Aula
5

INTERFERÊNCIA, ONDAS ESTACIONÁRIAS, ONDAS NÃO HARMÔNICAS

META

Introduzir aos alunos conceitos da interferência das ondas, ondas estacionárias e ondas não harmônicas. Mostrar o papel que as ondas estacionárias exercem no funcionamento dos instrumentos musicais da corda e de sopro.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá:

Entender e descrever como duas ou mais ondas idênticas se combinam quando passam pelo mesmo lugar.

Entender como se forma uma onda estacionária, e saber como descrevê-la matematicamente.

Entender o princípio de funcionamento dos instrumentos musicais da corda e de sopro em termos de formação das ondas estacionárias.

Explicar como se combinam duas ondas com frequências diferentes, e o que é o fenômeno de batimento.

Compreender o conceito das ondas não harmônicas e o significado de análise de Fourier

PRÉ-REQUISITO

Trigonometria básica; cálculo diferencial básico; mecânica básica; aulas anteriores

Introdução

Essa aula é a última que trata sobre o assunto de ondas mecânicas. Discutiremos nela alguns efeitos ondulatórios que têm grande importância no nosso dia-dia. Aprenderemos o que acontece quando duas ou mais ondas passam pelo mesmo ponto do espaço, como essas ondas se combinam e quais são os principais efeitos dessa combinação. Discutiremos um caso especialmente importante: a formação das ondas estacionárias e suas propriedades. Veremos qual é o papel dessas ondas na formação do som dos vários instrumentos musicais. Investigaremos também o caso da interferência entre duas ondas cujas frequências são diferentes, que provoca o fenômeno chamado de batimentos. Finalmente, vamos tocar brevemente no assunto das ondas reais que não podem ser descritas pelas funções senos e cossenos, i.e., ondas não harmônicas.

5.1 Interferência das ondas

Sabemos que dois objetos materiais não podem ocupar o mesmo lugar no espaço, no mesmo instante. Com as ondas isso é diferente: elas podem coexistir ao mesmo tempo e no mesmo local. Quando isso ocorre, temos o chamado fenômeno da **superposição de ondas,** ou de **interferência de ondas**.

Como, portanto, combinar duas ou mais ondas que se encontram no mesmo lugar ao mesmo tempo? A resposta é a seguinte: de acordo com um princípio geral, que é conhecido como **princípio de superposição**. Passando pelo mesmo pedaço do meio ao mesmo tempo, as ondas individuais causam um deslocamento resultante desse pedaço em relação a sua posição de equilíbrio. O princípio de superposição diz que este **deslocamento resultante é igual à soma dos deslocamentos que seriam provocados pelas ondas individuais.** Esse princípio vale para qualquer tipo de onda cuja amplitude é pequena em relação ao seu comprimento da onda, i.e., para **ondas lineares**. Nesse curso, vamos nos importar somente com esse tipo da onda.

Vamos, por exemplo, analisar duas perturbações ondulatórias que se propagam ao longo de eixo x, descritas pelas funções da onda $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$. y_1 e y_2 são deslocamentos (transversais ou longitudinais) dos pedaços do meio situados na posição x no instante t, provocados pelas essas perturbações. Pelo princípio de superposição, o deslocamento resultante y, em qualquer posição x e qualquer instante t, é igual:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \tag{5.1}$$

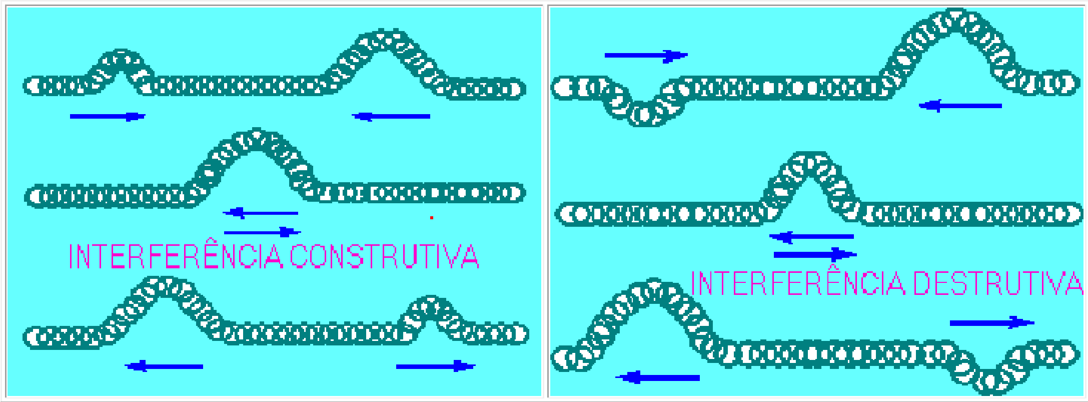


Figura 5.1: Dois pulsos ondulatórios viajando ao longo da mesma corda. Esquerda: superposição de pulsos que provoca aumento da amplitude. Direita: superposição de pulsos que provoca diminuição da amplitude no momento do encontro.

Vamos considerar primeiro dois pulsos se deslocando em direções opostas numa corda (Figura 5.1). Caso estes dois pulsos se interceptem num determinado momento, pode ocorrer **interferência construtiva ou destrutiva**, de acordo com a forma inicial dos pulsos. Se os dois pulsos estão do mesmo lado da corda, ocorre interferência construtiva e no momento de encontro as amplitudes dos pulsos serão somadas. Caso contrário, acontece a interferência destrutiva e as amplitudes dos dois pulsos serão subtraídas. Pode até ocorrer cancelamento completo dos pulsos, se eles forem idênticos. Em conclusão, a interferência de dois pulsos pode causar aumento ou diminuição da amplitude resultante, e consequentemente, aumento ou diminuição da intensidade resultante (pois a intensidade da onda é proporcional ao quadrado da sua amplitude).

Vamos agora ver como se aplica o princípio de superposição no caso de ondas progressivas harmônicas. Analisaremos duas ondas que são idênticas, exceto pela diferença de fase φ, e que se propagam ao longo do eixo x no mesmo sentido. Neste caso:

$$
\begin{aligned}
y_1(x,t) &= A\text{sen}(kx-\omega t)\\
y_2(x,t) &= A\text{sen}(kx-\omega t+\varphi)
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

e a onda resultante é a soma algébrica dessas ondas:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\cdot\left[\text{sen}(kx-\omega t) + \text{sen}(kx-\omega t+\varphi)\right] \tag{5.3}$$

Usando a relação trigonométrica:

$$\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) = 2\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\text{sen}\frac{\alpha+\beta}{2} \tag{5.4}$$

que vale para qualquer ângulo α ou β, a equação (5.3) se transforma em:

$$y(x,t) = \left(2A\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cdot \operatorname{sen}(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}) \qquad (5.5)$$

Vemos que a onda resultante também é uma onda harmônica, com mesma frequência e comprimento da onda como as ondas individuais, porém com amplitude que depende do ângulo φ que define a diferença de fase. Dependendo deste ângulo, podem ocorrer varias situações.

1.) Quando $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, ...$ diremos que as duas ondas estão **em fase**. Neste caso ocorre interferência construtiva, pois a amplitude da onda resultante é a soma das amplitudes das ondas individuais: $2 \cdot A$!

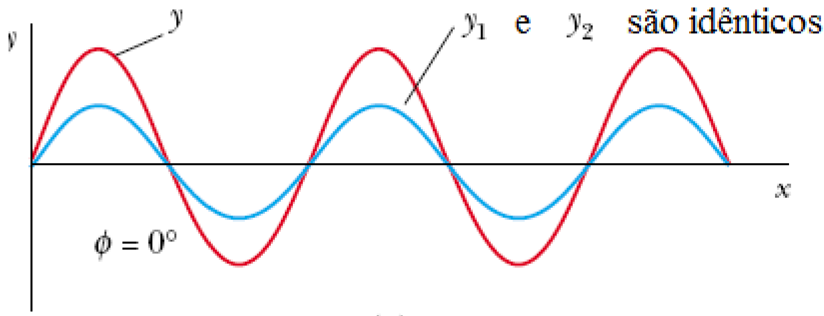


Figura 5.2: Superposição de duas ondas harmônicas que se encontram em fase. Neste caso ocorre interferência construtiva.

2.) Quando $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, ...$ diremos que as duas ondas estão em contra fase. Neste caso ocorre interferência destrutiva, pois a amplitude da onda resultante é zero, sendo completamente anulada pela subtração das amplitudes das ondas individuais.

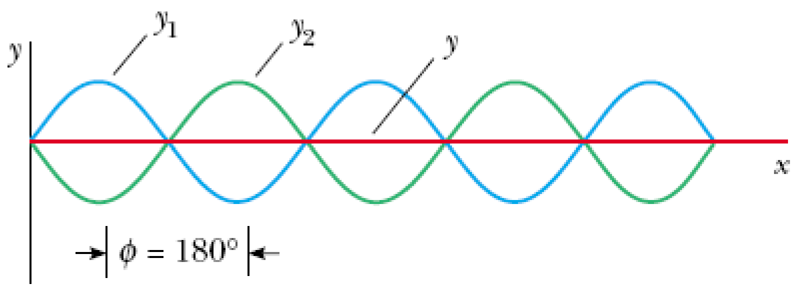


Figura 5.3: Superposição de duas ondas harmônicas em contra fase. Nesse caso ocorre interferência destrutiva.

3.) Quando o ângulo φ tem valor que não é nem zero nem múltiplo inteiro de π, a amplitude resultante tem valor entre 0 e $2\cdot A$, i.e., ocorre o caso da interferência que se encontra entre os extremos descritos nos itens 1) e 2).

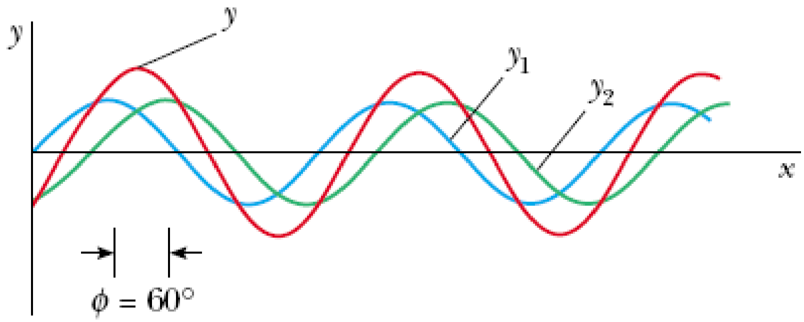


Figura 5.4: Superposição de duas ondas harmônicas cuja diferença de fase é 60^0.

Toda discussão acima pode ser estendida para propagação em duas ou três dimensões. Um caso que serve como um bom exemplo é a interferência de duas ondas circulares em um tanque de água. Neste caso o padrão de interferência resulta da superposição dos máximos e mínimos da onda em determinados pontos, como mostra a Figura 5.5.

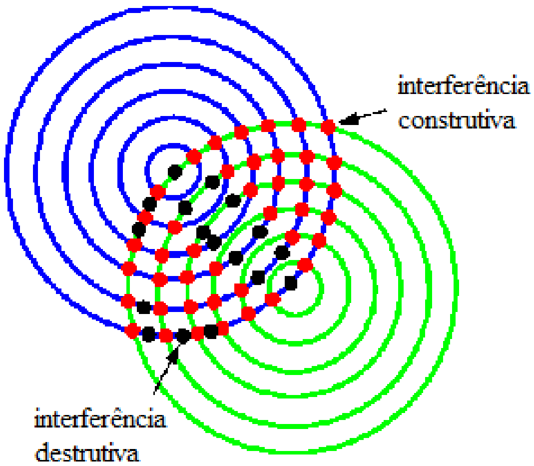


Figura 5.5: Padrão da interferência entre duas ondas circulares, bi-dimensionais. São ilustrados somente os pontos do espaço onde ocorre ampliação máxima e destruição total da amplitude.

Os círculos concêntricos denotam as cristas das ondas (amplitude máxima positiva). Nos pontos do espaço onde esses círculos se cruzam, ocorre ampliação de amplitude, i.e., interferência construtiva. A distância entre duas cristas é igual a um comprimento de onda. Na metade dessa distância cada onda individual apresenta amplitude máxima negativa. Portanto, nas regiões do espaço onde se cruzam esses pontos com os círculos ocorre anulação da amplitude, i.e., interferência destrutiva. Essas duas situações extremas são apresentadas na Figura 5.5.

Aprendemos que a diferença de fase entre duas ondas é muito importante para definir o padrão de interferência entre elas. Essa diferença pode ser expressa em termos da diferença dos caminhos percorridos pelas ondas. Veja como: se uma onda harmônica é descrita pela função da onda $y_1(x,t) = A \cdot \text{sen}(kx - \omega t)$ e outra pela função $y_2(x+\lambda,t) = A \cdot \text{sen}[k(x+\lambda) - \omega t]$, é óbvio que a segunda onda está deslocada em relação à primeira por uma distância igual a $\Delta x = \lambda$. Porém, ao mesmo tempo:

$$y_2(x+\lambda,t) = A\cdot \text{sen}[k(x+\lambda)-\omega t] = A\cdot \text{sen}[\frac{2\pi}{\lambda}(x+\lambda)-\omega t] =$$

$$= A\cdot \text{sen}[\frac{2\pi}{\lambda}x + 2\pi - \omega t] = A\cdot \text{sen}(kx-\omega t+2\pi)$$

e vemos que a segunda onda exibe uma diferença de fase de 2π em relação a primeira! Portanto, a diferença de fase entre as duas ondas $\Delta\varphi = 2\pi$ corresponde à diferença de caminhos entre elas igual a um comprimento de onda λ. Dito em outras palavras, a diferença dos caminhos entre duas ondas idênticas cria diferença de fase entre elas. Com isso, podemos estabelecer uma "regra de três" e relacionar qualquer diferença de fase $\Delta\varphi$ com diferença dos caminhos Δx que a corresponde:

$$\lambda \text{ corresponde a } 2\pi \text{, então } \Delta x \text{ corresponde a } \Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\Delta\varphi} \tag{5.6}$$

A equação (5.6) permite calcular a diferença dos caminhos entre duas ondas, necessária para produzir a diferença de fase desejada entre elas. Por exemplo, se queremos ter duas ondas idênticas que diferem de fase por 180^0 ($\Delta\varphi = \pi$), precisamos introduzir uma diferença dos caminhos igual à metade do seu comprimento da onda:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi}\cdot\pi = \frac{\lambda}{2}$$

Nesse caso, claramente, teremos interferência destrutiva entre as duas ondas, pois eles se encontrarão em contra fase (o máximo da primeira combina com mínimo da segunda e vice-versa, como na Figura 5.3).

Uma demonstração simples da interferência das ondas sonoras, induzidas por combinação das ondas que percorrem caminhos diferentes, é ilustrada na Figura 5.6.

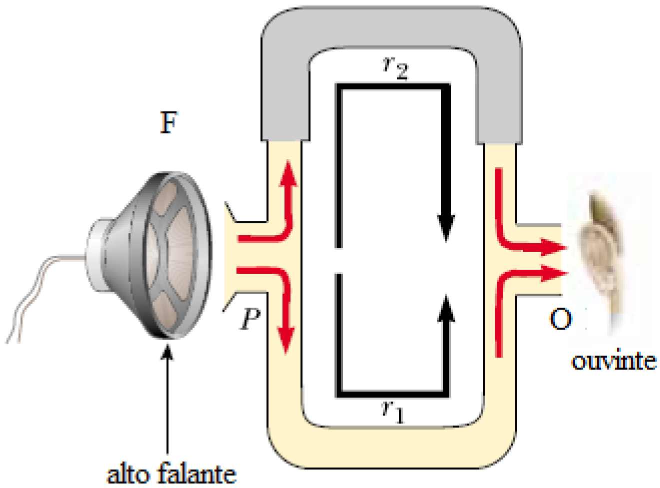


Figura 5.6: Sistema acústico que demonstra a interferência das ondas sonoras. O som produzido pelo alto falante se divide em duas partes que percorrem caminhos diferentes até chegar ao ouvinte, onde elas se superpõem. O caminho superior r_2 é variável.

As ondas sonoras produzidas por um alto falante são divididas e percorrem caminhos r_1 e r_2 até chegar ao observador. O tubo inferior é fixo, e o superior é móvel. Portanto, r_1 é fixo e r_2 pode variar. Como as ondas se originam da mesma fonte, elas estão em fase quando saem do alto falante. Chegando ao ouvinte, isto não é mais verdade, porque existe diferença dos caminhos $\Delta r = r_2 - r_1$ entre elas, que causa diferença de fase. Sempre quando $\Delta r = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, ...$ (múltiplo inteiro de λ) ocorre interferência construtiva, e o ouvinte ouve a intensidade máxima do som. Quando $\Delta r = \lambda/2, 3\cdot\lambda/2, 5\cdot\lambda/2, ...$ (múltiplo inteiro de $\lambda/2$), ocorre interferência destrutiva e o observador registra a intensidade mínima do som.

5.2 Ondas estacionárias

Até agora, discutimos somente interferência das ondas que se propagam na mesma direção. Uma situação importante acontece, porém, quando as duas ondas idênticas se propagam ao longo da mesma direção, mas em sentidos opostos.

Vamos, então, considerar uma onda progressiva que se propaga num dado meio ao longo do eixo x, no sentido positivo,

$$y_1(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t) \tag{5.7}$$

e outra, idêntica, que se propaga no sentido negativo

$$y_2(x,t) = A\text{sen}(kx + \omega t) \tag{5.8}$$

Estas duas ondas vão coexistir no mesmo meio ao mesmo tempo e, portanto, vão se sobrepor. Pelo princípio da superposição sabemos que a onda total será descrita pela seguinte função de onda:

$$y(x,t) = y_1 + y_2 = A[\text{sen}(kx - \omega t) + \text{sen}(kx + \omega t)]$$

Usando a transformação trigonométrica,

$$\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha - \beta}{2})\,\text{sen}(\frac{\alpha + \beta}{2})$$

a onda resultante é descrita pela seguinte função:

$$y(x,t) = \left[2A\,\text{sen}(kx)\right]\cos(\omega t) \tag{5.9}$$

O que nos diz esta expressão? Que a onda resultante deixou de ser uma onda progressiva, i.e., uma onda que se propaga, porque o fator conjunto $kx - \omega t$ desapareceu. O padrão formado é chamado **onda estacionária,** que é o resultado da superposição de duas ondas de mesma frequência, mesma amplitude, mesmo comprimento de onda, mesma direção e sentidos opostos.

Uma forma de desvendar o que é que descreve a expressão (5.9) é fazendo um gráfico da "história", ou sequência, de fotografias da onda. A Figura 5.7 apresenta várias fotografias sobrepostas, tiradas nos instantes consecutivos t=0, t=T/12, t=T/6, t=T/4, t=T/3, t=5T/12 e t=T/2 (onde o T é período das ondas individuais). Analisando estas fotografias, chega-se a conclusão que as partículas do meio realizam oscilações em torno das posições de equilíbrio. O mesmo acontece quando uma onda progressiva passa pelo meio, mas com uma grande diferença: nesse caso todas as partículas oscilam com mesma amplitude. Na presença de uma onda estacionária, a amplitude de oscilação de cada partícula depende da sua posição!

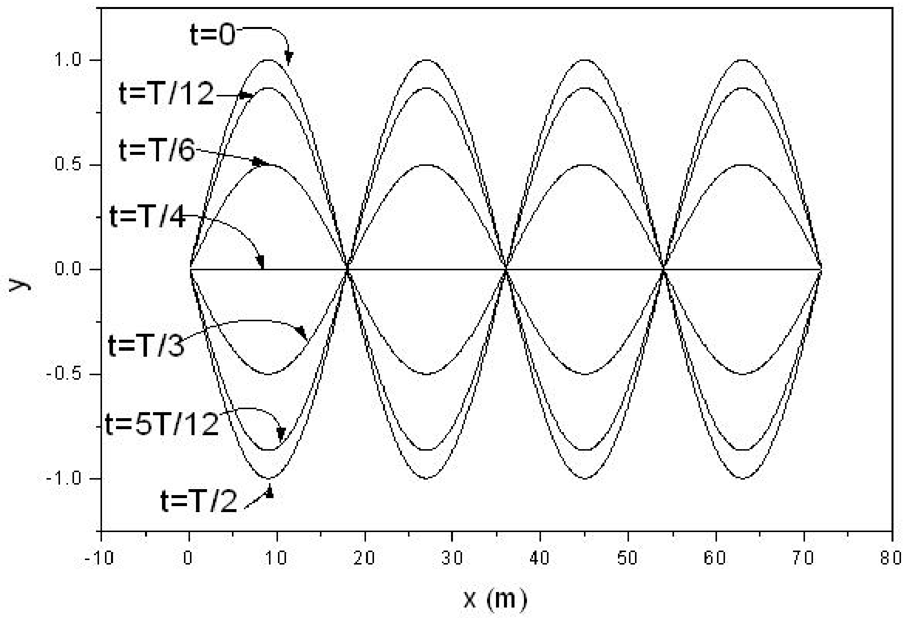


Figura 5.7: Representação de uma onda estacionária em vários instantes de tempo, durante a metade do ciclo.

A mesma conclusão pode ser retirada analisando a equação (5.9). A elongação de qualquer partícula do meio, na posição fixa x, é descrita pelo produto de uma amplitude constante ($2A\mathrm{sen}(kx)$) e do fator $\cos(\omega t)$, que é característica do movimento harmônico simples (MHS). Portanto, cada partícula do meio oscila executando o MHS, mas com amplitude cuja **magnitude depende da posição**.

A Figura 5.7 também revela a existência dos pontos que nunca vibram, e, ao outro extremo, os pontos que vibram com amplitude máxima.

Quando as posições x satisfazem as condições: $kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, ...$ o seno na equação (5.9) é igual a um, e as partículas do meio estacionadas nessas posições oscilam com amplitude máxima, $2A$, que é duas vezes maior do que a amplitude de cada onda individual. Estas posições são chamadas **antinodos**, e dependem do comprimento de onda:

$$x = \frac{\pi/2}{k}, \frac{3\pi/2}{k}, \frac{5\pi/2}{k}, ...$$

Levando em conta que $k = 2\pi/\lambda$, as posições dos antinodos são determinadas por:

$$x = \frac{\lambda}{4}, 3\cdot\frac{\lambda}{4}, 5\cdot\frac{\lambda}{4}, ... = (2n+1)\cdot\frac{\lambda}{4} \qquad (5.10)$$

onde n é um número inteiro, incluindo zero ($n = 0,1,2,3...$). Percebe-se que todos os antinodos são espaçados igualmente, por um intervalo $\lambda/2$.

Por outro lado, quando as posições x satisfazem as condições: $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...$ o seno na equação (5.9) é igual a zero, e as partículas do meio situadas nestas posições não oscilam. Estas posições são chamadas **nodos**, e também dependem do comprimento de onda:

$$x = \frac{\lambda}{2}, 2\cdot\frac{\lambda}{2}, 3\cdot\frac{\lambda}{2}, ... = n\cdot\frac{\lambda}{2} \qquad (5.11)$$

onde n é um número inteiro, incluindo zero. Os nodos são, bem como antinodos, espaçados igualmente, por um intervalo $\lambda/2$. Comparando as equações (5.10) e (5.11), percebe-se também que ao longo da direção de formação de uma onda estacionária, nodos e antinodos são alternados regularmente: nodo, antinodo, nodo, antinodo etc, separados por uma distância $\lambda/4$.

Sabendo o significado de nodos e antinodos, podemos discutir outra grande diferença entre uma onda progressiva e uma onda estacionária. Essa diferença refere-se à questão do transporte da energia. Uma onda progressiva transporta energia pelo espaço, e uma onda estacionária não! Como a energia é transportada através da vibração das partículas do meio, e como os nodos da onda estacionaria estão sempre em repouso, não pode haver passagem de energia por eles, não havendo, então, o transporte de energia. A energia da onda estacionária está presa no espaço!

Na prática, uma onda estacionária pode ser produzida através de uma corda fixada em uma das suas extremidades. Com uma fonte, faz-se a extremidade livre vibrar com movimentos verticais periódicos, produzindo-se perturbações que se propagam pela corda. Ao atingirem a extremidade fixa, elas se refletem, retornando com sentido de deslocamento contrário ao anterior. Dessa forma, as perturbações se superpõem às outras que estão chegando à parede, originando o fenômeno das *ondas estacionárias* (figura 5.8).

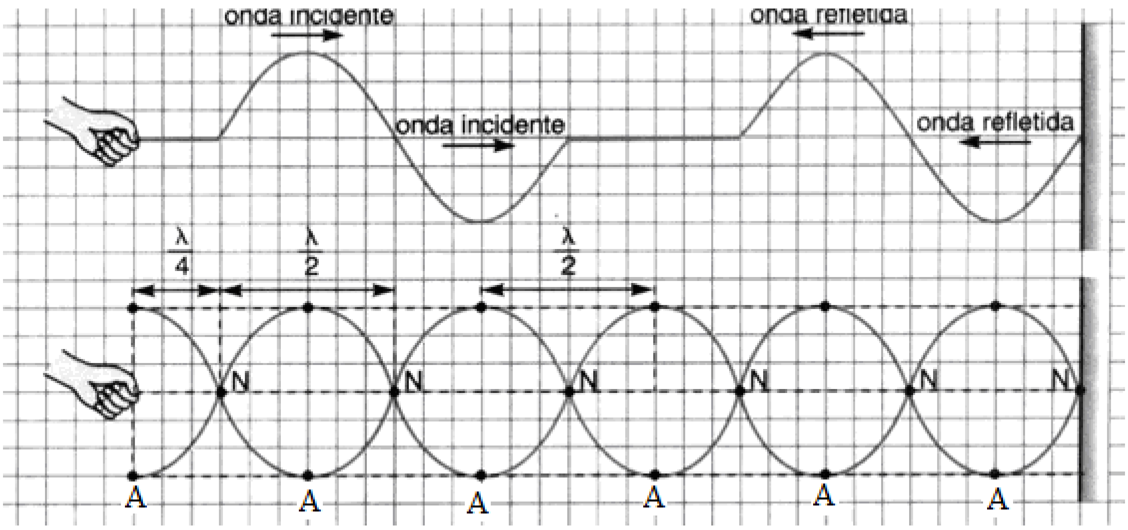


Figura 5.8: Formação de uma onda estacionária. A letra N denota os nodos, e a letra A antinodos.

5.3 Ondas estacionárias em cordas

Podemos aplicar à vibração da corda o que já aprendemos sobre ondas estacionárias: se uma onda incidir inicialmente numa das extremidades, ela será refletida da outra extremidade, e a sobreposição das duas ondas idênticas formará um padrão estacionário, com nodos e antinodos.
No caso de uma corda com as duas extremidades fixas, ao provocar uma perturbação vertical nela, haverá superposição contínua das ondas incidentes e refletidas. Este sistema forma a base da fonte sonora de todos os instrumentos musicais de corda (violino, guitarra, violoncelo etc).
Para analisar as características das ondas estacionárias formadas em uma corda fixa em ambos os lados, utilizaremos dois fatos:

(1) as extremidades fixas têm que ser nodos, pois, por estarem fixas, não podem vibrar;

(2) nodos e antinodos devem ser alternados e igualmente espaçados, separados por $\lambda/4$ (que é, como vimos, uma propriedade geral das ondas estacionárias).

Assim, as possibilidades permitidas para o padrão estacionário de vibração são os que se apresentam a seguir, na figura 5.9.

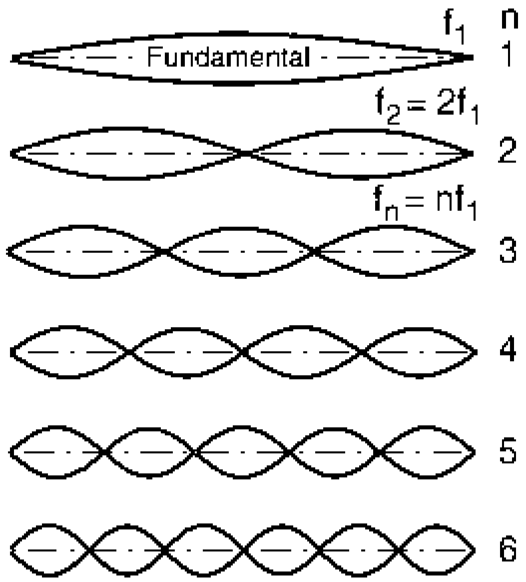


Figura 5.9: Padrões permitidos de onda estacionária que se formam em uma corda de dois lados fixos. O n denota o número de antinodos entre os nodos nas laterais fixas da corda.

O padrão (ou modo) de vibração mais simples ocorre quando, entre dois lados fixos (nodos), existe somente um antinodo (topo da Figura 5.9). Se o comprimento da corda for L, essa será a distância entre dois nodos, e pelo fato 2 surge que:

$$L = \frac{\lambda}{2}$$

O segundo modo de vibração ocorre quando entre dois nodos laterais existe mais um nodo. Isso implica na existência de dois antinodos, posicionados simetricamente entre os três nodos, como mostrado no segundo gráfico abaixo de topo da figura 5.9. Neste caso a distância entre dois nodos é $L/2$, e:

$$\frac{L}{2} = \frac{\lambda}{2} \text{ ,i.e.,} \quad L = 2\frac{\lambda}{2}$$

Percebe-se que o comprimento de onda do segundo modo de vibração é diferente do que do primeiro modo, i.e., é exatamente duas vezes menor. No terceiro modo de vibração, entre nodos laterais existem dois nodos, e consequentemente, três antinodos. Neste caso a distância entre dois nodos consecutivos é de $L/3$ e, portanto:

$$\frac{L}{3} = \frac{\lambda}{2} \text{ , i.e.,} \quad L = 3\frac{\lambda}{2}$$

É fácil de perceber que a generalização deste resultado é:

$$L = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, 4...$$

Este resultado quer dizer que apenas alguns modos de vibração estacionária são permitidos numa corda com as extremidades fixas. Esses modos de vibração têm, necessariamente, comprimentos de onda da forma:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, 4... \tag{5.12}$$

isto é, eles são submúltiplos de 2L. Dito em outras palavras, uma corda com as extremidades fixas não pode vibrar de qualquer maneira: ela pode produzir apenas vibrações que tenham comprimento de onda submúltiplo de 2L! Diz-se ainda que os comprimentos de onda são **quantizados** (os valores são discretos, e não contínuos).

Podemos a seguir traduzir este resultado em termos da frequência. Lembrando que $f = v/\lambda$ e que a velocidade de propagação da onda não depende da frequência, temos que:

$$f_n = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, 4... \tag{5.13}$$

Somente essas frequências são permitidas, sendo quantizadas, bem como os comprimentos da onda. Percebe-se que todas essas frequências são múltiplos inteiros de uma frequência mais baixa, $v/2L$, que é chamada **frequência fundamental**, ou **primeiro harmônico**. Outras frequências são duas, três, quatro etc vezes mais altas do que a fundamental, e são chamados segundo, terceiro, quarto etc harmônico.

n=1: $\rightarrow$ f_1 (primeiro harmônico)

n=2: $\rightarrow$ f_2 (segundo harmônico)

.

.

.

n=n $\rightarrow$ f_n (n-gésimo harmônico)

.

.

O conjunto dos harmônicos forma o conjunto dos **modos normais** de vibração da corda. O termo quer dizer que qualquer vibração de uma corda tem necessariamente de consistir de combinação linear das vibrações descritas por modos normais. Então, em qualquer vibração mais complexa que contém uma mistura de frequências, nós sabemos exatamente quais frequências podem ser misturadas!

Sabendo que a velocidade de propagação da onda na corda é $v = \sqrt{T/\mu}$, onde T é a tensão da corda e μ sua densidade linear, as frequências dos harmônicos podem ser expressas da seguinte forma:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{5.14}$$

A equação (5.14) permite uma discussão quantitativa sobre as maneiras de se modificar o som nos instrumentos musicais da corda, e assim produzir a música. Vamos considerar um violão, por exemplo. Existem exatamente três maneiras de se modificar a frequência dos harmônicos nas cordas do violão:

(1) variando tensão das cordas (que é feito durante a afiação do instrumento); aumentando a tensão, as frequências de todos harmônicos aumentam; o som, que contém a combinação dos harmônicos, fica mais agudo.

(2) variando o comprimento da corda (que é feito com a pressão dos dedos em determinados pontos da corda); encurtando mais a corda, L fica menor e as frequências dos harmônicos sobem; o som fica mais agudo.

(3) variando a densidade linear da corda (existem 6 cordas no violão, cada uma com diâmetro diferente); as cordas mais grossas produzem som mais grave (baixos), pois pela equação (5.14) as frequências dos harmônicos são inversamente proporcionais a μ .

5.4 Ondas estacionárias em colunas do ar

As ondas estacionárias podem ser criadas em colunas de ar exatamente da mesma forma que nas cordas. O princípio é o mesmo: a onda sonora incidente é refletida, a onda refletida interfere construtivamente com a onda incidente e se forma o padrão da onda estacionária. No caso da corda, tivemos a oscilação da própria corda. No caso das colunas de ar, temos o movimento oscilatório das moléculas do ar, descrito pelas ondas de deslocamento e (ou) pressão, como aprendemos na aula 04. Ondas estacionárias que se formam em colunas de ar formam o padrão para produzir som em todos os instrumentos musicais de sopro (tuba, trombone, flauta...).
Podemos usar a analogia com as cordas para perceber o que acontece nas colunas de ar. No caso das cordas concluímos que as extremidades têm de ser nodos porque estão fixas. No caso das colunas de ar discutiremos dois casos distintos, ilustrados na Figura 5.10: as colunas de ar abertas nas duas extremidades e as colunas de ar fechadas numa das extremidades.

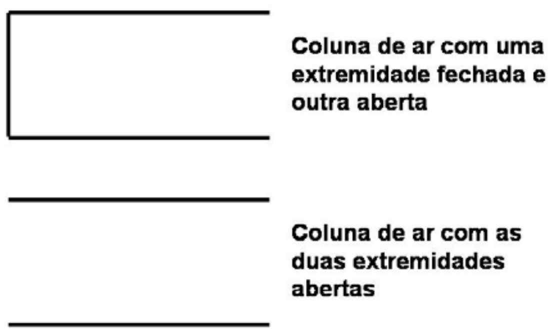


Figura 5.10: Dois tipos de colunas de ar usadas nos instrumentos musicais de sopro.

Primeiramente vejamos então o que podemos dizer sobre as duas extremidades diferentes.

• <u>extremidade fechada</u>

Se pensarmos em termos das ondas de deslocamento das partículas, compreendemos que a extremidade fechada tem de ser um nodo. Isso acontece porque as moléculas junto à parede não podem oscilar (batem na parede). Portanto, o deslocamento das moléculas encostadas à parede é zero. A extremidade fechada comporta-se como a extremidade fixa de uma corda, i.e., como um nodo de deslocamento.

• <u>extremidade aberta</u>
Neste caso é melhor pensar em termos de ondas de pressão. A extremidade aberta deve ser um nodo para as ondas de pressão. Por quê? Porque a extremidade da coluna está à pressão atmosférica, e a pressão atmosférica é constante, não se altera. Portanto a amplitude de variação da onda de pressão na extremidade da coluna deve ser nula: teremos um nodo na onda de pressão (isso vale somente aproximadamente, pois a pressão não se reduz à pressão atmosférica imediatamente na saída da coluna, mas um pouco depois). Lembre-se agora que as ondas de deslocamento e pressão estão defasadas por 90^o (aula 04), o que significa que quando a onda de pressão está no máximo, a onda de deslocamento está em zero, e vice-versa. Isto quer dizer que um nodo da onda de pressão (amplitude de oscilação nula) é um antinodo da onda de deslocamento (amplitude de oscilação máxima). Portanto, enquanto uma extremidade fechada origina um nodo para onda de deslocamento, uma extremidade aberta origina um antinodo para onda de deslocamento.

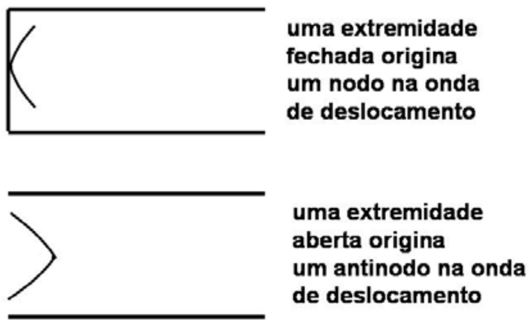


Figura 5.11: Condições de contorno nos casos de uma extremidade fechada e uma extremidade aberta.

5.4.1 Colunas do ar com ambas as extremidades abertas

Discutiremos primeiro as colunas abertas nas duas extremidades. De acordo com o que vimos antes temos de ter um antinodo em cada uma das extremidades. Lembrando o fato de que os nodos e antinodos são alternados e igualmente espaçados, o modo mais simples ocorre quando existe um nodo no meio da coluna entre dois antinodos extremos, o que está ilustrado na Figura 5.12:

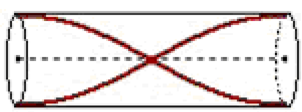


Figura 5.12: Modo fundamental (primeiro harmônico) da onda estacionária numa coluna de ar com extremidades abertas.

Neste caso o comprimento da coluna (L) corresponde ao meio comprimento de onda, pois meio comprimento de onda é o que vai de um máximo da onda até o mínimo. Chega-se a mesma conclusão utilizando o fato que a distância entre dois antinodos é igual ao meio comprimento da onda. Determinamos então o comprimento de onda e a frequência do primeiro harmônico:

$$L = \frac{\lambda_1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2L \equiv \frac{2L}{1}$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L} \tag{5.15}$$

O segundo modo de oscilação das moléculas do ar é realizado com um antinodo no meio da coluna, e dois nodos entre ele e antinodos extremos, que está ilustrado na figura 5.13:

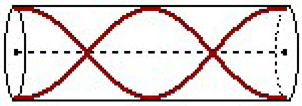


Figura 5.13: Segundo harmônico da onda estacionária numa coluna de ar com extremidades abertas.

Neste caso, o comprimento da coluna corresponde a um comprimento de onda, pois um comprimento de onda é a distância entre dois máximos sucessivos. Determinamos então o comprimento de onda e a frequência do segundo harmônico:

$$L = \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = L \equiv \frac{2L}{2}$$

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{L} = 2 \cdot \frac{v}{2L} = 2 \cdot f_1 \tag{5.16}$$

Observa-se que o comprimento de onda do segundo harmônico é metade do comprimento de onda do primeiro harmônico, e a frequência é dobrada.

O terceiro modo de oscilação está ilustrado na figura 5.14.

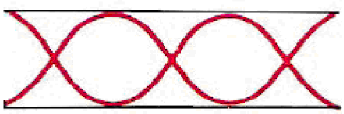


Figura 5.14: Terceiro harmônico da onda estacionária numa coluna de ar com extremidades abertas.

Neste caso, o comprimento da coluna corresponde a um e meio ($3/2$) comprimentos de onda. Portanto, o comprimento de onda e a frequência do terceiro harmônico são:

$$L = \frac{3}{2}\lambda_3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = \frac{2L}{3} \tag{5.17}$$

$$f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{v}{\frac{2}{3}L} = 3 \cdot \frac{v}{2L} = 3 \cdot f_1$$

Podemos agora fazer uma generalização para todos os outros harmônicos, seguindo as dicas das equações (5.15) – (5.17). O comprimento de onda do n-ésimo modo é:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{5.18}$$

com frequência correspondente:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \cdot \frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{5.19}$$

onde o v é velocidade de propagação do som no ar. Assim, concluímos que numa coluna de ar com as duas extremidades abertas, são possíveis todos os modos de vibração correspondentes aos harmônicos com múltiplo inteiro da frequência fundamental $v/2L$.

5.4.2 Colunas de ar com uma extremidade aberta e outra fechada

Vamos, a seguir, considerar colunas de ar fechadas somente numa das extremidades. A onda estacionária mais simples tem um nodo na extremidade fechada e um antinodo na extremidade aberta, tal como ilustrado na Figura 5.15.

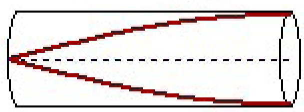


Figura 5.15: Modo fundamental (primeiro harmônico) da onda estacionária numa coluna de ar com uma extremidade aberta e outra fechada.

Neste caso todo o comprimento da coluna L é atravessado por apenas um quarto de comprimento de onda. Então, o modo fundamental é caracterizado pelo seguinte comprimento de onda e frequência:

$$L = \frac{\lambda_1}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 4L \equiv \frac{4L}{1}$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4L} \tag{5.20}$$

Em comparação com o caso de coluna com ambas as extremidades fechadas, o comprimento de onda é duas vezes maior, enquanto a frequência é duas vezes menor. O segundo modo está ilustrado na Figura 5.16. Este modo tem mais um nodo e um antinodo no meio.

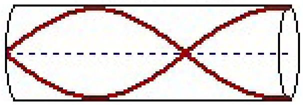


Figura 5.16: Segundo modo de oscilação da onda estacionária (terceiro harmônico) numa coluna de ar com uma extremidade aberta e outra fechada.

Neste caso todo o comprimento da coluna é atravessado por três quartos de comprimento de onda. Então, para o segundo modo temos:

$$L = \frac{3}{4}\lambda_3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = \frac{4L}{3}$$

$$f_3 = \frac{v}{\lambda_3} = 3\frac{v}{4L} \equiv 3 \cdot f_1 \tag{5.21}$$

A última igualdade permite compreender porque se usou o subscrito 3 e não 2: porque efetivamente a frequência do segundo modo é tripla do modo fundamental. Portanto podemos dizer que não há segundo harmônico, há só terceiro harmônico. O terceiro modo, que corresponde ao quinto harmônico, tem dois nodos e dois antinodos no meio, e está ilustrado na Figura 5.17.

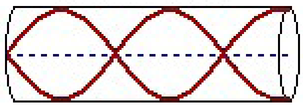


Figura 5.17: Terceiro modo de oscilação da onda estacionária (quinto harmônico) numa coluna de ar com uma extremidade aberta e outra fechada.

Esse modo tem, em total, três nodos e três antinodos. O comprimento da coluna corresponde a um comprimento de onda inteiro e mais ainda um quarto de comprimento de onda, ou seja, a 5/4 de comprimento de onda. Portanto:

$$L = \frac{5}{4}\lambda_5 \quad \Rightarrow \quad \lambda_5 = \frac{4L}{5}$$

$$f_5 = \frac{v}{\lambda_5} = 5\frac{v}{4L} \equiv 5 \cdot f_1 \tag{5.22}$$

o que mostra que realmente se trata do quinto harmônico. Generalizando a sequência estabelecida pelas equações (5.20) – (5.22), podemos concluir que o comprimento de onda do n-ésimo modo é:

$$\lambda_{2n-1} = \frac{4L}{2n-1} \qquad n = 1, 2, 3, 4... \tag{5.23}$$

e a frequência correspondente:

$$f_{2n-1} = \frac{v}{\lambda_{2n-1}} = (2n-1)\frac{v}{4L} = (2n-1) \cdot f_1 \qquad n = 1, 2, 3, 4... \tag{5.24}$$

Os valores de $2n-1$ correspondem aos números ímpares. Assim, concluímos que numa coluna de ar com uma extremidade fechada são possíveis apenas modos de vibração correspondentes aos múltiplos inteiros ímpares da frequência fundamental $v/4L$.

A partir das equações (5.19) e (5.24) podemos discutir como funcionam os instrumentos musicais de sopro. Obviamente, existe uma única maneira de mudar frequências dos harmônicos, e, portanto, de variar o som do instrumento: variando o comprimento da coluna do ar! Nos instrumentos de madeira isso se faz com dedos, tampando os furos (furo se comporta como extremidade aberta). No caso dos instrumentos de metal, o comprimento da coluna de ar é mudado por uma seção ajustável.

5.5 Batimentos

Até agora discutimos somente superposição das ondas com mesma frequência. A interferência entre essas ondas ocorre devido ao deslocamento espacial, i.e., diferentes caminhos que elas percorrem. Esse tipo de interferência é chamado **interferência espacial**. Quando se trata da combinação de ondas com frequências diferentes, digamos que ocorre **interferência temporal**. Neste caso não se forma um padrão estável de interferência, pois as posições de ocorrência dos máximos e mínimos mudam com tempo.

Designamos por **batimento** um fenômeno que acontece quando existe uma superposição entre duas ondas que possuam a mesma direção, amplitude e frequências ω_1 e ω_2 diferentes, mas próximas. Pelo fato das frequências diferirem uma da outra, haverá momentos de interferência construtiva, onde a amplitude resultante será grande e momentos de interferência destrutiva, resultando numa amplitude diminuída. Vamos analisar essa situação matematicamente. Consideraremos um ponto particular do espaço, $x=0$ (pode ser a posição do nosso ouvido, por exemplo), e veremos o que acontece. Duas ondas chegam nesse ponto:

$$\begin{aligned} y_1(0,t) &= A\cos(\omega_1 t) \\ y_2(0,t) &= A\cos(\omega_2 t) \end{aligned} \tag{5.25}$$

e se superpõem**,** formando uma onda resultante:

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right]$$

Usando a identidade trigonométrica: $\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, a onda resultante tem a seguinte forma:

$$y(0,t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\,t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t\right) \tag{5.26}$$

O resultado é apresentado pelo gráfico na figura 5.18. Em certos instantes as ondas y_1 e y_2 estão em fase: seus máximos coincidem e as duas amplitudes se somam. Porém, como as frequências são diferentes, duas ondas não podem ficar sempre em fase. Em certos instantes elas se encontram completamente fora de fase, produzindo cancelamento total de amplitude.

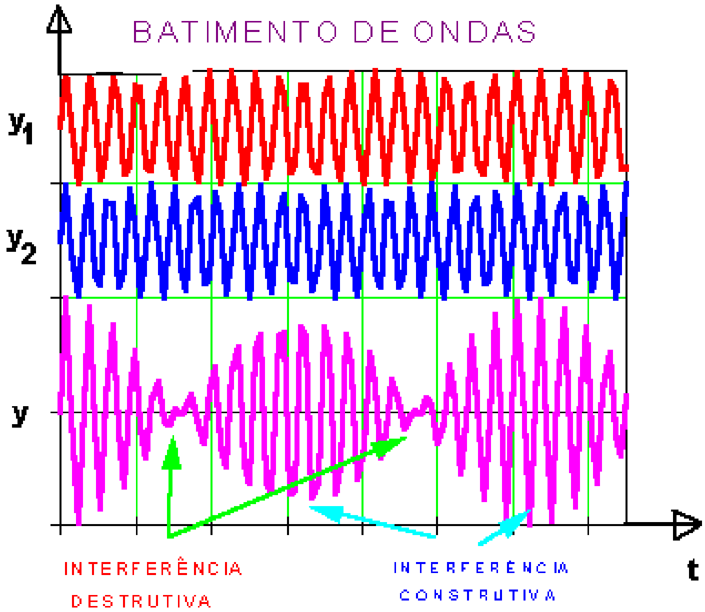


Figura 5.18: Superposição de duas ondas com frequências ligeiramente diferentes. É mostrado como a elongação de certo elemento do meio depende do tempo.

A equação (5.26) não descreve o movimento harmônico simples. Porém, podemos considerar esse movimento como oscilação harmônica com uma amplitude modulada. A elongação é igual ao produto de uma amplitude variável ($2A\cos(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)$) e de um fator harmônico ($\cos(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)$). Então, a onda resultante tem frequência angular $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, porém a amplitude não é constante, mas varia no tempo com frequência $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$. Caso y_1 e y_2 descrevessem ondas sonoras, nosso ouvido perceberia aumentos e diminuições periódicas da intensidade sonora (pois a intensidade do som é proporcional ao quadrado da amplitude). Os máximos de amplitude correspondem aos batimentos. Como existem dois máximos de amplitude em cada ciclo completo, a frequência dos batimentos é:

$$f_b = f_1 - f_2 \tag{5.27}$$

i.e., igual a diferença das frequências das ondas individuais. Um exemplo familiar do batimento é aquele produzido por dois diapasões, ou por duas cordas de guitarra de frequências parecidas. Neste caso, ouvimos um som de intensidade variável, cuja frequência de batimento f_b é a subtração das duas frequências envolvidas.

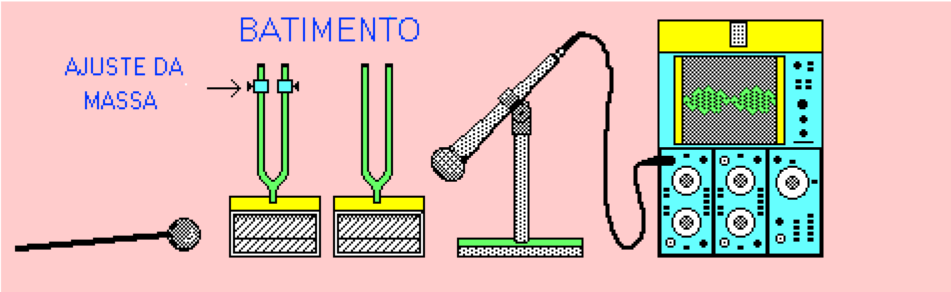


Figura 5.19: Batimentos produzidos por dois diapasões com frequências ligeiramente diferentes.

Se o primeiro diapasão produz som com uma frequência de 100 Hz, e outro de 110 Hz, o instrumento vai registrar batimentos com frequência de 10 Hz, i.e., 10 batimentos por segundo (figura 5.20).

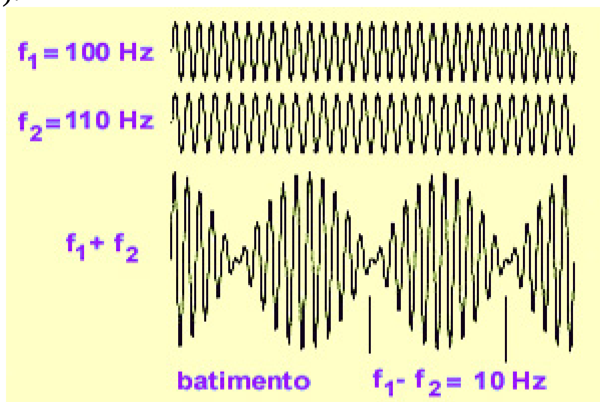


Figura 5.20: Resentação gráfica da interferência temporal das ondas sonoras produzidas por dois diapasões (fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia).

5.6 Ondas não harmônicas

Maioria das ondas que registramos na natureza não são ondas harmônicas. Como um exemplo, a Figura 5.21 mostra as formas das ondas sonoras produzidas por alguns instrumentos musicais. Nenhuma delas pode ser escrita com uma função de senos ou cossenos, i.e., elas não são harmônicas.

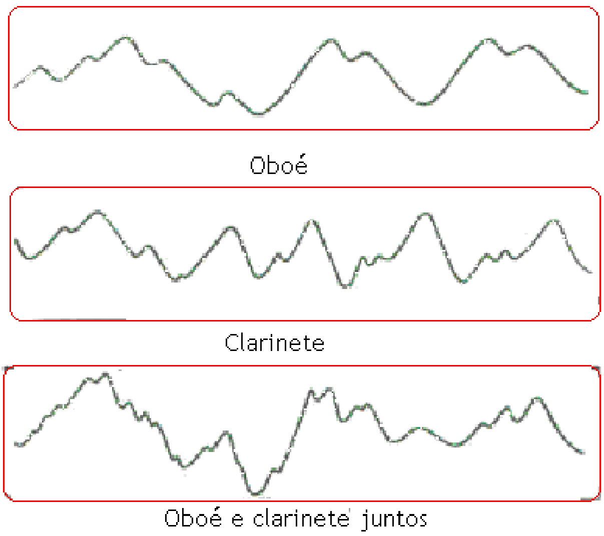


Figura 5.21: Ondas sonoras produzidas por alguns instrumentos musicais.

Porém, muitas ondas periódicas complicadas são misturas de ondas harmônicas de diversas frequências. Ainda mais, mostra-se que qualquer onda periódica pode ser representada como combinação linear das ondas harmônicas, fato provado pelo famoso teorema de Fourier. É difícil imaginar que as ondas mostradas na Figura 5.21 são simplesmente combinação de algumas ondas harmônicas, mas é verdade. Veja por exemplo o que acontece quando se somam três ondas harmônicas, cada uma com frequência e amplitude diferentes, mostradas na Figura 5.22. O resultado é uma onda periódica, mas com forma bem diferente e mais complicada. Essa onda resultante não é caracterizada por uma só frequência, mas por 3.

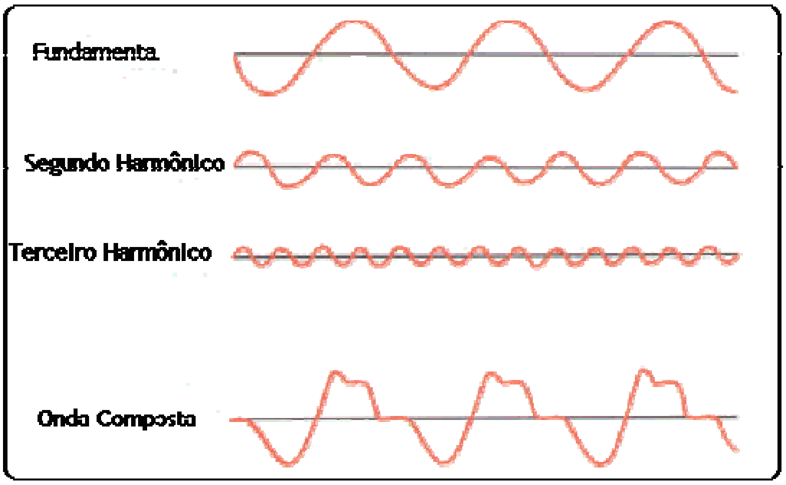


Figura 5.22: A soma de três ondas harmônicas resulta em uma onda resultante mais complicada.

Generalizando essa história (o que realmente fez Fourier), mostra-se que qualquer função periódica $y(t)$: $y(t+T)=y(t)$, onde o T é o período da função, pode ser representada pela seguinte soma:

$$y(t)=\sum_n\left[A_n\mathrm{sen}(\omega_n t)+B_n\cos(\omega_n t)\right] \tag{5.28}$$

onde A_n e B_n são constantes que dependem da forma da função y. A frequência angular mais baixa na equação (5.28), ω_1, chama-se frequência fundamental e corresponde ao período T de função y:

$$\omega_1=\frac{2\pi}{T}$$

As outras frequências são multiplos inteiros da frequência fundamental:

$$\omega_n=n\cdot\omega_1 \quad , \quad n=2,3,4...$$

Se a função y for conhecida, as constantes A_n e B_n são encontradas através de um procedimento conhecido como **análise de Fourier.** Esta análise permite que as ondas não harmônicas sejam decompostas em termos de ondas harmônicas. Ela portanto determina quais harmônicos estão “misturados” dentro da onda real, determina suas intensidades relativas, bem como as frequências que compõem a onda real.

Análise de Fourier é vastamente usada em processamentos de sons e imagens. A decomposição de um som musical em termos de seus harmônicos é conhecida como **espectro de som**. A Figura 5.23 mostra um exemplo desta decomposição.

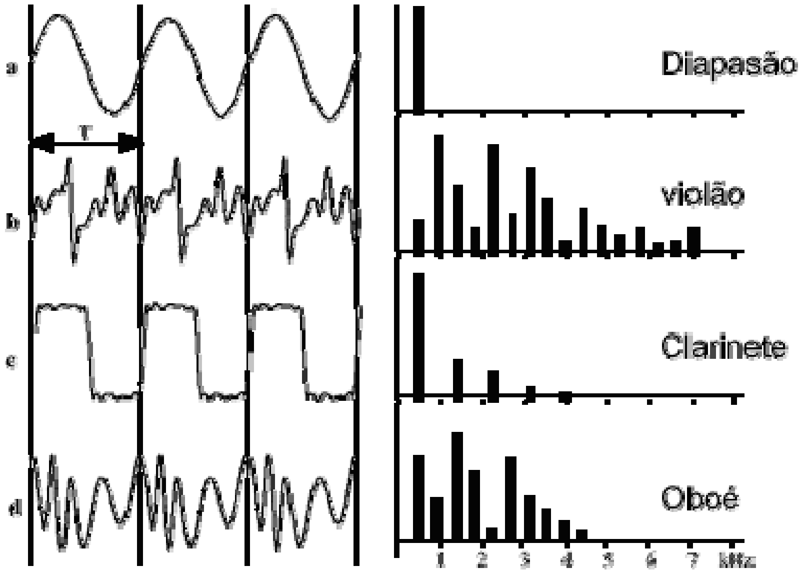


Figura 5.23: Variações de pressão (sons) produzidas por diferentes instrumentos musicais (esquerda), e seus espectros (direita) determinados pela análise de Fourier.

Todas as ondas sonoras na Figura 5.23 têm o mesmo período, pois correspondem a uma mesma nota (têm a mesma altura), mas as formas da onda são bastante diferentes. A qualidade do som que está relacionada à forma da onda é conhecida como **timbre do som.** E todo mundo percebe as diferenças entre sons de diapasão, violão, clarinete e oboé, mas é difícil de explicar essa diferença. A análise de Fourier oferece simples resposta: qualidade desses sons é diferente, porque cada um consiste de número diferente de harmônicos, cuja distribuição pelas frequências também é diferente. Embora a análise de Fourier tenha muitas aplicações em outras áreas da ciência e tecnologia, seu detalhamento matemático sai do foco desse curso e não será abordado aqui.

Joseph Fourier -(1768-1830)

Matemático francês

Bibliografia consultada

Alonso, M. S. e Finn, E. J., *Física*, Ed. Edgard Blucher Editora, São Paulo, 1999.

Young, H. D. e Freedman, R. A. *Física II - Termodinâmica e Ondas*, Pearson Education do Brasil (qualquer edição).

Halliday, D., Resnick, R, Walker, J *Fundamentos de Física 2- Gravitação, Ondas e Termodinâmica,* Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. (qualquer edição).

Questões

01. Quando duas ondas interferem construtivamente ou destrutivamente, há algum ganho ou perda de energia? Explique.

Resposta

Não há nenhum ganho ou perda da energia, somente uma distribuição espacial diferente.

02. O fenômeno da interferência de ondas aplica-se somente às ondas senoidais?

Resposta

Não. Vale em geral para todas as ondas lineares.

03. Como variam as frequências da ressonância de um tubo de órgão quando a temperatura do ar se eleva?

04. Discuta como o fenômeno dos batimentos pode ser usado para afinar instrumentos musicais.

Exercícios

Princípio de superposição

05. Duas ondas em uma corda são descritas pelas funções de onda:

$$y_1 = 3,0 \cdot \cos(4,0x - 1,6t) \quad ; \quad y_2 = 4,0 \cdot \text{sen}(5,0x - 2,0t)$$

onde y e x estão em centímetros e t está em segundos. Encontre a superposição das ondas $y_1 + y_2$ nos pontos (a) x = 1,00, t = 1,00, (b) x = 1,00, t = 0,500, e (c) x = 0,500, t= 0. (Lembre-se de que os argumentos das funções trigonométricas estão em radianos.)

06. Dois pulsos propagando-se na mesma corda são descritos por:

$$y_1 = \frac{5}{(3x - 4t)^2 + 2} \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{-5}{(3x + 4t - 6)^2 + 2}$$

onde y_1, y_2 e x estão em metros, e t em segundos. (a) Em que sentido se propaga cada pulso? (b) Em que instante os dois pulsos se cancelam em toda parte? (c) Em que ponto as duas ondas sempre se cancelam?

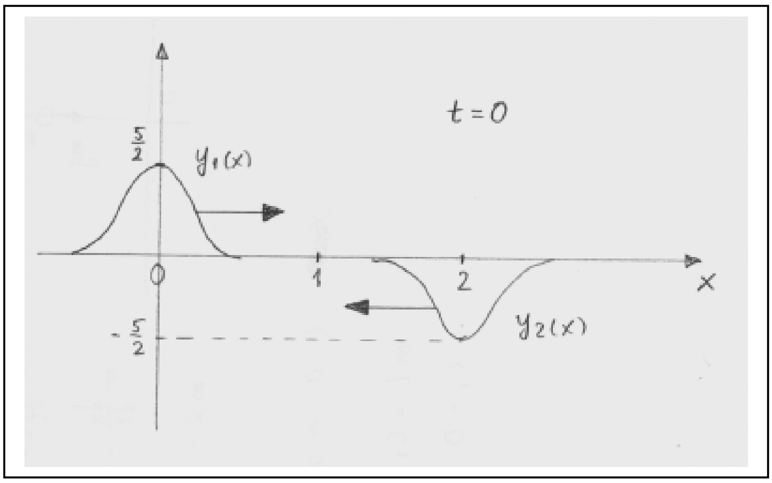
Resposta

Primeiramente faremos algumas transformações simples na forma matemática dos pulsos:

$$y_1 = \frac{5}{9(x - \frac{4}{3}t)^2 + 2} \;;\; y_2 = \frac{-5}{9(x + \frac{4}{3}t - 2)^2 + 2}$$

para que possamos compará-los com a forma matemática geral do movimento ondulatório, $y = y(x \pm vt)$. Assim concluímos que ambos os pulsos executam movimento ondulatório, pois dependem do argumento $x \pm vt$, onde a velocidade é $v = \pm \frac{4}{3}\frac{m}{s}$.

(a) Pulso y_1 move-se ao longo do eixo *x* para a direita, com velocidade $+\frac{4}{3}\frac{m}{s}$.



Pulso y_2 move-se ao longo do eixo *x* para esquerda, com velocidade $-\frac{4}{3}\frac{m}{s}$. Os pulsos são graficamente apresentados na figura abaixo, no instante $t = 0$. Os pulsos são idênticos, mas orientados ao contrário em relação ao eixo *y*. O primeiro é centralizado em cima do ponto $x = 0m$, e o segundo em cima do ponto $x = 2m$, no instante $t = 0$.

(b) Para se cancelarem, os pulsos devem ser centralizados em cima do ponto $x = 1m$. Então, a partir das suas posições iniciais, cada pulso tem que passar a distância $s = 1m$. O tempo que eles precisam para percorrer essa distância é: $t = \frac{s}{v} = \frac{1m}{\frac{4}{3}\frac{m}{s}} = \frac{3}{4}s$.

(c) No ponto $x = 1m$.

Interferência de ondas

07. Duas ondas propagam-se no mesmo sentido ao longo de uma corda esticada. As ondas estão 90,0 ° fora de fase. Cada onda tem uma amplitude de 4,00 cm. Encontre a amplitude da onda resultante.

<u>Resposta</u>

Segundo a equação (5.9), a amplitude da onda resultante e: $A_R = 2A\cos(\frac{\varphi}{2})$. Como $A = 4,00\,cm$ e $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $A_R = 5,66\,cm$.

08. Duas ondas senoidais são descritas pelas funções da onda:

$$y_1 = (5,00\,m)\,\mathrm{sen}\left[\pi(4,00x - 1200t)\right] \quad \text{e} \quad y_2 = (5,00\,m)\,\mathrm{sen}\left[\pi(4,00x - 1200t - 0,250)\right]$$

onde x, y_1 e y_2 estão em metros e t está em segundos. (a) Qual é a amplitude da onda resultante? (b) Qual é a frequência da onda resultante?

09. Duas ondas senoidais idênticas com comprimentos de onda de 3,00 m propagam-se no mesmo sentido a uma velocidade de 2,00 m/s. A segunda onda se origina do mesmo ponto que a primeira, mas em um instante posterior. Determine o intervalo de tempo mínimo entre os instantes iniciais das duas ondas se a amplitude da onda resultante for a mesma que aquela de cada uma das duas ondas iniciais.

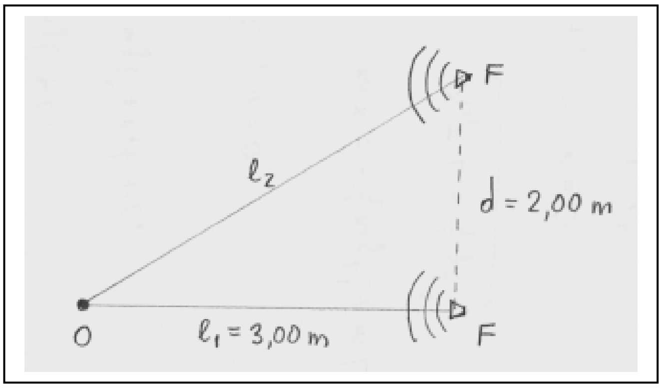
Resposta

Devido ao fato que uma das ondas saiu com atraso, existe uma diferença de fase entre elas. A interferência das duas ondas produz uma onda resultante com amplitude igual aquela das ondas individuais: $2A\cos(\frac{\varphi}{2}) = A$. Resolvendo essa equação pela φ segue: $\cos(\frac{\varphi}{2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$. Agora vamos transformar a diferença de fase φ em correspondente diferença dos caminhos Δs entre as ondas, utilizando a equação (5.6): $\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\Delta s}{\varphi}$. $\Rightarrow \Delta s = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \varphi = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\lambda}{3}$. O tempo que é preciso para que uma das ondas percorra essa distância é exatamente o intervalo de tempo entre as saídas das duas ondas: $\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{\lambda}{3v} = \frac{3,00\,m}{3 \cdot 2,00\,m/s} = 0,5\,s$.

10. Dois alto-falantes são colocados em uma parede a 2,00 m um do outro. Um ouvinte está parado a 3,00 m da parede, diretamente na frente de um dos alto-falantes. Um único oscilador está excitando os alto-falantes em fase a uma frequência de 300 Hz. (a) Qual é a diferença de fase entre as duas ondas quando alcançam o observador? (b) Qual é a frequência mais próxima de 300 Hz a que o oscilador pode ser ajustado de maneira que o observador ouça um som mínimo?

Resposta

As duas ondas chegam ao ouvido de observador com uma diferença de fase induzida por distâncias diferentes percorridas por elas.



Uma onda percorre a distância $l_1 = 3,00\,m$, outra $l_2^2 = l_1^2 + d^2$, i.e., $l_2 = 3,60\,m$. A diferença dos caminhos é, portanto,

$$\Delta l = l_2 - l_1 = 0,60\,m.$$

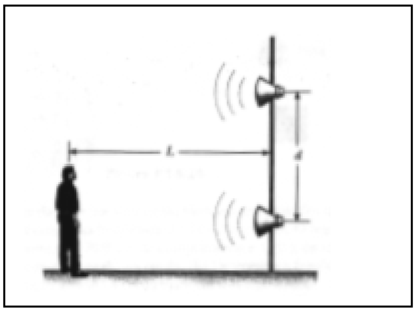
(a) Diferença de fase $\Delta\varphi$ percebida pelo observador é (assumindo que a velocidade de propagação do som é de 343 m/s):

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta l = \frac{2\pi}{\frac{v}{f}}\cdot\Delta l = \frac{2\pi f}{v}\cdot\Delta l = \frac{6,28\,rad\cdot 300\,s^{-1}}{343\,m/s}\cdot 0,60\,m = 3,30\,rad = 189^0$$

(b) A condição para acontecer interferência destrutiva (intensidade mínima do som) é: $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, ...$ com valor π mais próximo a diferença de fase observada (189^0). Portanto, $\Delta\varphi = \frac{2\pi f_1}{v}\cdot\Delta l = \pi$, e a frequência é

$$f_1 = \frac{v}{2\cdot\Delta l} = \frac{343\,m/s}{2\cdot 0,60\,m} = 285,8\,Hz$$

11. Dois alto-falantes são excitados em fase pelo mesmo oscilador de frequência f.



Eles estão separados por uma distância d em um poste vertical. Um homem aproxima-se em linha reta diretamente do alto-falante mais baixo em uma direção perpendicular ao poste, como mostrado na figura. (a) Quantas vezes ele ouvirá um mínimo na intensidade sonora, e (b) a que distância está ele do poste nesses instantes? Represente a velocidade do som por v e suponha que o solo não reflete o som.

Ondas estacionárias

12. Duas ondas senoidais propagando-se em sentidos opostos se interferem para produzir uma onda estacionária com a função de onda

$$y = (1,50\ m)\cdot \mathrm{sen}(0,400\,x)\cdot\cos(200t)$$

onde x está em metros e t está em segundos. Determine o comprimento de onda, a frequência e a velocidade das ondas que se interferem.

13. Dois alto-falantes são excitados em fase por um mesmo oscilador a 800 Hz, estando de frente um para o outro, a uma distância de 1,25 m. Localize os pontos ao longo da linha entre os alto-falantes onde seriam esperados os mínimos da amplitude da pressão sonora. (Utilize v = 343m/s.)

14. Duas ondas que provocam uma onda estacionária em uma corda longa são dadas pelas funções de onda

$$y_1 = A\text{sen}(kx - \omega t + \phi) \quad \text{e} \quad y_2 = A\text{sen}(kx + \omega t)$$

Mostre (a) que a adição da constante de fase arbitrária muda somente a posição dos nodos e, em particular, (b) que a distância entre os nodos ainda é meio comprimento de onda.

<u>Resposta</u>

Superpondo duas ondas: $y = y_1 + y_2 = A\left[\text{sen}(kx - \omega t + \varphi) + \text{sen}(kx + \omega t)\right]$ e aplicando a transformação trigonométrica, chega-se a seguinte forma da onda resultante:

$$y = \left\{2A\text{sen}(kx + \frac{\varphi}{2})\right\} \cdot \cos(\omega t - \frac{\varphi}{2})$$

(a) As posições dos nodos x^N são determinadas pela condição: $\text{sen}(kx^N + \frac{\varphi}{2}) = 0$.

$\Rightarrow \; kx_n^N + \frac{\varphi}{2} = n \cdot \pi \;\; (n = 0,1,2,3...)$, i.e. $x_n^N = \frac{n\pi}{k} - \frac{\varphi}{2k}$. Como $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, as posições dos nodos são dadas por: $x_n^N = n \cdot \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda\varphi}{4\pi}$. Comparando com a equação (5.11) podemos verificar que a posição dos nodos é somente deslocada por um fator constante.

(b) Distância entre quaisquer dois nodos adjacentes é:

$$x_{n+1}^N - x_n^N = \left\{(n+1) \cdot \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda\varphi}{4\pi}\right\} - \left\{n \cdot \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda\varphi}{4\pi}\right\} = \frac{\lambda}{2}$$

15. Duas ondas senoidais que se combinam em um meio são descritas pelas funções de onda

$$y_1 = (3,0\,cm)\text{sen}\left[\pi(x + 0,60t)\right] \quad \text{e} \quad y_2 = (3,0\,cm)\text{sen}\left[\pi(x - 0,60t)\right]$$

onde x está em centímetros e t em segundos. Determine o deslocamento <u>máximo</u> do movimento em (a) x = 0,250 cm, (b) x = 0,500 cm e (c) x = 1,50 cm. (d) Encontre os três menores valores de x que correspondem aos antinodos.

<u>Dica</u>: Some as duas ondas, chegando à forma (5.9) da onda resultante. Calcule as amplitudes nas dadas posições. Determine os antinodos sabendo que nas posições deles a amplitude deve ter valor máximo.

16. Verifique por meio da substituição direta que a função de onda para uma onda estacionária dada por equação

$$y = \left[2A\text{sen}(kx)\right] \cdot \cos(\omega t)$$

é uma solução da equação de onda linear geral: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.

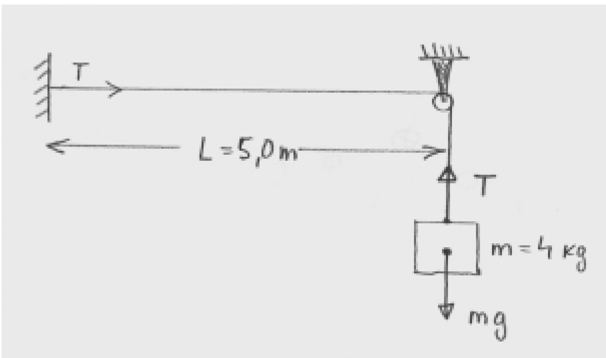
Ondas estacionárias em cordas

17. Um estudante quer produzir uma onda estacionária em um fio cujo comprimento é 1,80 m e está preso nas duas extremidades. A velocidade da onda é 540 m/s. Qual é a frequência mínima que o estudante deve aplicar para formar uma onda estacionária?

18. Uma extremidade de uma corda é ligada a uma parede. A outra extremidade passa sobre uma polia pequena que está a 5,00 m de distância da parede e unida a uma massa suspensa de 4,00 kg. Se a corda for excitada, qual é a frequência fundamental de vibração? A parcela da corda que vibra transversalmente tem uma massa de 8,00 g

Resposta

A frequência fundamental da vibração da corda é dada pela equação (5.14): $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Densidade linear é: $\mu = \frac{m}{L} = \frac{0,008\,kg}{5,0\,m} = 0,0016\frac{kg}{m}$.



Como o sistema está em equilíbrio, existe contrabalanço entre as forças que atuam na massa: $mg = T$, e a tensão é, portanto

$$T = 4,00\,kg \cdot 9,81\,m/s^2 = 39,24\,N.$$

Assim,

$$f_1 = \frac{1}{2\cdot 5,0\,m}\cdot\sqrt{\frac{39,24\,N}{0,0016\,kg/m}} = 15,66\,Hz$$

19. Encontre a frequência fundamental e as três frequências seguintes que podem causar padrões de onda estacionária em uma corda de 30,0 m que tem uma massa por comprimento de $9,00\times 10^{-3}$ kg/m e está esticada com uma tensão de 20,0 N.

20. Uma corda vibrando, que tem uma densidade de massa linear uniforme, exibe um padrão de onda estacionária com uma única volta com uma frequência de 800 Hz. (a) Se a tensão na corda for alterada para reduzir a frequência fundamental a 500 Hz, determine a razão entre a tensão nova e a antiga. (b) Alternativamente, se a tensão original na corda for aumentada por um fator de 4, determine a nova frequência fundamental.

Resposta

Primeiramente temos uma corda que vibra com frequência $f^{(1)} = 800\,Hz$. Como ela vibra com uma única volta, existe somente um antinodo no meio da corda (como no topo da figura 5.9), i.e., a corda vibra no modo fundamental (n=1). Portanto:

$f^{(1)} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_1}{\mu}}$. Se a tensão for alterada para T_2, a corda vibrará com frequência $f^{(2)} = 500\,Hz = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_2}{\mu}}$. Então:

(a) $\frac{f^{(2)}}{f^{(1)}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{f^{(2)}}{f^{(1)}}\right]^2 = \left[\frac{500\,Hz}{800\,Hz}\right]^2 = 0{,}39$

(b) Se $T_2 = 4 \cdot T_1 \Rightarrow \frac{f^{(2)}}{f^{(1)}} = \sqrt{\frac{4T_1}{T_1}} = 2$

21. Uma onda estacionária é formada em uma corda de 120 cm, fixada nas duas extremidades. A corda vibra em quatro segmentos quando impulsionada a 120 Hz. (a) Determine o comprimento de onda da onda formada. (b) Qual é a frequência fundamental da corda?

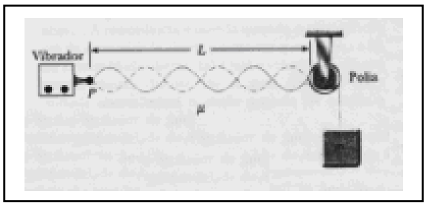
<u>Resposta</u>

Vibrar em 4 segmentos significa que há 3 nodos entre os pontos fixos, i.e., o modo de vibração é caracterizado por $n = 4$.

(a) Como a distância entre os dois nodos consecutivos é $\lambda/2 \Rightarrow \frac{L}{4} = \frac{\lambda}{2}$, i.e., $\lambda = 60\,cm$.

(b) $f_4 = 120\,Hz = 4 \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = 30\,Hz$.

22. No arranjo mostrado na figura, um corpo pode ser pendurado em uma corda (com densidade de massa linear μ = 0,002 kg/m) que passa sobre uma polia leve. A corda é



conectada com um vibrador (de frequência constante f), sendo o comprimento da corda entre o ponto P e a polia L = 2,00 m. Quando a massa m é 16,0 kg ou 25,0 kg, ondas estacionárias são observadas; entretanto, nenhuma onda estacionária é observada com qualquer massa entre esses valores. (a) Qual é a frequência do vibrador? (Dica: Quanto maior a tensão na corda, menor é o número de nodos na onda estacionária.) (b) Qual é a maior massa com a qual ondas estacionárias podem ser observadas?

<u>Resposta</u>

A corda pode vibrar em um dos seus modos harmônicos só se a frequência f do vibrador coincide com uma das frequências fundamentais. Quando $m_1 = 16{,}0\,kg$, a tensão da corda é $T_1 = m_1 g = 157\,N$ (veja problema 18), e vibração da corda existe, mas não sabemos em qual modo: $f=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T_1}{\mu}}$. Quando $m_2=25,0\,kg$, a tensão da corda é $T_2=m_2g=245\,N$, e a corda vibra num modo inferior, porque a frequência é inversamente proporcional a massa: $f=\frac{n-1}{2L}\sqrt{\frac{T_2}{\mu}}$. Igualando as duas expressões, encontramos o valor do n: $n=\frac{\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_2}-\sqrt{T_1}}=5$. Agora podemos usar qualquer das expressões para calcular frequência do vibrador:

$$f=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T_1}{\mu}}=\frac{5}{2\cdot 2,00\,m}\sqrt{\frac{157\,N}{0,002\,kg/m}}=350\,Hz$$

23. Uma corda A de um violoncelo vibra em seu primeiro modo normal com uma frequência de 220 vibrações/s. O segmento vibrante tem 70,0 cm de comprimento e 1,20 g de massa. (a) Encontre a tensão na corda. (b) Determine a frequência de vibração quando a corda vibra em três segmentos.

Ondas estacionárias em colunas de ar

Suponha que a velocidade do som no ar é 343 m/s, a menos que seja indicado de outra maneira.

24. Um tubo de vidro (aberto nas duas extremidades) de comprimento L é posicionado perto de um alto-falante de frequência f = 680 Hz. Para que valores de L o tubo será ressonante com o alto-falante?

<u>Resposta</u>

A ressonância ocorrerá se a frequência do alto-falante *f* coincidir com uma das frequências dos harmônicos do tubo: $f_n=\frac{v}{\lambda_n}=n\cdot\frac{v}{2L}$ (equação (5.19)). Como a frequência do alto-falante é fixa, o comprimento de tubo tem que ser variado para cumprir essa condição: $L=\frac{n\cdot v}{2\cdot f}$. Como $\frac{v}{2f}=\frac{343\,m/s}{2\cdot 680\,s^{-1}}=0,25\,m$, qualquer comprimento que é múltiplo inteiro desse valor causará a ressonância com alto-falante.

25. Calcule o comprimento de um tubo que tenha uma frequência fundamental de 240 Hz se o tubo for (a) fechado em uma extremidade e (b) aberto nas duas extremidades.

26. O comprimento total de um flautim é 32,0 cm, A coluna de ar ressonante vibra da mesma maneira que um tubo aberto nas duas extremidades. (a) Encontre a frequência de nota mais baixa que um flautim pode tocar, supondo que a velocidade de som no ar é 320 m/s. (b) Abrir furos no lado encurta efetivamente o comprimento da coluna ressonante. Se a nota mais elevada que um flautim pode tocar é 4000 Hz, encontre a distância entre os antinodos adjacentes para esse modo da vibração.

Resposta

(a) $f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{320\, m/s}{2 \cdot 0,32\, m} = 500\, Hz$

(b) A frequência mais alta é: $f_n = n \cdot \frac{v}{2L} = 4000\, Hz$. Daqui podemos determinar qual é o modo de vibração correspondente: $n = 8$. Este modo é caracterizado por 8 nodos e 9 antinodos (com 8 distâncias entre eles). Portanto, a distância entre os antinodos adjacentes é: $d = \frac{32\, cm}{8} = 4\, cm$.

27. A frequência fundamental de um tubo de órgão aberto corresponde a um dó médio (261,6 Hz na escala musical cromática). A terceira ressonância de um tubo de órgão fechado tem a mesma frequência. Quais são os comprimentos dos dois tubos?

28. Um tubo que é aberto nas duas extremidades tem uma frequência fundamental de 300 Hz quando a velocidade do som no ar é 333 m/s. (a) Qual é o comprimento do tubo? (b) Qual é a frequência do segundo harmônico quando a temperatura do ar é aumentada de modo que a velocidade do som no tubo seja 344 m/s?

29. Um estudante usa um oscilador de áudio de frequência ajustável para medir a profundidade de um poço de água. Duas ressonâncias sucessivas são ouvidas em 51,5 Hz e em 60,0 Hz. Qual é a profundidade do poço?

Resposta

Um poço com profundidade L comporta-se como um tubo fechado em uma extremidade. A primeira ressonância ocorre quando a frequência do oscilador coincide com a frequência do n-ésimo modo de vibração do ar no poço:

$$f_n = n \cdot \frac{v}{4L} = 51,5\, Hz$$

A próxima ressonância ocorre quando:

$$f_{n+1} = (n+1) \cdot \frac{v}{4L} = 60,0\, Hz$$

Subtraindo essas expressões, podemos calcular a profundidade:

$$\frac{v}{4L} = (60,0 - 51,5)\, Hz = 8,5\, Hz \quad \Rightarrow \quad L = 10,1\, m$$

Batimentos

30. Em determinadas escalas de um teclado de piano, mais de uma corda é afinada à mesma nota para fornecer sonoridade reforçada. Por exemplo, a nota a 110 Hz tem duas cordas nessa frequência. Se uma corda diminuir sua tensão normal de 600 N para 540 N, que frequência de batimento será ouvida quando as duas cordas forem excitadas simultaneamente?

<u>Resposta</u>

Quando a tensão é $T_1 = 600\,N$, a frequência é: $f_n = 110\,Hz = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T_1}{\mu}}$. Quando a tensão muda para $T_2 = 540\,N$, a frequência do n-ésimo harmônico muda também: $f_n' = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T_2}{\mu}}$. Dividindo as duas expressões segue: $\dfrac{f_n'}{f_n} = \sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}$, e $f_n' = 104\,Hz$. A frequência dos batimentos é: $f_n' - f_n = 6\,Hz$.

31. Ao tentar afinar a nota dó a 523 Hz, uma afinadora de piano ouve 2 batimentos/s entre um oscilador de referencia e a corda. (a) Quais são as frequências possíveis da corda? (b) Quando ela aperta a corda ligeiramente, ouve 3 batimentos/s. Qual é a frequência da corda agora? (c) Para qual porcentagem deveria a afinadora de piano mudar agora a tensão na corda para que ela fique afinada?

<u>Resposta</u>

(a) 521 ou 525 Hz

(b) Apertando a corda, sua tensão aumenta e, portanto aumenta a frequência. Ela é 526 Hz.

(c) Agora, a afinadora deve soltar um pouco o fio (diminuir tensão) para que a frequência caia de 526 para 523 Hz. Se a frequência de 523 Hz corresponde à tensão T_1, e a frequência de 526 Hz à tensão T_2, então: $\dfrac{523\,Hz}{526\,Hz} = \sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}} \;\Rightarrow\; \dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{523}{526}\right)^2 = 0,988$.

Portanto, tensão na corda deve diminuir pelo 2,2 % (1,000-0,988=0,022).

Resumo da aula

Quando duas ou mais ondas se encontram no mesmo ponto do espaço, elas se combinam de acordo com **princípio de superposição**: o deslocamento resultante é a soma dos deslocamentos provocados pelas ondas individuais. A combinação das ondas se chama **interferência**, e pode resultar em ampliação (**interferência construtiva**) ou diminuição (**interferência destrutiva**) de amplitude resultante, que depende da diferença de fase entre ondas que interferem.
No caso das ondas que se propagam ao longo de eixo x no mesmo sentido:

$$y_1(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t)$$
$$y_2(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t + \varphi)$$

e a onda resultante é:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \left(2A\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cdot \text{sen}(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2})$$

- Quando $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, ...$ as ondas estão **em fase** e ocorre interferência construtiva (amplitude é $2A$).
- Quando $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, ...$ as ondas estão **em contra fase** e ocorre interferência destrutiva (amplitude é zero).
- Quando o φ tem outros valores, a amplitude resultante tem valor entre 0 e $2A$.

Quando duas ondas idênticas se encontram depois que percorrem distâncias diferentes, elas diferem em fase. A diferença de fase $\Delta\varphi$, causada pela diferença dos caminhos Δx, pode ser calculada pela equação:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\Delta\varphi}$$

onde λ é comprimento de onda. A interferência entre duas ondas idênticas que se propagam ao longo de eixo x, mas em sentidos opostos:

$$y_1(x,t) = A\text{sen}(kx - \omega t)$$
$$y_2(x,t) = A\text{sen}(kx + \omega t)$$

resulta em uma **onda estacionária**:

$$y(x,t) = y_1 + y_2 = \left[2A\,\text{sen}(kx)\right]\cos(\omega t)$$

que não se propaga, mas cada partícula do meio oscila executando o MHS, com uma amplitude cuja **magnitude depende da posição.** As posições nas quais ocorre amplitude máxima ($2A$**)** são:

$$x = \frac{\lambda}{4}, 3\cdot\frac{\lambda}{4}, 5\cdot\frac{\lambda}{4}, ... = (2n+1)\cdot\frac{\lambda}{4} \qquad n = 0,1,2,3...$$

e se chamam **antinodos**, enquanto as posições com amplitude mínima são:

$$x = \frac{\lambda}{2}, 2\cdot\frac{\lambda}{2}, 3\cdot\frac{\lambda}{2}, ... = n\cdot\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0,1,2,3...$$

e se chamam **nodos**. Os nodos são, bem como antinodos, espaçados igualmente, por intervalo $\lambda/2$. Os nodos e antinodos são alternados regularmente e separados por uma distância $\lambda/4$.

Perturbando uma **corda** de comprimento L fixada em ambos os lados, formam-se ondas estacionárias com um conjunto específico de frequências

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

que correspondem as frequências de harmônicos cordiais ($n = 1$ primeiro, $n = 2$ segundo, ...) e determinam o som produzido por todos os instrumentos musicais baseados em cordas. T é a tensão da corda e μ sua densidade de massa.

Ondas estacionárias também podem ser criadas nos **tubos de ar**, tanto abertos em ambos os lados quanto fechados em um de seus lados. No primeiro caso, as frequências dos harmônicos são:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \cdot \frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, 4, ...$$

onde v é a velocidade do som no ar e L o comprimento do tubo. No segundo caso, as frequências dos harmônicos são:

$$f_{2n-1} = (2n-1)\frac{v}{4L} \qquad n = 1, 2, 3, 4...$$

A interferência entre ondas cujas frequências são diferentes chama-se **interferência temporal**. Se as frequências não diferem muito, a interferência temporal produz o efeito de **batimentos** que consiste de aumentos e diminuições periódicas da intensidade sonora percebidas pelo ouvidor, com uma frequência:

$$f_b = f_1 - f_2$$

igual a diferença entre as frequências das ondas individuais.
Ondas não harmônicas podem ser analisadas em termos de ondas harmônicas, através de **análise de Fourier**. Assim, o som dos diversos instrumentos musicais pode ser decomposto em seu **espectro**, que caracteriza seu **timbre**.

Conclusão

Adquirindo conhecimento básico sobre o movimento ondulatório nas últimas aulas, nessa aula fomos capazes de estudar alguns efeitos ondulatórios, como combinação espacial de ondas (interferência espacial) e sua combinação temporal (interferência temporal). Aprendemos propriedades básicas dessas combinações, e como essas propriedades podem ser usadas ou reconhecidas no nosso dia-dia: discutimos o funcionamento dos instrumentos musicais e batimentos, por exemplo. Tocamos no assunto de ondas mais complicadas, que não são harmônicas, e como elas podem ser analisadas em termos das ondas harmônicas.

Informações sobre a próxima aula

Com essa aula terminamos a primeira metade do curso, dedicada ao estudo das ondas mecânicas. Na próxima aula começaremos a estudar outro tipo de ondas: ondas eletromagnéticas. Aprenderemos o que é onda eletromagnética, como ela é induzida, como se propaga e como transporta energia. Discutiremos o espectro eletromagnético, que consiste de vários tipos das ondas eletromagnéticas que diferem entre si por faixa das suas frequências. Finalmente, aprenderemos que a descrição matemática das ondas eletromagnéticas é muito similar a descrição matemática das ondas mecânicas.