1
LIVRO

3
AULA

# Valorações e Tabelas de Verdade

**META:**

Apresentar tabelas de verdade para classificar proposições lógicas.

**OBJETIVOS:**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Aplicar valorações de um conjunto de proposiçoes moleculares;

Usar tabelas de verdade para avaliar as possíveis valorações de um conjunto de proposições moleculares.

**PRÉ-REQUISITOS**

Aula-02 os conhecimentos da semântica da Linguagem da Lógica de Predicados.

## 3.1 Introdução

Caro aluno, na aula anterior, vimos as definições semânticas dos conectivos lógicos e dos quantificadores. Hoje, continuaremos ainda que em ritmo de valsa, a navegar no mar da Lógica Matemática aproveitando o passeio para conhecê-la melhor. Nesta aula, conceituaremos valorações que é uma das formas de se avaliar as proposições moleculares. Esperamos que o pré-requisito solicitado seja realizado, pois ele facilitará a compreensão e o bom andamento de nossa aula.

## 3.2 Valorações

Valorações constituem-se em uma das formas de se avaliar uma proposição molecular a partir de suas proposições atômicas. Para compreendermos melhor, iniciaremos pela definição:

**Definição 3.1.** Seja $\Gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ um conjunto com $n$ proposições atômicas. Definimos uma valoração sobre $\Gamma$ como uma função $v : \Gamma \mapsto \{0, 1\}$.

**OBS 3.1.** Uma valoração é uma função que associa a cada uma das proposições de um conjunto de proposições um de dois valores de verdade 0 para falso e 1 para verdade.

**Exemplo 3.1.** Como exemplo podemos tomar $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ uma possível valoração é $v : \Gamma \mapsto \{0, 1\}$ dada por:

$$v(\alpha) = 1, v(\beta) = 0, v(\gamma) = 0$$

.

A lógica de predicados baseia-se no princípio de que a valoração de uma proposição molecular é determinada unicamente pelas valorações de suas proposições atômicas. Para estabelecer as regras que deteminam a valoração de uma proposição molecular, veremos primeiramente algumas operações sobre o conjunto $\{0, 1\}$, no âmbito da álgebra de Boole.

George Boole nasceu em Lincoln - Inglaterra em 2 de Novembro de 1815. Autodidata, fundou aos 20 anos de idade a sua própria escola e dedicou-se ao estudo da Matemática. Em 1847 publicou The Mathematical Analysis of Logic em que introduziu os conceitos de lógica simbólica demonstrando que a lógica podia ser reduzida a equações algébricas. Wikipedia

## 3.3 Álgebra de Boole

A álgebra de Boole ou álgebra booleana foi criada pelo matemático inglês George Boole e consta do conjunto $B = \{0, 1\}$ e três operações $+ : B \times B \mapsto B$ uma soma, $\bullet : B \times B \mapsto B$ um produto e $* : B \mapsto B$ complementar. Definidas pelas tabelas abaixo:

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| $\bullet$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| | * |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

**OBS 3.2.** É fácil verificar (verificação direta) as seguintes propriedades da álgebra de Boole:

- $a + b = b + a, \forall a, b \in B$
- $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in B$
- $a \bullet b = b \bullet a, \forall a, b \in B$
- $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c, \forall a, b, c \in B$
- $a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c), \forall a, b, c \in B$
- $a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c), \forall a, b, c \in B$

- $a + a^* = 1, \forall a \in B$
- $a \bullet a^* = 0, \forall a \in B$

A partir de agora, caro aluno, podemos definir como calcular uma valoração de uma proposição molecular a partir da valoração de suas proposições atômicas. Para isto, usaremos a definição que representa a semântica dos conectivos lógicos.

**Definição 3.2.** Sejam $\alpha$ e $\beta$ proposições atômicas e $v : \{\alpha, \beta\} \mapsto \{0, 1\}$ uma valoração então:

- $v(\neg\alpha) = v(\alpha)^*$
- $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \bullet v(\beta)$
- $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) + v(\beta)$
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = v(\alpha)^* + v(\beta)$
- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = (v(\alpha)^* + v(\beta) \bullet (v(\alpha) + v(\beta)^*)$

## 3.4 Tabela de Verdade

Dada uma proposição molecular podemos especular sobre quais os possíveis valores de verdade que ela pode ter para uma determinada valoração de seus átomos. Mais ainda, podemos especular sobre os valores de verdade que ela pode ter para todas as possíveis valorações de seus átomos. Podemos reunir todas as possíveis valorações de uma proposição molecular em uma tabela, a qual denominamos de **TABELA DE VERDADE**. Os possíveis valores para uma proposição molecular, como vocês já sabem, são dois: falso 0 e verdadeiro 1. Desta forma, o número de todas as possíveis combinações de valores de verdade para um conjunto de $n$ proposições atômicas é $2^n$.

**OBS 3.3.** Cada linha de uma tabela de verdade é denominada uma instância ou simplesmente uma valoração.

Um conceito muito útil ao se manipular proposições moleculares é o de subfórmula, que entre outras coisas serve para criação de tabela de verdade. Vamos à definição:

**Definição 3.3.** Uma subfórmula é definida pelas seguintes regras:

- se $\alpha$ é uma fórmula então $\alpha$ é uma subfórmula.
- se $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ são fórmulas e $\alpha = \neg\beta$, $\alpha = \beta \wedge \gamma$, $\alpha = \beta \vee \gamma$, $\alpha = \beta \to \gamma$ ou $\alpha = \beta \leftrightarrow \gamma$ então $\beta$ e $\gamma$ são subfórmulas de $\alpha$.
- Se $x$ é uma variável e $\alpha = \forall x P(x)$ ou $\alpha = \exists x P(x)$ então $P(x)$ é subfórmula de $\alpha$.
- Se $\beta$ é subfórmula de $\alpha$ e $\gamma$ é subfórmula de $\beta$ então $\gamma$ é subfórmula de $\alpha$.
- nada mais é subfórmula.

Vejamos a seguir como o conceito de subfórmula pode ser usado na elaboração de um algoritmo para criar a tabela de verdade de uma proposição molecular. Vamos ao algoritmo para construção da tabela de verdade de uma proposição $\alpha$ molecular.

Algoritmo s. m. Sistema particular de disposição que se dá a uma sucessão de cálculos numéricos. Dicionário Prático Michaelis

**Passo 1** Contar o número $n$ de símbolos proposicionais.

**Passo 2** Montar uma tabela com $2^n$ linhas e tantas colunas, quantas forem as subfórmulas da proposição $\alpha$.

**Passo 3** Preencher as colunas dos símbolos proposicionais com 1 ou 0 alternando de cima para baixo para a primeira coluna 1010..., para a segunda coluna 11001100..., para a terceira coluna 1111000011110000... e assim por diante alternando sempre em potências de 2.

**Passo 4** computar o valor de verdade das outras colunas usando a semântica dos conectivos lógicos.

### 3.4.1 Uso de Parêntese e Prioridade dos Conectivos Lógicos

O uso de parênteses na construção de proposições moleculares mais complexas é inprescindível. Porém, mesmo em proposições moleculares relativamente simples o uso de parênteses também é necessário para evitar ambigüidades. Como exemplo a proposição $\alpha \vee \beta \wedge \gamma$ que pode ser interpretada de duas maneiras diferentes:

- $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$
- $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$

Daí, se não usarmos parênteses não poderemos decidir que interpretação teremos.

Em proposições moleculares mais complexas, o número de parênteses pode ser reduzido usando-se o subterfúgio da **ordem de prioridade**. Em palavras mais simples, **quem é mais forte do que quem** aplica aos quantificadores lógicos. A convenção para a ordem de prioridade dos conectivos lógicos, em ordem crescente de prioridade é:

- $\neg$ negação.
- $\wedge$ conjunção e $\vee$ disjunção.
- $\rightarrow$ implicação e $\leftrightarrow$ dupla implicação.

Onde, o conectivo $\neg$ negação é o mais fraco, tem prioridade mais baixa. Os conectivos $\wedge$ conjunção e $\vee$ disjunção vem a seguir com mesmo nível de prioridade, seguidos da $\rightarrow$ implicação e $\leftrightarrow$ dupla implicação, que têm a maior prioridade, sendo os conectivos mais fortes.

Desta forma, a proposição $(\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$ pode dispensar o par de parênteses externos e passar a forma $\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)$ que por sua vez, como a implicação $\rightarrow$ tem prioridade sobre a conjunção $\wedge$, o par de parênteses restante pode ser também dispensado. E a proposição toma, sem ambigüidade, a forma final $\alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma$. A propósito, tomaremos esta proposição para exemplificar o algoritmo da tabela de verdade. Primeiramente vemos que $\alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma$ tem três átomos. A saber, $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, o que nos dá $2^3 = 8$ linhas na tabela de verdade e como as subfórmulas são: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\beta \wedge \gamma$ e $\alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma$ teremos 5 colunas na tabela de verdade. Na coluna referente ao átomo $\alpha$ alternamos 10101010, na coluna referente ao átomo $\beta$ alternamos 11001100 e na coluna referente ao átomo $\gamma$ alternamos 11110000, construindo a **tabela 3.1** .

Finalmente, completamos as colunas restantes (**tabela 3.2**) usando a semântica dos conectivos lógicos aplicada a cada uma das subfórmulas restantes. A saber:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\beta \wedge \gamma$ | $\alpha \to \beta \wedge \gamma$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | |
| 0 | 1 | 1 | | |
| 1 | 0 | 1 | | |
| 0 | 0 | 1 | | |
| 1 | 1 | 0 | | |
| 0 | 1 | 0 | | |
| 1 | 0 | 0 | | |
| 0 | 0 | 0 | | |

Tabela 3.1: Proposição $\alpha \to \beta \wedge \gamma$.

## 3.5 Tautologia, Contradição e Contingência

Você já pensou na possibilidade de que uma proposição molecular possa ser verdadeira independente de quais os valores de verdade de suas proposições atômicas componentes? Se você respondeu que já, você acabou de antecipar um conceito importante **TAUTOLOGIA**. Para oficializar vamos à definição.

**Definição 3.4.** Uma fórmula molecular é dita uma **tautologia**, denotada $\top$, somente se seu valor de verdade for 1 verdade, para qualquer combinação de valor de verdade de seus átomos.

A contrapartida da **TAUTOLOGIA** é a **CONTRADIÇÃO** que é falsa independentemete dos valores de verdade de suas proposições atômicas componentes. Vamos à definição.

**Definição 3.5.** Uma fórmula molecular é dita uma **contradição**, denotada $\perp$, somente se seu valor de verdade for 0 falso, para qualquer combinação de valor de verdade de seus átomos.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\beta \wedge \gamma$ | $\alpha \to \beta \wedge \gamma$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Tabela 3.2: Proposição $\alpha \to \beta \wedge \gamma$.

**Definição 3.6.** Uma fórmula molecular é dita uma **contingência**, somente se não for uma tautologia nem uma contradição.

**Exemplo 3.2.** Como exemplos temos:

- $\neg(\beta \to \alpha)$ uma contingencia.
- $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ uma tautologia.
- $\alpha \wedge \neg(\beta \to \alpha)$ uma contradição.

Podemos confirmar verificando a tabela de verdade abaixo.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\neg\alpha$ | $\beta \to \alpha$ | $\neg(\beta \to \alpha)$ | $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ | $\alpha \wedge \neg(\beta \to \alpha)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Tabela 3.3: Contingência, tautologia e contradição.

Caro aluno, por hoje é só. Faremos um pequeno resumo do assunto exposto nesta aula e propomos algumas atividades de reforço. As referências bibliográficas fornecem material adicional de consulta, caso você queira aprofundar-se mais sobre o conteúdo abordado na aula de hoje.

## 3.6 Conclusão

Embora as valorações forneçam um modo elegante de definir a semântica de proposições, as tabelas de verdade constituem um método mais prático e visual de, também, definir a semântica de proposições moleculares.

## 3.7 Resumo

Começamos definindo o conceito de valoração. A saber:

**Definição:** Seja $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ um conjunto com $n$ proposições atômicas. Definimos uma valoração sobre $\Gamma$ como uma função $v : \Gamma \mapsto \{0, 1\}$.

Em seguida, vimos um tipo particular de álgebra definida sobre o conjunto $B = \{0, 1\}$ de valores de verdade, conhecida como álgebra de Boole, e composta de três operações: uma soma, um produto e um complementar, resumidos nas tabelas:

| $+$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| $\bullet$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| | $*$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Vimos que a álgebra de Boole permite definir de modo elegante e conciso, a semântica dos conectivos lógicos, dada por:

**Definição:** Se $\alpha$ e $\beta$ são proposições atômicas e $v : \{\alpha, \beta\} \mapsto \{0, 1\}$ uma valoração então, a semântica para os conectivos lógicos fica definida pelas valorações $v(\alpha)$ e $v(\beta)$, das proposições $\alpha$ e $\beta$, respectivamente, por:

- $v(\neg\alpha) = v(\alpha)^*$
- $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \bullet v(\beta)$
- $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha) + v(\beta)$
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = v(\alpha)^* + v(\beta)$
- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = (v(\alpha)^* + v(\beta) \bullet (v(\alpha) + v(\beta)^*)$

Que, para traçar a tabela de verdade, que resume todas as possíveis valorações de uma proposição molecular, é útil o conceito de subfórmula:

**Definição:** Uma subfórmula é definida pelas seguintes regras:

- se $\alpha$ é uma fórmula então $\alpha$ é uma subfórmula.
- se $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ são fórmulas e $\alpha = \neg\beta$, $\alpha = \beta \wedge \gamma$, $\alpha = \beta \vee \gamma$, $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$ ou $\alpha = \beta \leftrightarrow \gamma$ então $\beta$ e $\gamma$ são subfórmulas de $\alpha$.
- Se $x$ é uma variável e $\alpha = \forall x P(x)$ ou $\alpha = \exists x P(x)$ então $P(x)$ é subfórmula de $\alpha$.
- Se $\beta$ é subfórmula de $\alpha$ e $\gamma$ é subfórmula de $\beta$ então $\gamma$ é subfórmula de $\alpha$.
- nada mais é subfórmula.

Que para traçar uma tabela de verdade para uma proposição molecular usamos o seguinte algoritmo:

**Passo 1** Contar o número $n$ de símbolos proposicionais.

**Passo 2** Montar uma tabela com $2^n$ linhas e tantas colunas quantas forem as subfórmulas da proposição $p$.

**Passo 3** Preencher as colunas dos símbolos proposicionais com 1 ou 0 alternando de cima para baixo para a primeira coluna 1010..., para a segunda coluna 11001100..., para a terceira coluna 1111000011110000... e assim por diante alternando sempre em potências de 2.

**Passo 4** computar o valor verdade das outras colunas usando as a semântica dos conectivos lógicos.

Finalmente vimos as definições de tautologia, contradição e contingência dadas por:
**Definição:** Uma fórmula molecular é dita uma **tautologia**, denotada $\top$ se, somente se seu valor de verdade é 1 verdade, para qualquer combinação de valor de verdade de seus átomos
**Definição:** Uma fórmula molecular é dita uma **contradição**, denotada $\perp$ se, somente se seu valor de verdade é 0 falso para qualquer combinação de valor de verdade de seus átomos
**Definição:** Uma fórmula molecular é dita uma **contingência**, somente se não for uma tautologia nem uma contradição

## 3.8 Atividades

**ATIV. 3.1.** Construa a tabela de verdade para cada uma das proposições moleculares abaixo:

- $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

- $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$.

**Comentário:** Reveja o algoritmo e exemplo da **seção 3.4**.

**ATIV. 3.2.** Verifique se cada uma das proposições moleculares abaixo são tautologia, contradição ou contingência:

- $(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \leftrightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \gamma)$.
- $(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.
- $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \wedge \neg\beta)$.

**Comentário:** Use a tabela de verdade para cada uma das proposições. Reveja o algoritmo e exemplo da **seção 3.4**

## 3.9 Referências Bibliográficas

MORTARI, Cezar Augusto. Introdução à Lógica. Editora UNESP. São Paulo. 2001.

GASPAR, Marisa. Introdução à Lógica Matemática. Disponível em: http:// mjgaspar.sites.uol.com.br/logica/logica. Acessado em 13/01/2007

ABAR, Celina. Noções de Lógica Matemática. Disponível em: http://www. pucsp.br/∼logica/. Acessado em 13/01/2007