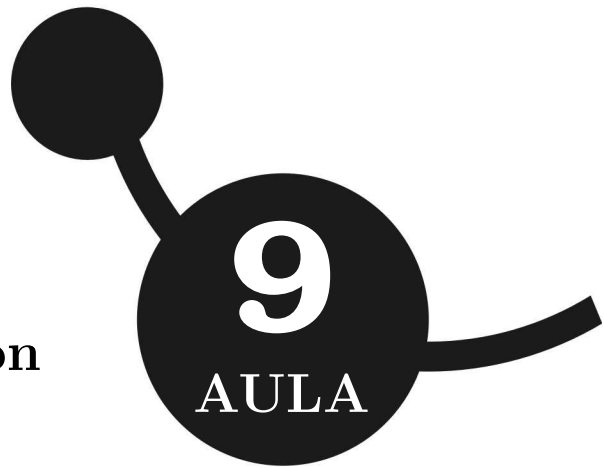


Átomos de um elétron



META:

- Introduzir a classificação dos estados do átomo do hidrogênio na base dos números quânticos (principal, azimutal, magnético).

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

- resolver problemas que exigem conhecimento do espectro do átomo do hidrogênio e das autofunções.

PRÉ-REQUISITOS:

- Equação de Schrödinger em coordenadas esféricas.
- Momento angular.

9.1 Introdução

O problema do átomo do hidrogênio, ou, na forma mais geral, o problema de um átomo com um único elétron, é um dos poucos que admitem uma resolução completa em termos de funções elementares. A teoria do átomo do hidrogênio é o ponto de partida para a classificação dos estados de átomos de muitos elétrons, como, também, para esquemas de aproximação usados no estudo teórico desses átomos.

9.2 O átomo do hidrogênio

Este átomo consiste em um próton com carga $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C e um elétron com carga $-e$. A massa do próton, $m_p = 1,6762 \times 10^{-27}$ kg, é bem maior do que a massa do elétron $m_e = 9,109 \times 10^{-31}$ kg. Assim a massa reduzida μ do sistema é quase igual a massa do elétron,

$$\mu = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} = 0,99946 m_e. \quad (9.1)$$

A energia potencial do sistema (o potencial) depende apenas da distância entre o próton e o elétron,

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (9.2)$$

onde $\epsilon_0 = 8,85419 \times 10^{-12}$ C²/(J·m) é a permissividade do vácuo. A Figura 9.1 mostra o gráfico da função $V(r)$.

O sistema composto por um próton e um elétron é chamado átomo, quando se encontra em um estado ligado. Com efeito, o átomo é um sistema bem localizado: a ordem de grandeza do diâmetro do átomo é de 10^{-10} m. Portanto, no momento estamos interessados no espectro *discreto* do hamiltoniano

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (9.3)$$

do sistema próton-elétron. O espectro contínuo do hamiltoniano (este hamiltoniano possui, também, espectro contínuo!) e as respectivas soluções da

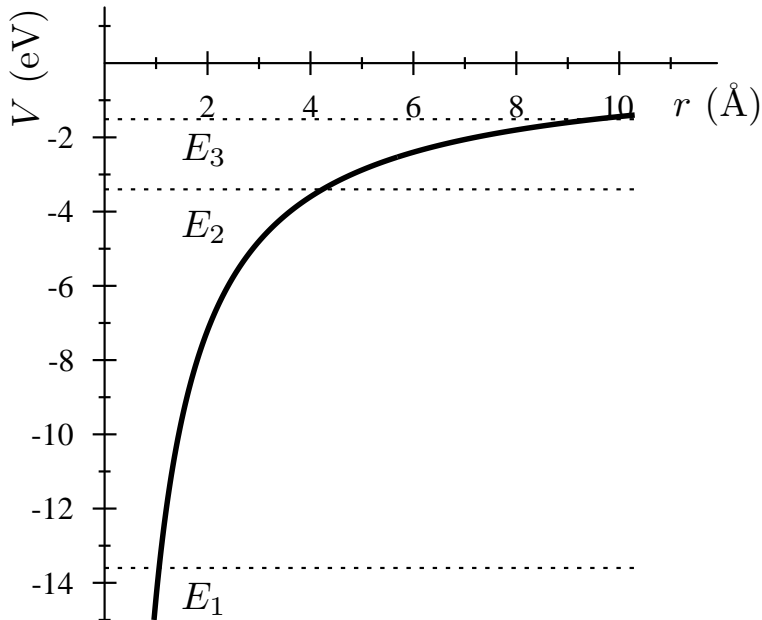


Figura 9.1: Gráfico do potencial da força Coulombiana entre o próton e o elétron. Os três primeiros níveis de energia do átomo do hidrogênio são mostrados.

equação de Schrödinger independente do tempo são importantes em um outro problema – o problema do espalhamento de elétrons por prótons.

9.2.1 A equação radial

Temos que achar os valores de E para os quais a equação radial (8.23) com o potencial (9.2) possui soluções aceitáveis e, também, encontrar essas soluções. A equação radial (8.23) contém dois parâmetros de separação, E e $l(l+1)$. Os valores aceitáveis de l foram encontrados na Aula 8. Os valores possíveis do

Átomos de um elétron

módulo do momento angular são rotulados pelo número inteiro não-negativo l . Por outro lado, os valores possíveis da energia E ainda não foram determinados. Vamos reescrever a equação radial na forma de uma equação de autovalores no qual E faria o papel do parâmetro. Substituído na equação (8.23) o potencial (9.2), multiplicando os membros da equação por $-\hbar^2/(2\mu r^2)$ obteremos, após umas transposições de termos,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} R \right) + \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] R = ER, \quad r > 0. \quad (9.4)$$

A equação recebe a forma da equação de Schrödinger independente do tempo para um sistema em uma dimensão após a mudança da variável dependente $R = u/r$. Com efeito,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right) \right] = \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dr^2}.$$

Portanto, multiplicando os membros da equação por r , obteremos

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] u = Eu, \quad r > 0. \quad (9.5)$$

9.2.2 O espectro discreto do hamiltoniano

Formalmente, associamos esta equação a uma partícula na semi-reta ($r > 0$) que está se movendo no campo do *potencial efetivo*

$$V_{\text{ef}}(r) = -\frac{e^2}{4\pi r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}, \quad (9.6)$$

onde o segundo termo é um potencial repulsivo chamado *potencial centrípeto*

$$V_{\text{centrípeto}} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}.$$

O problema do espectro da energia para o sistema “próton-elétron” foi reduzido ao problema do espectro do hamiltoniano efetivo para uma partícula na semi-reta positiva,

$$\hat{H}_{\text{ef}} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V_{\text{ef}}(r) \quad (9.7)$$

onde $V_{\text{ef}}(r)$ é dado pela eq. (9.6). Apresentaremos os resultados do cálculo³⁷ do espectro discreto do hamiltoniano efetivo \hat{H}_{ef} .

Espectro discreto do hamiltoniano efetivo

O potencial centrípeto é igual a zero para $l = 0$. Nesse caso o potencial efetivo é igual ao potencial da força Coulombiana, cujo gráfico é mostrado na Figura 9.1. Os autovalores

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \text{dots}, \quad (9.8)$$

coincidem com os valores permitidos da energia no modelo de Bohr³⁸.

O gráfico do potencial efetivo para $l = 1$ é mostrado na Figura 9.2. Evidentemente, E_1 não pode ser um autovalor do hamiltoniano efetivo (pois E_1 é menor do que o valor mínimo do potencial). Mas, é um fato notável e importante que os autovalores do hamiltoniano efetivo são exatamente os valores E_n para $n = 2, 3, \dots$. Na Figura 9.3 temos dado o gráfico do potencial efetivo para $l = 2$. Os autovalores do hamiltoniano efetivo \hat{H}_{ef} são os valores E_n , onde $n = 3, 4, \dots$.

Resumindo, os autovalores do hamiltoniano efetivo \hat{H}_{ef} para um dado valor de l são dados pela eq. (9.8), onde n percorre os valores inteiros maiores que l , isto é,

$$n = l + 1, l + 2, \dots$$

³⁷O próprio cálculo (com um grau de detalhamento variado) pode se encontrado em vários livros de Mecânica quântica, entre eles GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica*. São Paulo: Pearson, 2011; EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica: Átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas*. Rio de Janeiro: Campus, 1979.

³⁸Com a correção para a massa finita do próton, ver Aula 3. A correção para a massa nuclear finita é importante no cálculo das linhas espectrais (portanto, no cálculo dos autovalores E_n). A mesma correção é menos importante no cálculo das autofunções, porque a precisão dos experimentos que poderiam testar a distribuição de probabilidade, por exemplo, é bastante limitada.

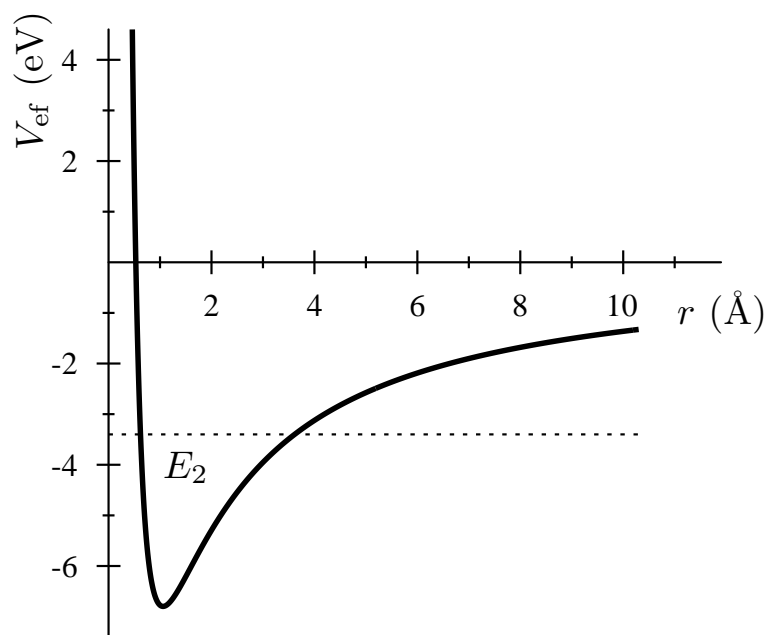


Figura 9.2: Gráfico do potencial efetivo para $l = 1$. O menor autovalor de E é igual a E_2 .

9.2.3 Estados do átomo

Autofunções do hamiltoniano efetivo

Para um dado valor de l , a cada autovalor E_n ($n = l + 1, l + 2, \dots$) temos associada uma autofunção. A autofunção, $R_{nl}(r)$ é dada por

$$R_{nl}(r) = A_{nl} \left(\frac{r}{na} \right)^l e^{-\frac{r}{na}} L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2r}{na} \right), \quad n = l + 1, l + 2, \dots, \quad (9.9)$$

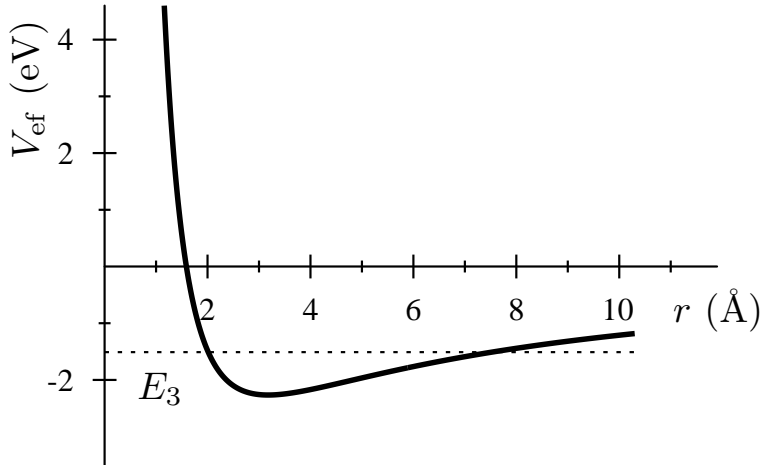


Figura 9.3: Gráfico do potencial efetivo para $l = 2$. O menor autovalor de E é igual a E_3 .

onde A_{nl} é uma constante não-nula, a constante a é dada por³⁹

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} \approx 0,529 \times 10^{-10} \text{ \AA}$$

e L_{n-l-1}^{2l+1} é um polinômio associado de Laguerre. Os polinômios associados são, essencialmente, derivadas de polinômios de Laguerre. Mais precisamente,

$$L_{q-p}^p(x) = (-1)^p \left(\frac{d}{dx} \right)^p L_q(x), \quad (9.10)$$

onde o polinômio de Laguerre L_q é dado por

$$L_q(x) = e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^q (x^q e^{-x}). \quad (9.11)$$

³⁹Lembramos que a constante

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2},$$

introduzida na Aula 3 é chamada *raio de Bohr*. A diferença entre a e a_0 é desprezível pequena no cálculo das autofunções, mas pode ser importante no cálculo das linhas espectrais.

Átomos de um elétron

Exemplo 9.1. Obteremos a função radial R_{20} . Da eq. (9.9) temos

$$R_{20}(r) = A_{20} e^{-\frac{r}{2a}} L_1^1\left(\frac{r}{a}\right), \quad (9.12)$$

onde

$$L_1^1(x) = -\frac{d}{dx} L_2(x).$$

Calculando

$$L_2(x) = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^2 (x^2 e^{-x}) = 2 - 4x + x^2$$

e, depois,

$$L_1^1(x) = 4 - 2x,$$

temos

$$R_{20}(r) = A_{20} e^{-\frac{r}{2a}} \left(4 - 2\frac{r}{a}\right). \quad (9.13)$$

Duas autofunções, R_{nl} e $R_{n'l}$ com o mesmo valor de l mas associadas a autovalores diferentes, $E_n \neq E_{n'}$, são ortogonais em relação a função peso r^2 :

$$\int_0^\infty [R_{nl}(r)]^* R_{n'l}(r) r^2 dr = 0 \quad \text{se } n \neq n'. \quad (9.14)$$

As funções podem ser normalizadas de tal modo que

$$\int_0^\infty [R_{nl}(r)]^* R_{nl}(r) r^2 dr = 1 \quad (9.15)$$

para todo par (n, l) compatível.

Autofunções do hamiltoniano do átomo

Sejam n , l e m_l inteiros e compatíveis, isto é

$$1 \leq n, \quad 0 \leq l \leq n-1, \quad -l \leq m_l \leq l. \quad (9.16)$$

Então a função

$$\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^{m_l}(\theta, \phi) \quad (9.17)$$

é uma solução da equação de Schrödinger independente do tempo (8.20) para $E = E_n$.

Ortogonalidade e normalização. Suponhamos que as funções R_{nl} são normalizadas, como, também, as funções Y_l^m (ver as equações (8.31) e (9.15)). Então o conjunto das autofunções ψ_{nlm_l} possui a propriedade de ortonormalidade, isto é

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty [\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi)]^* \psi_{n'l'm'_l}(r, \theta, \phi) r^2 dr d\theta d\phi = \begin{cases} 0 & \text{se } (n, l, m_l) \neq (n'l'm'_l), \\ 1 & \text{se } (n, l, m_l) = (n'l'm'_l). \end{cases} \quad (9.18)$$

As autofunções são

$$\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{2r}{na}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right) Y_l^{m_l}(\theta, \phi). \quad (9.19)$$

As primeiras autofunções são

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}, \quad (9.20)$$

$$\psi_{200}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-\frac{r}{2a}}, \quad (9.21)$$

$$\psi_{21,\pm 1}(r, \theta, \phi) = \mp \frac{1}{4\sqrt{2\pi a^3}} \frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}} \cos \theta \quad (9.22)$$

$$\psi_{21,\pm 1}(r, \theta, \phi) = \mp \frac{1}{8\sqrt{\pi a^3}} \frac{r}{a} e^{-\frac{r}{2a}} \text{sen } \theta e^{\pm i\phi}. \quad (9.23)$$

9.2.4 Degenerescência

As autofunções ψ_{nlm_l} representam estados determinados da energia. Exceto o caso $n = 1$, para cada valor de n ($n = 2, 3, 4, \dots$) existem vários estados ψ_{nlm_l} , porque existe mais de um par de valores l, m_l compatíveis com n . Por exemplo, os estados $\psi_{200}, \psi_{210}, \psi_{21,-1}$ e ψ_{211} têm a mesma energia E_2 .

Dois ou mais estados de um sistema são ditos *estados degenerados* quando pertencem ao mesmo nível de energia.

Qual o número das autofunções linearmente independentes associadas a um dado valor de energia E_n ? Há $2l + 1$ valores de m_l compatíveis com um dado valor de l . Por outro lado, para um dado valor de n , o número l toma

Átomos de um elétron

os valores inteiros de 0 até $l - 1$. O número de estados ψ_{nlm_l} com energia E_n é igual a

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2.$$

9.2.5 Números quânticos

As autofunções ψ_{nlm_l} representam estados determinados da energia E , do quadrado escalar do momento angular \mathbf{L}^2 e do componente L_z do momento angular. Esses estados são rotulados por valores (inteiros e compatíveis) dos três *números quânticos* n , l e m_l .

- O *número quântico principal* n pode tomar qualquer valor inteiro positivo ($n = 1, 2, \dots$). O valor de n determina o nível de energia do estado. A energia de um estado do átomo do hidrogênio pertencente ao n -ésimo nível é igual a E_n (ver a eq. (9.8)).
- O *número quântico do momento angular* l (as vezes, chamado *número quântico azimutal*) determina o módulo do momento angular do estado, $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$. Para um dado valor n do número quântico principal, l tem como valores possíveis os inteiros de 0 a $n - 1$.
- O *número quântico magnético* m_l determina o valor do componente $L_z = \hbar m_l$ do momento angular. Para um dado valor de l , os valores possíveis de m_l são todos os inteiros de $-l$ a l .

A escolha dos três observáveis E , \mathbf{L}^2 e L_z e, em consequência disso, dos três números quânticos n , l , m_l para uma classificação dos estados do átomo é determinada pelas seguintes propriedades desse conjunto de observáveis.

1. Os variáveis E , \mathbf{L}^2 e L_z são compatíveis, isto é, os operadores \hat{H} , $\hat{\mathbf{L}}^2$ e \hat{L}_z comutam. Em consequência disso, existem autofunções comuns ψ_{nlm_l} dos operadores \hat{H} , $\hat{\mathbf{L}}^2$ e \hat{L}_z .

2. O conjunto das funções ψ_{nlm_l} é completo: todos os estados possíveis do átomo são representados por combinações lineares dessas funções.
3. Como a energia E pertence ao conjunto, os observáveis compatíveis E , \mathbf{L}^2 e L_z são conservados. Em particular, a função de onda do estado estacionário

$$\Psi_{nlm_l}(x, y, z, t) = \psi_{nlm_l}(x, y, z)e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \quad (9.24)$$

representa um estado determinado de E , \mathbf{L}^2 e L_z em qualquer instante t .

Enquanto seria difícil “substituir” nessa lista a energia ou o quadrado do momento angular por outros observáveis, a escolha do operador L_z é uma questão de conveniência e respeito à tradição. Com efeito, qualquer um dos três componentes do momento angular é compatível com a dupla E , \mathbf{L}^2 .

Não todos os estados possíveis do sistema são representados por funções ψ_{nlm_l} . Mas todo estado possível é representado por uma combinação linear dessas funções. Por exemplo, a função

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{211} + \psi_{21,-1}) \quad (9.25)$$

representa um estado do átomo do hidrogênio.

9.2.6 Notação espectroscópica

Os estados com valores diferentes do número quântico l são indicadas por letras. Para os primeiros cinco valores de l as letras são dadas na tabela a seguir⁴⁰.

- $l = 0$: estado s
- $l = 1$: estado p
- $l = 2$: estado d
- $l = 3$: estado f
- $l = 4$: estado g

⁴⁰A escolha das letras s , p , d tem sua origem na espectroscopia do século XIX.

Átomos de um elétron

Para os estados com $l > 3$ as letras seguem a ordem alfabética.

O valor do número quântico n para o estado é colocado na frente da letra que especifica o valor de l . Por exemplo, um estado caracterizado por $n = 3$ e $l = 2$ é chamado estado $3d$.

9.2.7 Densidade de probabilidade

No estado caracterizado por valores n , l , m_l dos três números quânticos, a densidade de probabilidade de encontrar o elétron é dada, em coordenadas esféricas⁴¹ pelo quadrado do módulo da função ψ_{nlm_l} . A densidade de probabilidade P_{nlm_l} é uma função das duas variáveis r e θ e não depende⁴² de ϕ :

$$P_{nlm_l}(r, \theta) = |\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi)|^2. \quad (9.26)$$

Exemplo 9.2. A densidade de probabilidade para os estados com $n = 1$, $l = 1$, $m_l = \pm 1$ é dada por

$$P_{21, \pm 1}(r, \theta) = \frac{1}{64\pi a^5} r^2 e^{-r/a} \text{sen}^2 \theta. \quad (9.27)$$

Por se tratar de funções definidas no espaço (mesmo que independentes da variável ϕ), a visualização das funções $P_{nlm_l}(r, \theta)$ não é uma tarefa simples⁴³. Mas é fácil visualizar as densidades radiais

$$P_{nl}(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi)|^2 r^2 d\theta d\phi = |R_{nl}(r)|^2 r^2.$$

Gráficos de distribuições radiais em relação a variável adimensional⁴⁴ $x = r/a$,

⁴¹Estamos supondo que a massa do próton é infinita e que ele está na origem.

⁴²Porque o módulo do harmônico esférico Y_l^m não depende de ϕ .

⁴³Ver, por exemplo, GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica* São Paulo: Pearson, 2011 ou EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica: Átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas*. Rio de Janeiro: Campus, 1979.

⁴⁴Para p_{nl} ,

$$\int_0^{\infty} p_{nl}(x) dx = 1.$$

isto é, gráficos de funções

$$p_{nl}(x) = a^3 |R_{nl}(ax)|^2 x^2 \quad (9.28)$$

para os estados com número quântico principal $n = 1, 2, 3$ são mostrados nas Figuras 9.4, 9.5 e 9.6.

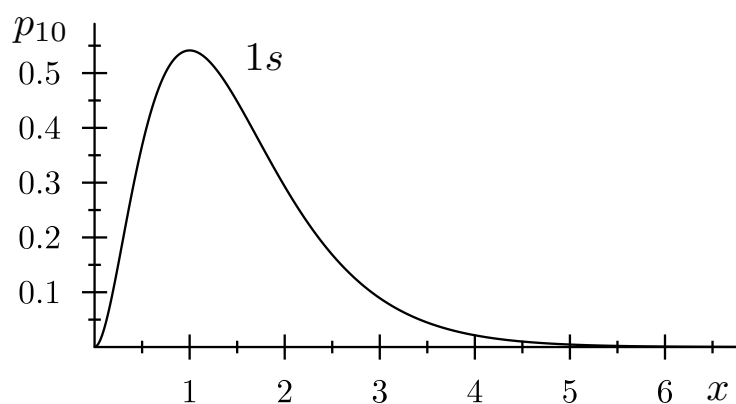


Figura 9.4: Distribuição radial de probabilidade para o estado com $n = 1$.

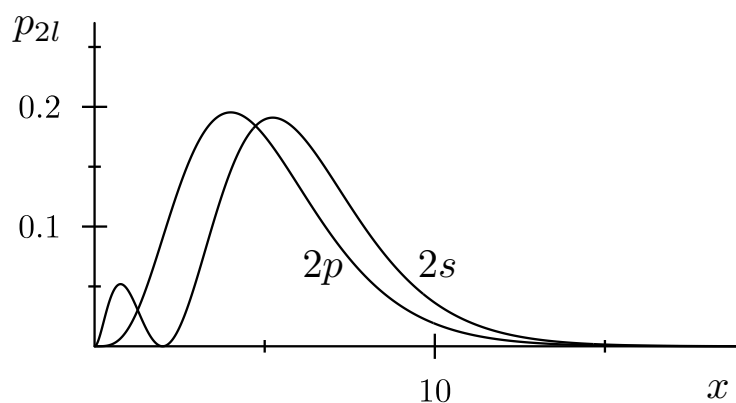


Figura 9.5: Distribuição radial de probabilidade para os estados com $n = 2$.

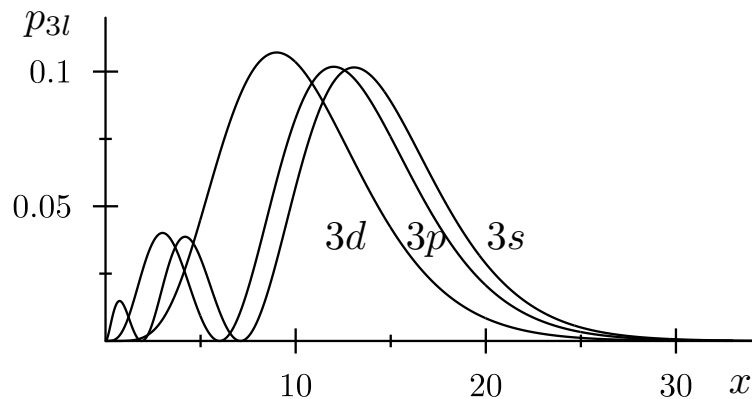


Figura 9.6: Distribuição radial de probabilidade para os estados com $n = 3$.

9.3 Átomos hidrogenóides

Além do hidrogênio, átomos de um elétron são alguns íons: o átomo do hélio ionizado He^+ , o átomo do lítio duplamente ionizado Li^{++} , etc. Esses sistemas são, as vezes, chamados *átomos hidrogenóides*, ou *hidrogênicos*. A teoria, desenvolvida para o átomo do hidrogênio, é usada, com pequenas modificações, na descrição desses átomos.

O quociente

$$\frac{\text{massa do núcleo}}{\text{massa do elétron}}$$

para um átomo hidrogênico é bem maior do que no caso do hidrogênio. Usaremos a aproximação da massa nuclear infinita, considerando o núcleo em repouso na origem do sistema de coordenadas. O hamiltoniano para um elétron no campo Coulombiano do núcleo é dado por

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (9.29)$$

onde Z é o número de prótons no núcleo (o número atômico: $Z = 2$ para o núcleo do hélio, $Z = 3$ para o lítio, etc.). O hamiltoniano (9.29) é semelhante a (9.3). As alterações são:

- a substituição de μ por m_e ,
- a substituição de e^2 por Ze^2 .

Do ponto de vista técnico, essas alterações afetam somente a equação radial. Assim, os autovalores do hamiltoniano (9.29) são

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.30)$$

Os números quânticos n , l , m_l têm o mesmo significado como no caso do hidrogênio e as funções ψ_{nlm_l} obteremos através da substituição

$$a \rightarrow \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e Z e^2} = \frac{a_0}{Z},$$

onde a_0 é o raio de Bohr (3.10),

$$\begin{aligned} \psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi) & \quad (9.31) \\ &= \sqrt{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} e^{-\frac{Zr}{na_0}} \left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1} \left(\frac{2Zr}{na_0}\right) Y_l^{m_l}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

9.4 Conclusões

- O problema de dois corpos se reduz ao problema do movimento de uma partícula em um campo de forças centrais.
- Os números quânticos n , l , m_l são usados na classificação dos estados do átomo do hidrogênio.
- A energia do estado é determinada pelo valor do número quântico principal n .
- Os estados com energia E_n são degenerados, exceto no caso $n = 1$.

9.5 Resumo

A equação radial para o átomo do hidrogênio é reescrita na forma de uma equação de autovalores. Apresentamos os autovalores que são interpretados

como valores de energia possíveis para o átomo do hidrogênio. Introduzimos os números quânticos: o número quântico principal n , o número quântico do momento angular l e o número quântico magnético m_l . Explicamos a classificação dos estados do átomo baseada nos números quânticos. Explicamos a generalização dos resultados para os átomos hidrogênicos.

9.6 Glossário

- átomos hidrogenóides (átomos hidrogênicos)
- degenerescência
- equação radial
- número quânticos
- número quântico do momento angular (número quântico azimutal)
- número quântico magnético
- potencial centrípeto
- potencial efetivo

9.7 Atividades

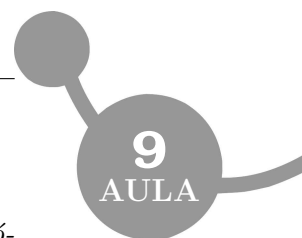
ATIV. 9.1. Normalize a função radial $R_{20}(r)$, eq. (9.13).

ATIV. 9.2. Monte a função normalizada ψ_{211} .

ATIV. 9.3. Mostre que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty P_{21,\pm 1}(r, \theta) r^2 dr d\theta d\phi = 1,$$

onde $P_{21,\pm 1}(r, \theta)$ é dada pela eq. (9.27).



9.8 Referências

1. EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física Quântica: Átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas*. Rio de Janeiro: Campus, 1979.
2. GRIFFITHS, D. J. *Mecânica Quântica*. São Paulo: Pearson, 2011.
3. GASIOROWICZ, S. *Quantum physics*. Third edition. New York: Wiley, 2003.
4. GREINER, W. *Quantum Mechanics: An Introduction*. Berlin: Springer-Verlag, 2000.