1
LIVRO

2
AULA

Conectivos e Quantificadores Lógicos

META:

Introduzir os conectivos e quantificadores lógicos.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Compreender a semântica dos conectivos lógicos;

Aplicar os quantificadores universal e existencial para modificar proposições lógicas.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-01 os conhecimentos da sintaxe da Linguagem da Lógica de Predicados.

2.1 Introdução

Em nossa primeira aula, vimos a sintaxe da Linguagem da Lógica de Predicados. Nesta segunda, complementaremos introduzindo a semântica . Mais precisamente, como os conectivos e quantificadores modificam o valor de verdade das proposições.

2.2 Semântica da Linguagem da Lógica de Predicados

Chegamos ao ponto em que é preciso dotar a linguagem do cálculo de predicados de uma Semântica, isto é, de significado. Individualmente, a cada átomo podemos associar um de dois valores de verdade: 0 (falso) ou 1 (verdadeiro). Porém, para as fórmulas moleculares, precisamos dizer como os conectivos associam um dos dois valores de verdade à fórmula molecular a partir dos valores de verdade das fórmulas atômicas que a compõem. Descrevemos a semântica de uma fórmula molecular usando uma denominada tabela de verdade, em que cada linha representa uma das possíveis combinações de valores de verdade de cada átomo que compõem a fórmula molecular. Na próxima aula, entraremos em detalhe sobre o uso de tabelas de verdade para a avaliação de fórmulas moleculares. Para uma proposição composta de n átomos são necessárias 2^n entradas. Como a maioria dos conectivos são binários, isto é, conectam duas proposições, o número de possíveis entradas são 4 (quatro). Os conectivos permitem a análise de proposições mais complexas do tipo "Se Maria tem mais de 18 anos e é mentalmente sadia, então Maria é juridicamente responsável pelos seus atos". Notem que esta regra não é válida apenas para Maria, seja lá quem for Maria, vale para todos. Daí, podemos dizer que "Todas as pessoas que têm mais de 18 anos e são mentalmente sadias então são juridicamente responsáveis pelos seus atos". Na segunda proposição, além do uso de conectivos identificamos o uso do quantificador universal quando dizemos que o predicado ou propriedade vale para todos os indivíduos.

NEGAÇÃO A negação, como o próprio nome diz, nega a proposição que tem como argumento. Tem como símbolos $\sim \alpha$, $\neg\alpha$, ou, algumas vezes, uma barra sobre a variável lógica, $\bar{\alpha}$, ou o sinal negativo, $-\alpha$, ou o símbolo barra invertida, $/\alpha$, ou ainda, α'. Lembre-se de que o símbolo nada mais é que uma simples representação da negação. O que é relevante é que o significado do símbolo seja explicitamente declarado. Aqui usaremos o simbólo $\neg$ para representar a negação daqui para frente. A semântica do conectivo negação.

α	$\neg\alpha$
1	0
0	1

Tabela 2.1: semântica do conectivo de negação da Linguagem da Lógica de Predicados

Exemplo 2.1. Alguns exemplos de uso do conectivo de negação:

- se α =Maria tem um gato, $\neg\alpha$ =Maria não tem um gato.
- se α =O gato é um mamífero, $\neg\alpha$ =O gato não é um mamífero.
- se α =O rato é um pássaro, $\neg\alpha$ =O rato não é um pássaro.

CONJUNÇÃO A conjunção estabelece uma adição entre duas proposições de modo que se α e β são duas proposições, a conjunção de α e β será verdade somente no caso em que ambas α e β forem verdadeiras. O símbolo mais utilizado para a conjunção é $\alpha \wedge \beta$, em Eletrônica Digital é o ponto $\alpha \bullet \beta$.

α	β	$\alpha \wedge \beta$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

Tabela 2.2: semântica do conectivo de conjunção da Linguagem da Lógica de Predicados

Exemplo 2.2. Alguns exemplos de uso do conectivo de conjunção:

- caso α =Maria tem um gato malhado e β = O rato é um pássaro amarelo, teremos então que $\alpha \wedge \alpha$ =Maria tem um gato malhado **e** o rato é um pássaro amarelo.
- caso α = A batata é um vegetal e β = Sergipe fica no Nordeste do Brasil, teremos então que $\alpha \wedge \beta$ = A batata é um vegetal **e** Sergipe fica no nordeste do Brasil.
- caso α = A é a última letra do alfabeto e β = Uma centopéia tem apenas 11 pares de pernas, teremos então que $\alpha \wedge \beta$ = A é a última letra do alfabeto **e** uma centopéia tem apenas 11 pares de pernas.
- caso α =Um juiz de Direito tem que ser formado em Medicina e $q = \sqrt{4} = 2$ teremos que $\alpha \wedge \beta$ =Um juiz de Direito

tem que ser formado em Medicina **e** $\sqrt{4} = 2$.

DISJUNÇÃO A disjunção estabelece uma separação entre duas proposições, entendida de modo inclusivo, de modo que se α e β são duas proposições, a disjunção de α e β será falsa somente no caso em que ambas α e β forem falsas. O símbolo mais utilizado para a disjunção é $\alpha \vee \beta$, em Eletrônica Digital, é o mais $\alpha + \beta$.

α	β	$\alpha \vee \beta$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Tabela 2.3: semântica do conectivo de disjunção da Linguagem da Lógica de Predicados

Exemplo 2.3. Alguns exemplos de uso do conectivo de disjunção:

- caso $\alpha =$ O décimo elemento da tabela periódica é o oxigênio e $\beta =$ O rato é um pássaro amarelo, teremos então que $\alpha \vee \beta =$ O décimo elemento da tabela periódica é o oxigênio **ou** o rato é um pássaro amarelo.

- caso $\alpha =$O elefante africano é cinza claro e $\beta =$O céu é azul turquesa, teremos então que $\alpha \vee \beta =$O elefante africano é cinza claro **ou** o céu é azul turquesa.

- caso $\alpha =$Um litro de água pesa um quilo e $\beta =$ Partículas de carga elétrica iguais se repelem, teremos então que $\alpha \vee \beta =$Um litro de água pesa um quilo **ou** partículas de carga elétrica iguais se repelem.

- caso $\alpha =$ Uma tartaruga pode viver mais de cem anos e $\beta =$ A meningite é uma doença que só ataca as pessoas do sexo feminino, teremos então que $\alpha \vee \beta =$ Uma tartaruga pode viver mais de cem anos **ou** a meningite é uma doença que só ataca as pessoas do sexo feminino.

IMPLICAÇÃO A implicação estabelece uma condição entre duas proposições: a primeira chamada antecedente e a segunda de conseqüente, de modo que se α e β são duas proposições, a implicação α implica em β será falsa somente no caso em que α (antecedente) for verdadeira e β (conseqüente) é falsa. O símbolo mais utilizado para a implicação é $\alpha \rightarrow \beta$, menos usual $\alpha \supset \beta$.

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Tabela 2.4: semântica do conectivo de implicação da Linguagem da Lógica de Predicados

Exemplo 2.4. Alguns exemplos de uso do conectivo de implicação:

- se $\alpha =$Maria tem um gato e $\beta =$O rato é um pássaro, teremos então que $\alpha \rightarrow \beta =$Maria tem um gato **leva a que** o rato é um pássaro.

- caso $\alpha =$O elefante é cinza e $\beta =$O céu é azul, teremos que $\alpha \rightarrow \beta =$Se o elefante é cinza **implica em que** o céu é azul.

- caso α =Um litro de água pesa um quilo e β =O Brasil fica na Ásia, teremos que $\alpha \to \beta$ = Se um litro de água pesa um quilo **então** o Brasil fica na Ásia.

- caso α =Um time de futebol tem 5 jogadores e $\beta = \sqrt{4} = 2$, teremos que $\alpha \to \beta$ =Se um time de futebol tem 5 jogadores **em conseqüência** $\sqrt{4} = 2$.

OBS 2.1. A implicação lógica (condicional) pode, a princípio, parecer estranha pelo fato de que uma implicação é falsa apenas no caso em que o antecedente é verdadeiro e o conseqüente é falso. Este fato é a base de toda a Matemática, ou seja, de uma informação verdadeira jamais raciocinando matematicamente chegaremos a uma conclusão falsa. Na linguagem coloquial, frases como a do terceiro exemplo não fazem sentido muito embora para a Lógica de Predicados elas sejam verdadeiras.

DUPLA IMPLICAÇÃO A dupla implicação (bi-condicional) estabelece uma condição bidirecional entre duas proposições de modo que se α e β são duas proposições; a dupla implicação será verdade quando ambas α e β tiverem o mesmo valor de verdade. O símbolo mais utilizado para a dupla implicação é $\alpha \leftrightarrow \beta$, menos usual $\alpha \equiv \beta$

Exemplo 2.5. Alguns exemplos de uso do conectivo de dupla implicação:

- se α =Maria tem um gato e β =O rato é um pássaro, teremos então que $\alpha \leftrightarrow \beta$ =Maria tem um gato **se, somente se** o rato é um passaro.

- caso α =O elefante é cinza e β =O céu é azul, teremos então

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Tabela 2.5: semântica do conectivo de dupla implicação da Linguagem da Lógica de Predicados

que $\alpha \leftrightarrow \beta$ =O elefante é cinza **se, somente se**, o céu é azul.

- caso α =Um litro de água pesa um quilo e β =o hidrogênio tem peso atômico 17, teremos então que $\alpha \leftrightarrow \beta$ =Um litro de água pesa um quilo **se, somente se,** o hidrogênio tem peso atômico 17.

2.3 Quantificadores

Quantificadores, em Lógica de Predicados, são elementos que especificam a extensão da validade de um predicado sobre um conjunto de constantes individuais. Assim, na proposição "todos os homens são mortais", estamos estendendo a todos os elementos do conjunto dos homens a propriedade de ser mortal e na proposição "existe um planeta com duas luas", estamos querendo dizer que do conjunto de todos os planetas ao menos um deles tem duas luas.

QUANTIFICADOR UNIVERSAL Uma proposição é quantificada universalmente quando refere-se à todo elemento do conjunto do domínio do predicado. O símbolo para o quantificador universal é $\forall$.

QUANTIFICADOR EXISTENCIAL Uma proposição é dita quantificada existencialmente quando refere-se à algum elemento do conjunto do domínio do predicado. O símbolo para o quantificador existencial é $\exists$.

Exemplo 2.6. Alguns exemplos de uso do quantificador universal e do quantificador existencial:

- Todo homem é mortal. Podemos aqui representar por $P =$é mortal, $U =$conjunto de todos os homens. Daí, a proposição pode ser representada por: $\forall x, P(x)$.

- Existe um mamífero de quatro patas. Podemos representar por $P =$mamífero de quatro patas, $U =$conjunto de todos os mamíferos. Temos então que a proposição pode ser representada por: $\exists x, P(x)$.

OBS 2.2. A negação de proposições onde aparecem quantificadores pode ser resumida por:

- $\neg(\forall x, P(x)) = \exists x, \neg P(x)$.

- $\neg(\exists x, P(x)) = \forall x, \neg P(x)$.

2.4 Conclusão

A Lógica de Predicados não teria muita utilidade sem os seus conectivos. Eles ajudam a ligar proposições, de modo a formar novas e mais complicadas proposições. Os conectivos exercem a função de reunir fatos para que, posteriormente, possamos tirar conclusões.

2.5 Resumo

A semântica dos conectivos da Linguagem da Lógica de Predicados pode ser resumida na tabela abaixo.

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1

Tabela 2.6: semântica dos conectivos da Linguagem da Lógica de Predicados

2.6 Atividades

ATIV. 2.1. Para cada um dos conectivos da Lógica de Predicados escreva três proposições logicamente válidas.

Comentário: Basei-se nos exemplos acima.

ATIV. 2.2. Para cada um dos quantificadores da Lógica de Predicados escreva uma proposição logicamente válidas.

Comentário: Basei-se nos exemplos acima.

2.7 Referências Bibliográficas

MORTARI, Cezar Augusto. Introdução à Lógica. Editora UNESP. São Paulo. 2001.

GASPAR, Marisa. Introdução à Lógica Matemática. Disponível em: http:// mjgaspar.sites.uol.com.br/logica/logica. Acessado em 13/01/2007

Fundamentos da Matemática: Livro 1

ABAR, Celina, Noções de Lógica Matemática. Disponível em: http://www. pucsp.br/∼logica/. Acessado em 13/01/2007