac{v}{v_F} \qquad (4.26)$$

e depende da razão entre a velocidade de propagação da onda pelo meio e a velocidade do movimento da fonte. O inverso desse número, $v_F / v$, chama-se o **número de Mach**.

Uma onda análoga a onda de choque, que todo mundo conhece, é produzida pelo barco que se move com velocidade superior a velocidade de propagação da onda superficial na água (veja figura 4.9).

**Figura 4.9:** A onda da forma V é formada porque a velocidade do barco é maior do que a velocidade das ondas da água. Essa onda é análoga a onda de choque formada pelo avião que se move com velocidade superior a velocidade do som no ar.

**Bibliografia consultada**

Alonso, M. S. e Finn, E. J., *Física*, Ed. Edgard Blucher Editora, São Paulo, 1999.

Young, H. D. e Freedman, R. A. *Física II - Termodinâmica e Ondas*, Pearson Education do Brasil (qualquer edição).

Halliday, D., Resnick, R, Walker, J *Fundamentos de Física 2- Gravitação, Ondas e Termodinâmica,* Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (qualquer edição).

**Questões**

**01.** Quando o som sai do ar e penetra na água, sua frequência se altera? E sua velocidade? E seu comprimento de onda? Explique suas respostas.

Resposta

A frequência não muda, pois ela é determinada pela fonte ondulatória. Como a velocidade muda, o comprimento de onda também tem que mudar para que a frequência $f = v/\lambda$ permaneça inalterada.

**02.** O herói de um filme de aventuras escuta a aproximação de um trem colocando seu ouvido no trilho. Por que esse método funciona melhor para perceber a aproximação do trem?

**03**. Quando a amplitude de pressão de uma onda sonora se reduz a metade do seu valor, qual é o fator de diminuição da intensidade sonora? Qual deve ser o fator do aumento da amplitude da pressão de uma onda sonora para que sua intensidade cresça de um fator igual a 16? Explique.

**04.** Uma fonte sonora e um ouvinte estão em repouso sobre a Terra, porém um vento forte sopra no sentido da fonte para o ouvinte. Existe efeito Doppler? Justifique sua resposta.

Resposta

Não há efeito Doppler**. O** que muda é a velocidade da onda produzida pela fonte: $v + v'$, onde $v'$ é velocidade do vento. O comprimento da onda emitida é mais longo: $\lambda = \dfrac{v + v'}{f_F}$, porém, a frequência percebida pelo observador: $f_O = \dfrac{v + v'}{\lambda} = \dfrac{v + v'}{\dfrac{v + v'}{f_F}} = f_F$ é a mesma emitida pela fonte.

**05.** Um som de 60 dB tem o dobro da intensidade de outro de 30 dB?

**Exercícios**

**Ondas sonoras**

**06.** Um morcego pode detectar corpos muito pequenos, tais como um inseto cujo comprimento seja aproximadamente igual ao comprimento de onda do som que o morcego faz. Se os morcegos emitem um chilro a uma frequência de 60,0 kHz e se a velocidade do som no ar é de 340 m/s, qual é o menor inseto que o morcego pode detectar?

Resposta

O menor inseto que o morcego pode perceber tem tamanho

$$d \approx \lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\, m/s}{60000\, s^{-1}} = 0{,}00567\, m = 5{,}67\, mm$$

**07.** Suponha que você ouça um trovão 16,2 s após ter visto o relâmpago a ele associado. A velocidade das ondas sonoras no ar é de 343 m/s e a velocidade da luz no ar é de 3,00 × $10^8$ m/s. Qual a sua distância do relâmpago?

Resposta

Vamos supor que a distância entre o relâmpago e você é $d$. O tempo que o som (trovão) precisa para percorrer essa distância é: $t_S = \dfrac{d}{v_S}$, e a luz (relâmpago) $t_L = \dfrac{d}{v_L}$, onde $v_S = 343\dfrac{m}{s}$ e $v_L = 3\cdot 10^8\dfrac{m}{s}$ são velocidades do som e da luz pelo ar, respectivamente.
$t_S - t_L = \Delta t = 16,2\,s \;\Rightarrow\; \Delta t = \dfrac{d}{v_S} - \dfrac{d}{v_L} \;\Rightarrow\; d = \dfrac{\Delta t}{\dfrac{1}{v_S} - \dfrac{1}{v_L}} = \dfrac{16,2\,s}{\left(\dfrac{1}{343} - \dfrac{1}{300000000}\right)\dfrac{s}{m}}$. O segundo número em parênteses é muito, muito menor do que o primeiro, devido ao fato que a velocidade da luz é muito superior a velocidade do som. Podemos desprezá-lo, que leva ao resultado: $d = 5557\,m$.

**08.** Um vaso de flor é derrubado de uma sacada 20,0 m acima da calçada e cai em direção a um homem desavisado de 1,75 m de altura que está abaixo. A que distância da calçada o vaso pode chegar antes que seja tarde demais para se gritar uma advertência da sacada que alcance o homem a tempo? Suponha que o homem necessite de 0,300 s para responder ao aviso.

**09.** Uma onda sonora senoidal é descrita pelo deslocamento:

$$s(x,t) = (2{,}00\mu m)\cdot\cos[(15{,}7\,m^{-1})x - (858\,s^{-1})t]$$

(a) Encontre a amplitude, o comprimento de onda e a velocidade dessa onda. (b) Determine o deslocamento instantâneo de um elemento do ar na posição $x$ = 0,050 m em $t$ = 3,00 ms. (c) Determine a velocidade máxima do movimento oscilatório de um elemento do ar.

**10.** Uma onda sonora que se propaga no ar tem uma amplitude de pressão de 4,00 N/$m^2$ e uma frequência de 5,00 kHz. Tome $\Delta P = 0$ no ponto $x$ = 0 quando $t$ = 0. (a) Qual é $\Delta P$ em $x$ = 0 quando $t = 2{,}00\times 10^{-4}$ s? (b) Qual é $\Delta P$ em $x$ = 0,020 m quando $t$ = 0?

**11.** Escreva uma expressão que descreva a variação de pressão em função da posição e do tempo para uma onda sonora senoidal no ar, se $\lambda$ = 0,100 m e $\Delta P_{máx}$ = 0,200 N/$m^2$.

Resposta

$\Delta P(x,t) = \Delta P_{\max} \cdot \cos(kx - \omega t)$ ; onde $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{6,28\,rad}{0,100\,m} = 628\,m^{-1}$ e

$\omega = \frac{v}{k} = \frac{343\,m/s}{628\,m^{-1}} = 0,546\frac{rad}{s}$.

**O efeito Doppler**

**12.** Um trem passa por uma plataforma de passageiros com velocidade constante de 40,0 m/s. A buzina do trem é soada em sua frequência característica de 320 Hz. (a) Que mudança total na frequência é detectada por uma pessoa na plataforma enquanto o trem se move da aproximação para o afastamento? (b) Que comprimento de onda é detectado por uma pessoa na plataforma enquanto o trem se aproxima?

<u>Resposta</u>

Sempre quando a velocidade de propagação do som não for fornecida, vamos supor que é $v_S = 343\frac{m}{s}$ (velocidade na temperatura de $20^0$).

(a) Observador O (passageiro) está em repouso ($v_O = 0$), e a fonte F (trem) se move ($v_F \neq 0$).

Quando a F se aproxima ao O, $v_F$ é negativo, é a formula (4.25) determina frequência percebida pelo passageiro:

$$f_O^{ap} = f_F \cdot \frac{v_S}{v_S - v_F} = 320\,s^{-1} \cdot \frac{343\,m/s}{(343-40)\,m/s} = 362,2\,s^{-1}$$

Quando F se afasta de O, $v_F$ é positivo, e segue:

$$f_O^{af} = f_F \cdot \frac{v_S}{v_S + v_F} = 320\,s^{-1} \cdot \frac{343\,m/s}{(343+40)\,m/s} = 286,6\,s^{-1}$$

A mudança da frequência observada é: $f_O^{ap} - f_O^{af} = (362,2 - 286,6)\,Hz = 75,6\,Hz$

(b) $\lambda_{\text{frente}} = \frac{v_S - v_f}{f_F} = \frac{(343-40)\,m/s}{40\,s^{-1}} = 7,57\,m$

**13.** Você está na faixa para pedestres e ouve uma frequência de 560 Hz da sirene de uma ambulância se aproximando. Depois que a ambulância passa, a frequência observada da sirene é 480 Hz. Determine a velocidade da ambulância a partir dessas observações.

<u>Resposta</u>

Observador está em repouso, $v_O = 0$; ele ouve a frequência $f_O^{ap} = 560\,Hz$ quando a ambulância se aproxima, e frequência $f_O^{af} = 480\,Hz$ quando ambulância se afasta dele. A velocidade do som no ar é $v_S = 343\dfrac{m}{s}$. Aplicando a fórmula geral do efeito Doppler, segue:

$$f_O^{ap} = f_F \cdot \frac{v_S}{v_S - v_F}$$

$$f_O^{af} = f_F \cdot \frac{v_S}{v_S + v_F}$$

Dividindo essas equações podemos eliminar $f_F$: $\dfrac{f_O^{ap}}{f_O^{af}} = \dfrac{v_S + v_F}{v_S - v_F}$, e resolver por $v_F$:

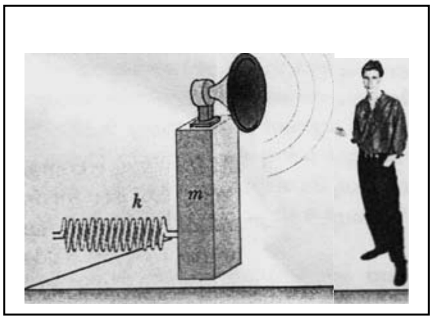
$$v_F = v_S \cdot \frac{f_O^{ap} - f_O^{af}}{f_O^{ap} + f_O^{af}}.$$

**14.** Um motorista viaja para o norte em uma estrada a uma velocidade de 25,0 m/s. Um carro de polícia, indo para o sul a uma velocidade de 40,0 m/s, aproxima-se com sua sirene produzindo um som em uma frequência de 2500 Hz. (a) Que frequência o motorista observa enquanto o carro de polícia se aproxima? (b) Que frequência o motorista detecta depois que o carro de polícia passa por ele? (c) Repita os itens (a) e (b) para o caso em que o carro da polícia estiver se dirigindo para o norte.

**15.** Um diapasão que vibra a 512 Hz cai a partir do repouso e acelera com 9,80 m/s$^2$. A que distância abaixo do ponto de liberação está o diapasão quando ondas de frequência de 485 Hz alcançam o ponto da liberação? Suponha que a velocidade do som no ar é de 340 m/s.

**16.** Um bloco com um alto-falante parafusado a ele é conectado com uma mola que tem constante de força $k$ = 20,0 N/m, como mostrado na Figura. A massa total do bloco e do alto-falante é de 5,00 kg e a amplitude do movimento desta unidade é de 0,500 m. Se o alto-falante emitir ondas sonoras de frequência de 440 Hz, determine as frequências mais elevadas e as mais baixas ouvidas pela pessoa à direita do alto-falante.

<u>Resposta</u>




As frequências mais baixas e mais altas são percebidas quando o oscilador atinge a maior velocidade no sentido do observador (aproximação), e no sentido oposto (afastamento). Essas velocidades são:

$$\pm\omega A = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}A = \pm\sqrt{\frac{20,0\,N/m}{5,00\,kg}} \cdot 0,500\,m = \pm 1,00\,\frac{m}{s}$$

(lembre-se da primeira aula).

A frequência mais alta é observada no caso da aproximação do alto falante:

$$f_O^{ap} = f_F \cdot \frac{v_S}{v_S - v_F} = 440\,s^{-1} \cdot \frac{343\,\frac{m}{s}}{(343-1)\,\frac{m}{s}} = 441{,}3\,Hz$$

A frequência mais baixa ocorre no caso do afastamento do alto falante:

$$f_O^{ap} = f_F \cdot \frac{v_S}{v_S + v_F} = 440\,s^{-1} \cdot \frac{343\,\frac{m}{s}}{(343+1)\,\frac{m}{s}} = 438{,}7\,Hz$$

**Resumo da aula**

**Ondas sonoras** se propagam pelos gases e líquidos através da perturbação das moléculas ao longo da direção de propagação. São ondas longitudinais que são descritas matematicamente ou como ondas de deslocamento ou como ondas de variação de pressão, sendo deslocadas em fase por $\pi/4$. A velocidade de propagação das ondas sonoras pelos gases é:

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$$

onde o $\kappa$ é modulo volumétrico da elasticidade do gás, e $\rho$ a sua densidade. Expressando o $\kappa$ em termos da pressão ($P$) ou temperatura ($T$) do gás, chega-se a conclusão que:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad \text{, ou} \quad v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

onde $\gamma$ é razão entre as capacidades caloríficas do gás sob pressão constante e volume constante, $R$ é a constante de Rydberg, e $M$ é a massa molar do gás.

A **intensidade** $I$ da onda sonora é igual à taxa temporal média com qual a energia é transportada através de uma área $S$ perpendicular à direção de propagação da onda, por unidade desta área. Ela é proporcional ao quadrado da amplitude do deslocamento das moléculas do ar ($\xi_0$), e ao quadrado da frequência da onda ($\omega$):

$$I = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 \xi_0^2$$

ou proporcional ao quadrado de amplitude de pressão $p_0$:

$$I = \frac{1}{2\rho v} \cdot p_0^2$$

O **nível de intensidade** $\beta$ de uma onda sonora é medida em uma escala logarítmica, com unidade de medida **decibel** (dB), definida por:

$$\beta = (10\,dB) \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

onde $I$ é intensidade do som e o $I_0$ é o limiar da audibilidade humana.

O **efeito Doppler acústico** é um fenômeno de alteração da frequência notada pelo observador quando existe um movimento relativo entre a fonte das ondas sonoras e o observador. Se a velocidade da propagação do som pelo ar for $v$, e as velocidades da fonte e observador $v_F$ e $v_O$, respectivamente, as frequências observada $f_O$ e emitida $f_F$ são interligadas pela equação:

$$f_O = f_f \frac{v + v_O}{v + v_F}$$

onde os sinais para $v_O$ e $v_F$ são positivos quando as velocidades têm sentido do observador para fonte, e negativos no caso contrário. A fórmula vale somente quando a velocidade da fonte está menor do que velocidade do som no ar. No caso $v_F > v$ formam-se **ondas de choque**.

**Conclusão**

Nessa aula abordamos o assunto das ondas sonoras que se propagam através dos gases. Vimos que a descrição matemática dessas ondas é igual à descrição das outras ondas mecânicas. Concluímos que a intensidade das ondas sonoras depende das amplitudes de deslocamento e da variação da pressão e estabelecemos a conexão entre essa intensidade e o nível de intensidade que se mede em decibéis. Finalmente, discutimos o efeito Doppler acústico, um fenômeno de alteração da frequência percebida pelo ouvinte quando existe um movimento relativo entre ele e a fonte sonora.

**Informações sobre a próxima aula**

Na próxima aula aprenderemos como se combinam duas ou mais ondas que passam pelo mesmo lugar no espaço. Veremos que essa combinação pode causar diminuição (interferência destrutiva) ou aumento (interferência construtiva) da amplitude da onda resultante. Estudaremos um caso especial da combinação ondulatória que produz ondas estacionárias, e aprenderemos como elas se formam nos instrumentos musicais de corda e de sopro, produzindo som musical. Finalmente, tocaremos no assunto das ondas que não são harmônicas, e falaremos sobre o espectro de som e timbre dos instrumentos musicais.