5 AULA

O formalismo da mecânica quântica e a sua interpretação

METAS:

- Introduzir a linguagem da mecânica quântica.
- Introduzir as relações de incerteza de Heisenberg.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- usar a linguagem básica da mecânica quântica;
- calcular valores esperados;
- calcular incertezas.

PRÉ-REQUISITOS:

- vetores;
- produto escalar;
- Ondas de De Broglie.
- equação de Schrödinger;
- equação de Schrödinger independente do tempo.

5.1 Introdução

Nesta aula vamos introduzir a linguagem básica da mecânica quântica. Vamos também "explicar" esta linguagem relacionando as construções abstratas com os possíveis resultados de experiências em um laboratório. Finalmente, mostraremos como as *relações de incerteza* - um elemento inevitável da mecânica quântica - são interpretadas e usadas. A "linguagem natural da mecânica quântica"[12] na abordagem de Schrödinger[13] é a álgebra linear. Sem dúvida, conhecimentos prévios em álgebra linear são desejáveis. Porem, o pre-requisito realmente indispensável para que uma pessoa começasse usar a linguagem básica da mecânica quântica é mais um certo numero limitado de definições do que os teoremas e toda a estrutura lógica da álgebra linear. Vamos evitar, na medida do possível, referencias a teoremas matemáticos. O que justifica uma abordagem deste tipo é que a mecânica quântica (como qualquer outra teoria da física) não se reduz a um ramo da matemática aplicada. Os valores da própria teoria quântica estarão em primeiro plano.

Usaremos como exemplo o sistema mais simples - uma partícula em um espaço de dimensão um - para explicar a estrutura e a linguagem da mecânica quântica. As generalizações para sistemas mais complexos (partícula em um espaço de dimensão três, sistemas de muitas partículas) são, geralmente, óbvias.

O esquema geral da mecânica quântica é baseada em um conjunto de *postulados*. Não é possível deduzir os postulados. Tentaremos apresentar argumentação tornando os postulados plausíveis. Porém, o sucesso da mecânica quântica é a melhor justificativa para os postulados.

[12]GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica*. São Paulo: Pearson, 2011.
[13]E na abordagem de Heisenberg também.

5.2 Estados e observáveis

5.2.1 O que é um observável?

Dado um sistema, um *observável do sistema* é qualquer característica do sistema, que pode ser medida experimentalmente. Por exemplo, as coordenadas e os componentes do momento de uma partícula são observáveis da partícula.

Observáveis na mecânica clássica. Na mecânica clássica todos os observáveis (energia cinética, energia potencial, momento angular, etc.) são funções das coordenadas e dos momentos das partículas que fazem parte do sistema. Se um sistema clássico está num determinado estado, as coordenadas e os momentos são determinados. Consequentemente, todos os observáveis do sistema têm valores determinados.

Observáveis na mecânica quântica. A situação é diferente na mecânica quântica. Com efeito, a configuração $\Psi(x, t_0)$ da função de onda no instante t_0 determina apenas a densidade de probabilidade $P(x, t_0)$, o que permite determinar somente as *probabilidades* de encontrar a partícula em uma ou outra região no espaço[14]. Em vários aspectos, os estados e os observáveis na mecânica quântica têm propriedades muito diferentes dos conhecidos da física clássica. Antes de iniciar um estudo mais sistemático dos estados e dos observáveis na mecânica quântica, vamos ver que tipo de características do sistema podemos calcular se a função de onda for conhecida.

5.2.2 Valores esperados

Consideremos medidas da coordenada x da partícula. As nossas previsões baseadas na configuração $\Psi(x, t)$ da função de onda no instante t são probabilísticas: elas têm valor quando são feitas em relação das *médias* se resultados

[14] O "espaço" no nosso exemplo possui dimensão um, isto é, ele é uma reta.

de muitas experiências[15]. Se a configuração da função de onda no instante t for conhecida, podemos obter uma estimativa para a média de muitas medidas da coordenada - o *valor esperado da coordenada.*

Valor esperado da coordenada. A probabilidade de encontrar a partícula no instante t no intervalo de comprimento pequeno Δx entre x e $x + \Delta x$ é igual a $P(x,t)\,\Delta x$. Portanto, a estimativa para a média de muitas medidas da coordenada, feitas com o sistema sempre no mesmo estado, será dada por

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)\,dx. \tag{5.1}$$

Como mostra a eq. (5.1), o valor esperado é uma função do tempo. Mas, para um sistema em estado estacionário o valor esperado da coordenada não depende do tempo.

Exemplo 5.1. Encontraremos o valor esperado da coordenada para um oscilador harmônico no estado fundamental. A função de onda (Exemplo 4.1) é dada por

$$\Psi(x,t) = \frac{(km)^{1/8}}{(\pi\hbar)^{1/4}} \exp\left[-\frac{\sqrt{km}}{2\hbar}x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right], \tag{5.2}$$

onde m é a massa do oscilador e k é a constante da mola. Para o valor esperado da coordenada encontramos

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)\,dx = \frac{(km)^{1/4}}{(\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{km}{\hbar}x^2} = 0,$$

pois o integrando é uma função *impar* e os limites de integração são simétricos[16].

Valor esperado do momento linear. Como encontrar o valor esperado do momento? A equação de de Broglie relaciona o momento com o comprimento

[15] Na prática, as experiências quase nunca são feitas com o mesmo sistema, mas com sistemas idênticos, sempre no mesmo estado.

[16] Seja $f(x)$ uma função integrável no intervalo $-a \leq x \leq a$. Se $f(x)$ for impar, isto é, se $f(-x) = -f(x)$ para todo x no intervalo, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$. (Verifique isso!)

de onda. A equação de Schrödinger para uma partícula livre (4.67) possui soluções (4.71) com comprimento de onda determinado. Pondo

$$p = \pm\sqrt{2mE},$$

podemos escrever "a função de onda para uma partícula com momento linear p" na forma

$$\Psi(x,t) = A\exp\left[\frac{i}{h}\left(px - \frac{p^2}{2m}t\right)\right]. \tag{5.3}$$

A derivada em relação a x devolve a função multiplicada por $i/\hbar$, portanto

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t) = p\Psi(x,t). \tag{5.4}$$

Associamos ao momento linear (que é um observável do sistema) o *operador*

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \tag{5.5}$$

A solução (5.3) não admite a interpretação de Born, pois a integral do quadrado de módulo dessa função sobre a reta diverge. No entanto, assumimos que, para uma função de onda $\Psi(x,t)$ com quadrado de módulo integrável, o valor esperado do momento é dado por

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\hat{p}\Psi(x,t)\,dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)\right]dx. \tag{5.6}$$

As expressões (5.1) e (5.6) têm formas semelhantes. O integrando é um produto da função de onda conjugada $\Psi^*(x,t)$ e uma função que, no primeiro caso é a função $x\Psi(x,t)$ e no segundo - a função $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)$. Esta última é o resultado da aplicação do operador $\hat{p}$ à função $\Psi(x,t)$. De modo análogo, a função $x\Psi(x,t)$ é o resultado de aplicação de um operador, $\hat{x}$, associado à coordenada da partícula. Este operador envia uma função ψ da variável x em uma outra função $\hat{x}\psi$ dada por

$$\hat{x}\psi(x) = x\psi(x). \tag{5.7}$$

O expressão (5.1) para o valor esperado da coordenada pode ser posta na forma

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\hat{x}\Psi(x,t)\,dx. \tag{5.8}$$

Na mecânica quântica, a cada observável é assoado um operador, isto é, uma aplicação linear, que envia funções em funções.

As propriedades das funções, às quais os operadores são aplicadas, como também as propriedades dos operadores associados aos observáveis serão tratadas nas próximas seções. Porém, como já temos os operadores da coordenada, $\hat{x}$, é do momento, $\hat{p}$, podemos tentar construir outros operadores.

O valor esperado do observável x^2, por exemplo, é dado por

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)x^2\Psi(x,t)\,dx. \tag{5.9}$$

Portanto o operador associado à observável x^2, é, simplesmente, o operador de multiplicação por x^2, ou, ainda, o quadrado do operador $\hat{x}$:

$$\hat{x}^2\psi(x) = \left(\hat{x}\left(\hat{x}\psi\right)\right)(x) = x^2\psi(x). \tag{5.10}$$

De modo análogo, o operador associado ao observável p^2 é dado por

$$\hat{p}^2 = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{5.11}$$

O valor esperado do quadrado do momento é igual a

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\hat{p}^2\Psi(x,t)\,dx = -\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t)\,dx. \tag{5.12}$$

5.2.3 Estados

O papel do *estado* na mecânica quântica é, essencialmente, o mesmo que conhecemos da mecânica clássica. O *estado* do sistema no instante t é considerado conhecido quando é possível obter respostas teóricas para todas as perguntas razoáveis sobre os observáveis do sistema no instante t. Já as perguntas "razoáveis" na mecânica quântica não são aquelas da mecânica clássica.

Na mecânica clássica, quando o sistema se encontra num dado estado, todos os observáveis têm valores determinados. Não é necessário medir todas as observáveis para determinar o estado. Com efeito, todo observável é uma função das coordenadas e dos momentos das partículas do sistema. O estado é caracterizado pelos valores de todas as coordenadas e todos os momentos das partículas do sistema.

As previsões que podemos fazer na mecânica quântica para os resultados das medidas são, geralmente, probabilísticas. Existem estados, nos quais um dado observável (energia, momento angular, etc.) têm um valor determinado. Porém, não existe estado no qual *todos* os observáveis dos sistema têm valores determinados. Em particular, não existe estado com valores determinados de todas as coordenadas e todos os momentos do sistema.

Na teoria de Schrödinger, o estado do sistema no instante t_0 é caracterizado função de onda no instante t_0, isto é, pela função $\Psi(x, t_0)$. Respostas teóricas para todas as perguntas razoáveis sobre os observáveis do sistema se tornam possíveis se a função de onda for conhecida.

5.2.4 O espaço de Hilbert

Funções quadrado-integráveis. Uma função de uma variável x se diz função quadrado-integrável se a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx$$

existir. O conjunto das funções quadrado integráveis é, de um modo natural, um espaço vetorial. Com efeito, verifica-se que a soma de duas funções quadrado-integráveis é quadrado-integrável e que o múltiplo de uma função quadrado-integrável por um número complexo e uma função quadrado-integrável.

Espaço de Hilbert. Na mecânica quântica, as funções quadrado-integráveis são frequentemente interpretadas como *representantes* de vetores de um *espaço* *de Hilbert complexo.*

Porque se torna necessária essa complicação adicional? Um espaço de Hilbert é (1) um espaço vetorial (2) munido de um produto interno e (3) completo. Não vamos precisar aqui da propriedade de *completeza* do espaço de Hilbert (porém, esta propriedade é importante, inclusive para a mecânica quântica). Mas as propriedades do produto interno são essenciais para a demonstração da relação de incerteza, por exemplo. O espaço vetorial no qual um produto interno é definido é um espaço de *classes de equivalência* de funções quadrado-integráveis - e não o próprio espaço de funções quadrado-integráveis.

A relação entre um vetor do espaço de Hilbert e uma função quadrado-integrável ψ que *representa* este vetor é semelhante à relação entre um vetor no plano e um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ que representa o vetor. Na geometria, o símbolo $\overrightarrow{AB}$ (que, rigorosamente falando, é um simbolo do segmento orientado) é comumente usado como um *nome*[17] para o vetor. De modo análogo usaremos ψ (o símbolo da função quadrado-integrável) como *um nome* para o vetor do espaço de Hilbert *representado* pela função ψ.

Vetores. Um espaço vetorial sobre os complexos é um conjunto de elementos (chamados *vetores*) para os quais temos definidas as operações adição de vetores e de *multiplicação de vetores por números complexos.*

Os elementos do espaço de Hilbert são classes de equivalência de funções quadrado-integráveis. A forma de relação de equivalência é importante na demonstração da coerência da construção matemática. Porém, na resolução de problemas práticos trabalhamos com representantes de vetores, isto é, com funções quadrado-integráveis. Isto é possível, porque as operações com vetores, o produto interno, os operadores no espaço de Hilbert, etc., definimos em termos de representantes de vetores.

As operações de *adição de vetores do espaço e Hilbert* e de *multiplicação*

[17] Notamos o fato trivial de que podemos dar *vários* nomes a um *um único* objeto.

de vetores por números complexos definimos em termos de representantes. A soma dos vetores representados pelas funções ψ_1 e ψ_2 é representada pela soma $\psi_1 + \psi_2$. O múltiplo por um número complexo c do vetor representado pela função ψ é representado pela função $c\psi$.

Produto interno. O produto interno $\langle \psi_1 \mid \psi_2 \rangle$ de dois vetores ψ_1 e ψ_2 (isto é, vetores representados pelas funções quadrado-integráveis ψ_1 e ψ_2, correspondentemente) definimos também em termos de representantes:

$$\langle \psi_1 \mid \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x)\psi_2(x)\, dx. \tag{5.13}$$

Verifica-se que a integral na eq. (5.13) existe para qualquer par de funções quadrado-integráveis. O valor dessa integral é, geralmente, um número complexo. Verifica-se, também, que (5.13) satisfaz as condições exigidas de um produto interno. Mais precisamente, quaisquer que sejam as funções $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ψ_3 e as constantes α, β, o produto interno (5.13)

- é linear (em relação ao segundo argumento):

$$\langle \psi_1 \mid (\alpha\psi_2 + \beta\psi_3) \rangle = \alpha \langle \psi_1 \mid \psi_2 \rangle + \beta \langle \psi_1 \mid \psi_3 \rangle; \tag{5.14}$$

- possui uma "simetria conjugada",

$$\langle \psi_1 \mid \psi_2 \rangle^* = \langle \psi_2 \mid \psi_1 \rangle; \tag{5.15}$$

- é positivo definido:

$$\langle \psi \mid \psi \rangle \geq 0 \tag{5.16}$$

  para todo $\psi(x)$ e $\langle \psi \mid \psi \rangle = 0$ somente se $\psi(x)$ é a constante zero.

Vetor unitário. Um vetor do espaço de Hilbert se diz unitário se ele for representado por funções normalizadas.

Estados. Voltando para o problema de descrição dos estados na mecânica quântica, ressaltamos o seguinte.

1. Uma função quadrado-integrável representa um vetor do espaço de Hilbert.

2. Um vetor unitário do espaço de Hilbert representa um estado do sistema.

Deste modo, uma função quadrado-integrável representa um estado do sistema.

Ressaltamos que um estado do sistema é representado por *vários* vetores do espaço de Hilbert (possui vários representantes). Com efeito, suponhamos que um vetor do espaço de Hilbert representa um dado estado e que ψ é uma função quadrado-integrável que representa o vetor. Seja c for uma constante complexa tal que $|c| = 1$ e $c \neq 1$. O vetor representado por $c\psi$ é diferente do vetor representado por ψ. Em particular, o valor esperado de qualquer observável calculado com a função $c\psi(x)$ é igual ao valor esperado do mesmo observável calculado com a função $\psi(x)$.

Na mecânica quântica, um estado é associado a uma classe de equivalência de funções normalizadas e não a uma única função normalizada. Em particular, duas funções normalizadas, $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ são equivalentes (descrevem o mesmo estado) se

$$\psi_2(x) = c\psi_1(x), \tag{5.17}$$

onde c é uma constante complexa tal que $|c| = 1$.

A partir de agora, vamos usaremos a expressão "o vetor ψ" como um sinônimo da expressão "o vetor representado pela função quadrado-integrável ψ.

5.2.5 Operadores

Na mecânica quântica, associamos aos observáveis do sistema *operadores hermitianos* no espaço de Hilbert. Esta seção contem certas definições e exemplos. Um *operador linear* (ou, simplesmente, *operador*) é uma aplicação linear que envia um dado espaço vetorial (ou, um subespaço do espaço vetorial) para o mesmo espaço.

Operador linear

Os operadores da mecânica quântica são aplicações lineares definidos no espaço de Hilbert (ou, em um subespaço do espaço de Hilbert). Seja $\hat{A}$ um tal um operador. Aplicado a um vetor ψ do espaço de Hilbert, ele devolve um outro vetor indicado por $\hat{A}\psi$. Sejam ψ_1, ψ_2 funções quadrado-integráveis da coordenada e c_1, c_2 constantes complexas. Sendo a aplicação $\hat{A}$ linear, a relação

$$\hat{A}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2)(x) = c_1\hat{A}\psi_1(x) + c_2\hat{A}\psi_2(x). \tag{5.18}$$

é válida.

Exemplo 5.2. O operador do momento

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

é um operador linear. Com efeito, sejam ψ_1 e ψ_2 funções diferenciáveis do espaço de Hilbert e c_1, c_2 constantes complexas. Usando as propriedades da derivada, obtemos

$$\hat{p}(\psi_1 + \psi_2) = -i\hbar\frac{d}{dx}(\psi_1 + \psi_2) = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi_1 - i\hbar\frac{d}{dx}\psi_2 = c_1\hat{p}\psi_1 + c_2\hat{p}\psi_2.$$

Operações com operadores

Adição de operadores. A soma de dois operadores $\hat{A}$ é $\hat{B}$ é um operador, indicado por $\hat{A} + \hat{B}$, tal que

$$(\hat{A} + \hat{B})\psi = \hat{A}\psi + \hat{B}\psi \tag{5.19}$$

para todo ψ do domínio comum dos operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$. A adição de operadores é associativa e comutativa.

Multiplicação de operadores por escalares. Seja $\hat{A}$ um operador no espaço de Hilbert e c um número complexo. O operador $c\hat{A}$ é definido por

$$(c\hat{A})\psi = c(\hat{A}\psi). \tag{5.20}$$

Multiplicação de operadores. Dados dois operadores, $\hat{A}$, $\hat{B}$, indiquemos por $\hat{A}\hat{B}$ o operador definido por

$$\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{A}\left(\hat{B}\psi\right). \tag{5.21}$$

Exemplo 5.3. A aplicação do operador $\hat{x}\hat{p}$ resulta na aplicação sucessiva dos operadores $\hat{p}$ e $\hat{x}$,

$$\hat{x}\hat{p}\psi = x\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi = -i\hbar x\frac{d\psi}{dx}. \tag{5.22}$$

O exemplo a seguir mostra que a multiplicação de operadores não é comutativa: geralmente, $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

Exemplo 5.4. Aplicando operador $\hat{p}\hat{x}$ ao vetor ψ, encontramos

$$\hat{p}\hat{x}\psi = \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)(x\psi) = -i\hbar\psi - i\hbar x\frac{d\psi}{dx}. \tag{5.23}$$

Subtraindo a eq. (5.23) da eq. (5.22), obtemos

$$(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\psi = i\hbar\psi \tag{5.24}$$

para todo ψ, logo

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar\hat{I}, \tag{5.25}$$

onde $\hat{I}$ é o operador identidade, $\hat{I}\psi = \psi$ para todo ψ do espaço vetorial. O símbolo $\hat{I}$ do operador do operador identidade na relação (5.25) é, comumente, omitido e a *relação de comutação* (5.25) escrevemos na forma

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar. \tag{5.26}$$

Comutador. O *comutador* $[\hat{A}, \hat{B}]$ dos operadores $\hat{A}$, $\hat{B}$ é o operador

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \tag{5.27}$$

Exemplo 5.5. A relação (5.25) podemos reescrever na forma

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{5.28}$$

O comutador dos operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$ é proporcional ao operador identidade $\hat{I}$.

O comutador muda de sinal na troca dos lugares dos operadores,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{B}, \hat{A}]. \tag{5.29}$$

Operadores hermitianos

Operador adjunto (hermitiano conjugado). A cada operador $\hat{A}$ em um espaço vetorial com produto interno associamos um *operador adjunto* $\hat{A}^\dagger$ de tal modo que

$$\langle \hat{A}^\dagger \psi_1 \mid \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 \mid \hat{A}\psi_2 \rangle. \tag{5.30}$$

Exemplo 5.6. Encontraremos o operador adjunto do operador derivada $\hat{D}$, definido por

$$\hat{D}\psi = \frac{d\psi}{dx}.$$

para qualquer par de funções diferenciáveis ψ_1, ψ_2 do espaço de Hilbert, vale

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1 \mid \hat{D}\psi_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x) \frac{d}{dx} \psi_2(x)\, dx \\
&= \psi_1^*(x)\psi_2(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dx} \psi_1^*(x) \right] \psi_2(x)\, dx \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{d}{dx} \psi_1(x) \right]^* \psi_2(x)\, dx = \langle -\hat{D}\psi_1 \mid \psi_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Logo, $\hat{D}^\dagger = -\hat{D}$.

Verificam-se as seguintes propriedades:

$$(\hat{A} + \hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger, \tag{5.31}$$

$$(c\hat{A})^\dagger = c^* \hat{A}^\dagger \tag{5.32}$$

$$(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger. \tag{5.33}$$

Operador hermitiano. Um operador $\hat{A}$ no espaço de Hilbert se diz *operador hermitiano* (auto-adjunto) se $\hat{A}^\dagger = A$.

Exemplo 5.7. O operador da coordenada $\hat{x}$ é um operador hermitiano. Com efeito,

$$\langle \psi_1 \mid \hat{x}\psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x) x \psi_2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [x\psi_1(x)]^* \, \psi_2(x)\, dx = \langle \hat{x}\psi_1 \mid \psi_2 \rangle.$$

Logo, $\hat{x}^\dagger = \hat{x}$ e $\hat{x}$ é hermitiano.

5.2.6 Observáveis

A cada observável Q é associado um operador hermitiano $\hat{Q}$ no espaço de Hilbert. Os operadores da coordenada $\hat{x}$ e do momento $\hat{p}$ podem servir como exemplos. Mais do que isso: a maioria dos operadores associados aos observáveis são certas "funções" das coordenadas e dos momentos do sistema. Uma excepção dessa regra é o *spin* que vai ser tratado na última aula.

Suponhamos que um observável na mecânica clássica é dado por uma função do momento linear p. É fácil encontrar um candidato para o operador desse observável na mecânica quântica.

Exemplo 5.8. Na mecânica clássica, a energia cinética K de uma partícula no espaço de dimensão um é dada por

$$K = \frac{p^2}{2m}.$$

O operador da energia cinética $\hat{K}$ na mecânica quântica é dado por

$$\hat{K} = \frac{\hat{p}^2}{2m}. \tag{5.34}$$

Por outro lado, a energia potencial V na mecânica clássica é uma função $V(x)$ da coordenada. O operador da energia potencial $\hat{(V)}$ sera definido por

$$\hat{V}\psi(x) = V(x)\psi(x). \tag{5.35}$$

O operador $\hat{H}$, associado à energia mecânica do sistema, é chamado *operador hamiltoniano*,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}. \tag{5.36}$$

Usando o símbolo do operador hamiltoniano $\hat{H}$, podemos reescrever a equação de Schrödinger na forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x,t) = \hat{H}\Psi(x,t). \tag{5.37}$$

Exemplo 5.9. Consideremos o observável $Q = xp$. Que operador devemos associar a este observável? Nenhum dos operadores $\hat{x}\hat{p}$ é $\hat{p}\hat{x}$ é hermitiano! O operador

$$\hat{Q} = \frac{1}{2}\left(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}\right) \tag{5.38}$$

é hermitiano e é um bom candidato para ser associado ao observável Q. Mas não há nenhum princípio fundamental capaz de distinguir entre esse operador e outros candidatos igualmente aceitáveis.

5.3 Medidas

5.3.1 Medidas na mecânica clássia

A mecânica clássia é uma teoria consistente - dentro da sua área de aplicação, é claro. As *previsões* baseadas nas leis da mecânica clássica, sé verificam em inúmeras experiências. Lembraremos duas características bem conhecidas dos observáveis na mecânica clássica.

Valores. Quais são os valores que um observável pode tomar? Suponhamos que estamos fazendo medidas do observável Q. Os resultados obtidos são certos valores reais. Não sempre os valores possíveis de Q ocupam todo o eixo real, mas, quando existem restrições, elas são óbvias. Por exemplo, o valor da energia cinética não pode ser negativo.Com efeito, a energia cinética K é uma função com valores não-negativos do momento, $K = \frac{p^2}{2m}$.

Previsões. Um estado de um sistema clássico é conhecido quando são conhecidos todas as coordenadas e todos os momento das partículas que fazem parte do sistema. Se for dado o estado, podemos calcular o valor de qualquer observável. O resultado de uma medida de qualquer observável no estado vai coincidir (dentro da margem de erro) com as previsões teóricas.

5.3.2 Possíveis resultados de uma medida segundo a mecânica quântica

Um dos postulados da mecânica quântica estabelece que o resultado de uma medida pode ser apenas um valor do *espectro* do operador associado ao observável.

Espectro de um operador.

Seja $\hat{Q}$ o operador hermitiano associado ao observável Q. O espectro de $\hat{Q}$ (também chamado espectro do observável Q) é o conjunto de todos os valores q para os quais o operador $\hat{Q} - q\hat{I}$ não possui inverso.

Espectro discreto: os autovalores. Suponhamos que, para um dado valor q, existe uma solução normalizável $\psi(x)$ para a equação

$$(\hat{Q} - q\hat{I})\psi(x) = 0. \tag{5.39}$$

O valor q é chamado *autovalor* do operador $\hat{Q}$ e a função $\psi(x)$ é chamada *autofunção associada ao autovalor* q.

Exemplo 5.10. Consideremos a equação

$$(\hat{H} - E)\psi(x) = 0, \tag{5.40}$$

onde

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{k}{2}x^2. \tag{5.41}$$

é o operador hamiltoniano para o oscilador harmônico. A função

$$\psi(x) = e^{-\frac{\sqrt{km}}{2\hbar}x^2} \tag{5.42}$$

é uma autofunção de $\hat{H}$ associada ao autovalor $E = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$. (Verifique isso!)

O *espectro discreto* de um operador é o conjunto dos autovalores do operador.

Espectro contínuo. Existem valores que pertencem ao espectro do operador, mas não são autovalores.

Exemplo 5.11. Consideremos o operador coordenada $\hat{x}$. Ele não possui autovalores! Isto é, não existem soluções normalizáveis (tais que a integral do quadrado do módulo existe e não se anula) para a equação

$$x\psi(x) = q\psi(x) \tag{5.43}$$

para nenhum valor do parâmetro q. Porem, o *inverso* do operador $\hat{x} - q\hat{I}$ não existe sempre que q for uma constante *real*! Com efeito, seja $f(x)$ uma função normalizável. Se q for real, a integral do quadrado do módulo da função

$$(\hat{x} - q\hat{I})^{-1}f(x) \equiv \frac{f(x)}{x-q}$$

geralmente, não existirá: a função normalizável $f(x)$ tem que ter uma forma bastante especial para que a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|^2}{|x-q|^2}\, dx \tag{5.44}$$

existisse. Por outro lado, se q *não é real*, a integral (5.44) existe. Todos os valores reais, e somente esses valores, pertencem ao espectro de $\hat{x}$. Nesse exemplo, todos os valores reais pertencem ao *espectro contínuo* do operador $\hat{x}$.

5.3.3 Espectros de operadores hermitianos

Todos os autovalores (se existirem) de um operador hermitiano são reais. Com efeito, seja $\hat{Q}$ hermitiano e suponhamos que q é um autovalor de $\hat{Q}$ e $\psi(x)$ uma autofunção normalizada associada a q. Temos

$$\begin{aligned} q &= q\langle\psi \mid \psi\rangle = \langle\psi \mid q\psi\rangle = \langle\psi \mid \hat{Q}\psi\rangle \\ &= \langle\hat{Q}^\dagger\psi \mid \psi\rangle = \langle\hat{Q}\psi \mid \psi\rangle = \langle q\psi \mid \psi\rangle = q^*\langle\psi \mid \psi\rangle = q^*. \end{aligned}$$

O espectro contínuo (se existir) de um operador hermitiano também é real. Enquanto o espectro discreto consiste em pontos isolados, o espectro contínuo é formado por intervalos (finitos ou infinitos).

Uma propriedade das autofunções. Sejam q_1 e q_2 autovalores distintos do operador hermitiano $\hat{Q}$ e suponhamos que ψ_1 e ψ_2 são autofunções associadas a q_1 e q_2, correspondentemente. Então, as autofunções $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ são *ortogonais*, isto é,

$$\langle\psi_1 \mid \psi_2\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x)\psi_2(x)\,dx = 0. \tag{5.45}$$

Autofunções generalizadas É conveniente associar aos pontos do espectro contínuo *autofunções generalizadas.*

Exemplo 5.12. O operador do momento $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$ não possui autovalores (e, consequentemente, não existem autofunções desse operador). Porem, o espectro contínuo do operador $\hat{p}$ ocupa todo o eixo real. Com efeito, a equação

$$-i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x) = p\psi(x) \tag{5.46}$$

tem soluções da forma

$$\psi_p(x) = A\exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right). \tag{5.47}$$

O quadrado do módulo desta função é igual a constante $|A|^2$, portanto a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_p(x)|^2\,dx$$

não existe. No entanto, uma *superposição* da forma

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) e^{\frac{i}{\hbar}px}\, dp \tag{5.48}$$

pode ser normalizável se a amplitude $f(p)$ tiver uma forma apropriada.

5.3.4 Probabilidades

As previsões da mecânica quântica são, geralmente, probabilísticas. Suponhamos que estamos fazendo medidas do observável Q no estado ψ do sistema. O resultado de uma medida pode ser apenas um valor do espectro do operador $\hat{Q}$. Seja q um autovalor de $\hat{Q}$ (suponhamos que $\hat{Q}$ possui espectro discreto). Seja $\psi_q(x)$ uma autofunção normalizada de $\hat{Q}$, associada ao autovalor q. Um postulado da mecânica quântica diz que a *probabilidade* de obter o valor q é igual a

$$P_q = |\langle \psi_q \mid \psi \rangle|^2 \equiv \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi_q^*(x)\psi(x)\, dx \right|^2 . \tag{5.49}$$

Operadores de projeção

A probabilidade P_q pode ser expressa em termos de um *operador de projeção* $\hat{E}_q$ associado ao autovalor q. Aplicado a qualquer função $\psi(x)$ do espaço de Hilbert, o operador $\hat{E}_q$ devolve a função

$$\hat{E}_q\psi(x) = \psi_q(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_q^*(y)\psi(y)\, dy. \tag{5.50}$$

Verifica-se que a eq. (5.50) define um operador linear e, além disso, $\hat{E}_q$ é um operador de projeção isto é, um operador

(a) não nulo, $\hat{E}_q \neq 0$;

(b) tal que $E_q^2 = E_q$.

Como todo operador de projeção, o operador $\hat{E}_q$ é hermitiano.

Probabilidades (espectro discreto)

Usando o operador de projeção, a probabilidade P_q podemos reescrever na forma

$$P_q = \langle \psi \mid \hat{E}_q \psi \rangle. \tag{5.51}$$

Com efeito, usando as equações (5.49), (5.51) e as propriedades do produto interno, temos

$$P_q = |\langle \psi_q \mid \psi \rangle|^2 = \langle \psi_q \mid \psi \rangle^* \langle \psi_q \mid \psi \rangle = \langle \psi \mid \psi_q \rangle \langle \psi_q \mid \psi \rangle = \langle \psi \mid \hat{E}_q \psi \rangle.$$

Estados determinados. Seja ψ_q uma autofunção do operador $\hat{Q}$ associada ao autovalor q. Suponhamos que o sistema está no estado ψ_q. Qual seria a probabilidade de obter o valor q fazendo uma medida do observável Q? Substituindo na eq. (5.49), obtemos

$$P_q = |\langle \psi_q | \psi_q \rangle|^2 = 1. \tag{5.52}$$

O estado ψ_q é um *estado determinado* para o observável Q: uma medida de Q feita com um sistema no estado ψ_q terá o valor q como resultado.

Probabilidades (espectro contínuo)

Suponhamos agora que o operador $\hat{Q}$ possui espectro contínuo. A cada *intervalo* Δ no espectro contínuo podemos associar um operador de projeção $\hat{E}(\Delta)$ de tal modo que a probabilidade de obter um resultado no intervalo Δ fazendo uma medida do observável Q no estado ψ do sistema seja igual a

$$P(\Delta) = \langle \psi \mid \hat{E}(\Delta) \psi \rangle. \tag{5.53}$$

Exemplo 5.13. O operador da coordenada $\hat{x}$ possui apenas espectro contínuo que ocupa todo o eixo real. Suponhamos que a partícula está no estado ψ. Qual a probabilidade de encontra-la no intervalo Δ com extremidades x_1 e x_2

(supondo que $x_1 < x_2$)? Ao intervalo Δ associamos o operador de projeção $\hat{E}(\Delta)$ definido por

$$\left[\hat{E}(\Delta)\phi\right]\phi(x) = I_{\Delta}(x)\phi(x) \tag{5.54}$$

para todo ϕ quadrado-integrável, onde a função $I_{\Delta}(x)$ é dada por

$$I_{\Delta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < x_1, \\ 1 & \text{se} \quad x_1 < x < x_2, \\ 0 & \text{se} \quad x > x_2. \end{cases} \tag{5.55}$$

Verifica-se que $\hat{E}(\Delta)$ é um operador de projeção. A probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $x_1 < x < x_2$, calculada pelá fórmula (5.53),

$$\begin{aligned} P(\Delta) = \langle \psi \mid \hat{E}(\Delta)\psi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\hat{E}(\Delta)\psi(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) I_{\Delta}(x)\psi(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \psi^*(x)\psi(x)\,dx. \end{aligned}$$

está de acordo com a interpretação de $|\psi(x)|^2$ como densidade de probabilidade.

5.3.5 Postulados da mecânica quântica

Tudo o que tratamos nas últimas duas aulas podemos resumir na forma de quatro postulados que se referem aos estados, observáveis, mediadas e à evolução do estado, correspondentemente.

1.Estados

A descrição do estado de um sistema pode ser feita em termos de uma função normalizada ψ das coordenadas do sistema. Esta descrição é completa.

2.Observáveis

A cada observável associamos um operador hermitiano no espaço de Hilbert.

3.Medidas

Seja Q um observável e $\hat{Q}$ o operador hermitiano associado a Q. O resultado de uma medida do observável Q pode ser somente um valor do espectro do operador $\hat{Q}$.

- Se o sistema estiver em um dado estado ψ, a probabilidade de obter o valor q_n em uma medida do observável Q é dada por

$$P_{q_n} = |\langle \psi_{q_n} \mid \psi \rangle|^2.$$

- A cada intervalo Δ do espectro contínuo associamos um operador de projeção $\hat{E}(\Delta)$. A probabilidade de obter o valor no intervalo Δ em uma medida do observável Q é dada por

$$P(\Delta) = \langle \psi \mid \hat{E}(\Delta)\psi \rangle.$$

4.Evolução

Enquanto não são feitas medidas, a evolução do estado do sistema é governada pela equação de Schrödinger (5.37).

5.4 Incertezas

5.4.1 Desvio padrão

Suponha que o estado ψ do sistema *não é* um estado determinado do observável Q. As previsões sobre o resultado de uma medida de Q são, então, apenas probabilísticas. A média de muitas medidas (feitas sempre com um sistema no estado ψ) será próxima ao valor esperado $\langle Q \rangle$. A "incerteza" na determinação do observável Q no estado ψ é caracterizada pelo *desvio padrão* σ_Q definido por

$$\sigma_Q = \sqrt{\langle (Q - \langle Q \rangle)^2 \rangle}. \tag{5.56}$$

Exemplo 5.14. Encontraremos o desvio padrão da coordenada σ_x no estado fundamental do oscilador harmônico. O valor esperado da coordenada nesse estado é igual a zero (ver Exemplo 4.1). Substituindo a função de onda (5.2) na eq. (5.56), obtemos para o quadrado do desvio padrão

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\hat{x}^2\Psi(x,t)\,dx = \frac{(km)^{1/4}}{(\pi\hbar)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left[-\frac{(km)^{1/2}}{\hbar}x^2\right] dx. \tag{5.57}$$

Fazendo a mudança da variável, $x = (\frac{\hbar^2}{km})^{1/4}y$, obtemos

$$\sigma_x^2 = \frac{\hbar}{(\pi km)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2}\,dy. \tag{5.58}$$

Finalmente, usando a eq. (A.4), encontramos

$$\sigma_x = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(km)^{1/4}}. \tag{5.59}$$

Incerteza. O desvio padrão σ_Q de um observável Q em um dado estado ψ é chamado de *incerteza* de Q no estado ψ e é indicado por ΔQ. Por exemplo, $\Delta x = \sigma_x$ é a incerteza da coordenada, $\Delta p = \sigma_p$ é a incerteza do momento, etc.

5.4.2 Relações de incerteza

Observáveis compatíveis e incompatíveis

Dois observáveis Q e R são chamados *observáveis compatíveis* se o comutador dos operadores $\hat{Q}$ e $\hat{R}$, associados aos observáveis, for igual ao operador nulo,

$$[\hat{Q}, \hat{R}] = 0. \tag{5.60}$$

Se o comutador dos dois operadores não é nulo, os observáveis são *incompatíveis*. A coordenada x e o momento p conjugado a essa coordenada formam um par de operadores incompatíveis, com efeito,

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \neq 0.$$

O Princípio de incerteza afirma que as incertezas em medidas simultâneas de observáveis incompatíveis satisfazem certas desigualdades.

Relação de incerteza coordenada-momento

Segundo o Princípio de incerteza de Heisenberg, a incerteza da coordenada Δx e a incerteza do momento conjugado a essa coordenada Δp em medidas simultâneas de x e p satisfazem a relação

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{5.61}$$

Heisenberg enunciou o Principio de incerteza em 1927 e apresentou uma demonstração heurística da relação de incerteza coordenada-momento. A demonstração da desigualdade (5.61) foi feita por Kennard em 1927 e por Weyl em 1928.

A relação (5.61) não é um postulado adicional. Podemos deduzi-la dos postulados da mecânica quântica. Seja ψ um estado. Consideremos o operador

$$\hat{Q} = (\hat{x} - \langle x \rangle) + i\alpha(\hat{p} - \langle p \rangle), \tag{5.62}$$

onde $\langle x \rangle$ e $\langle p \rangle$ são os valores esperados no estado ψ da coordenada e do momento, correspondentemente, e α é um parâmetro *real*. O produto interno no espaço de Hilbert é positivo definido, portanto

$$\begin{aligned}
0 \leq& \langle \hat{Q}\psi \mid \hat{Q}\psi \rangle = \langle \psi \mid \hat{Q}^\dagger \hat{Q}\psi \rangle \\
=& \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle + i\alpha \langle \psi \mid [(\hat{x} - \langle x \rangle)(\hat{p} - \langle p \rangle) - (\hat{p} - \langle p \rangle)(\hat{x} - \langle x \rangle)]\, \psi \rangle \\
&+ \alpha^2 \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle \\
=& \sigma_x^2 + i\alpha \langle \psi \mid [\hat{x}, \hat{p}]\psi \rangle + \alpha^2 \sigma_p^2 \\
=& \sigma_x^2 - \alpha\hbar \langle \psi \mid \psi \rangle + \alpha^2 \sigma_p^2
\end{aligned} \tag{5.63}$$

A função ψ é normalizada, logo

$$\sigma_p^2 \alpha^2 - \hbar\alpha + \sigma_x^2 \geq 0 \tag{5.64}$$

para todo α real. Mas isto é possível se, e somente se,

$$\hbar^2 - 4\sigma_x^2 \sigma_p^2 \leq 0. \tag{5.65}$$

Esta relação é equivalente a desigualdade (5.61).

Exemplo 5.15. Mostraremos que a relação (5.61) é válida para o estado fundamental do oscilador harmônico. Para a incerteza da coordenada encontramos no Exemplo 5.14

$$\Delta x = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{(km)^{1/4}}. \tag{5.66}$$

Calculando Δp, encontramos

$$\Delta p = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} (km)^{1/4} . \qquad (5.67)$$

Multiplicando Δx por Δp, obtemos

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}. \qquad (5.68)$$

As incertezas em medidas simultâneas da coordenada e do momento, feitas com um oscilador harmônico no estado fundamental, satisfazem a relação (5.61).

Em um espaço de dimensão três. A posição de uma partícula é caracterizada por três coordenadas cartesianas, x, y, z. A essas coordenadas são conjugados os três componentes do momento linear, p_x, p_y, p_z. A cada par coordenada-momento associamos uma relação de incerteza, deste modo

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}. \qquad (5.69)$$

Não há restrições para o produto $\Delta x \cdot \Delta p_y$, por exemplo: teoricamente, existem estados para os quais o produto de incertezas em medidas simultâneas de x e p_y pode ser tão pequeno quanto desejarmos.

Relação de incerteza energia-tempo

No contexto da relatividade especial, as coordenadas cartesianas de uma partícula no instante t e a grandeza ct (onde c é a velocidade da luz) são vistos como componentes de um quadrivetor. De modo análogo, os momentos p_x, p_y e p_z junto com E/c (a energia E da partícula, dividida por c) são componentes de um outro quadrivetor. Às três pares coordenada-momento associamos as relações de incerteza (5.69). De modo análogo, ao par energia-tempo associamos a relação

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}. \qquad (5.70)$$

Porem, na física não-relativística não temos motivo para tratar as coordenadas e o tempo desta maneira "simétrica". Além disso, na mecânica quântica não-relativística o tempo tem um papel bastante específico. Não e associado um operador hermitiano ao tempo. Como interpretar Δt?

A relação de incerteza (5.61) reflete uma propriedade universal das ondas: um pacote de ondas de extensão finita é composto por ondas com vários comprimentos de onda. Um outro aspecto da mesma propriedade é que um pacote de ondas de duração finita é sempre composto por ondas de frequências diferentes[18]. Frequentemente, a relação (5.70) pode ser usada sem referência explícita aos detalhes do processo, com mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 5.16. A vida média de um estado excitado de um núcleo e de cerca de 10^{-12} s. Vamos avaliar a incerteza na energia do fóton de raio γ emitido. Usaremos a relação (5.70) onde Δt é a vida média do estado excitado e ΔE é a incerteza no valor da energia do estado. Portanto,

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{1,054 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{2 \times 10^{-12}\ \mathrm{s}} \approx 5 \times 10^{-23}\ \mathrm{J}.$$

5.5 Conclusões

- Os estados de um sistema quântico são representados por funções normalizadas das coordenadas do sistema.

- Uma função quadrado-integrável representa um vetor no espaço de Hilbert.

- A cada observável do sistema associamos um operador hermitiano no espaço de Hilbert.

[18]Uma interpretação mais detalhada de Δt como tempo característico de um processo pode ser encontrada no livro GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica.* São Paulo: Pearson, 2011.

- O espectro de um operador hermitiano é real. Um operador hermitiano pode ter espectro discreto, espectro contínuo, ou espectro discreto e espectro contínuo.

- Resultado de uma medida de um observável pode ser apenas um valor do espectro do operador associado ao observável.

- Dados um estado do sistema e um observável, podemos calcular a probabilidade de obter um dado valor do espectro discreto ou um valor dentro de um intervalo do espectro contínuo.

- A coordenada e o momento linear de uma partícula em um espaço de dimensão um são observáveis incompatíveis. Para as incertezas desses observáveis em qualquer estado e válido o Princípio de incerteza de Heisenberg.

- A relação de incerteza energia-tempo permite avaliar a vida média de um estado instável pela incerteza da energia do estado, ou vice-versa.

5.6 Resumo

Introduzimos os valores esperados da coordenada e do momento linear. Estudamos as estruturas matemáticas usadas na descrição dos estados e dos observáveis na mecânica quântica. Introduzimos os postulados da mecânica quântica. Apresentamos exemplos de aplicação dos postulados. Introduzimos o princípio de incerteza de Heisenberg. Introduzimos a relação de incerteza energia-tempo.

5.7 Glossário

- autofunção

- autovalor

- comutador
- desvio padrão
- espaço de Hilbert
- espectro de um operador hermitiano
- espectro contínuo
- espectro discreto
- estado
- estado determinado
- função quadrado-integrável
- incerteza
- observável
- operador
- operador adjunto
- operador hermitiano
- valor esperado de um observável

5.8 Atividades

ATIV. 5.1. Verifique as propriedades (5.31), (5.32),(5.33).

ATIV. 5.2. Mostre que o operador do momento $\hat{p}$ é hermitiano.

ATIV. 5.3. Mostre que o operador $\hat{Q}$ definido na eq. (5.38) é hermitiano.

ATIV. 5.4. Calcule a incerteza do momento no estado fundamental do oscilador harmônico.

5.9 Referências

1. EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica: Átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas.* Rio de Janeiro: Campus, 1979.

2. GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica.* São Paulo: Pearson, 2011.

3. GASIOROWICZ, S. *Quantum physics.* Third edition. New York: Wiley, 2003.

4. GREINER, W. *Quantum Mechanics: An Introduction.* Berlin: Springer-Verlag, 2000.