1
LIVRO

4
AULA

# Regras de Inferência e Regras de Equivalência

**META:**

Introduzir algumas regras de inferência e algumas regras de equivalência.

**OBJETIVOS:**

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Reconhecer se uma proposição é uma regra de inferência;

Reconhecer se uma proposição é uma regra de equivalência.

**PRÉ-REQUISITOS**

Aula-02 os conhecimentos da semântica da Linguagem da Lógica de Predicados.

## 4.1 Introdução

Caro aluno, em nossas aulas anteriores, estabelecemos a linguagem da lógica de predicados, conhecida também por lógica de primeira espécie, estudamos como determinar a semântica de uma proposição molecular usando tabelas de verdade. Aqui, daremos um passo adiante, estudaremos as relações de equivalência e veremos como usá-las na manipulação de proposição moleculares.

## 4.2 Regras de Equivalência

Começaremos nossa aula pela definição do que é uma regra de equivalência e em seguida, listaremos uma seqüência das principais regras de equivalência da lógica de predicados. Vejamos:

**Definição 4.1.** Dizemos que uma fórmula $\alpha$ é semanticamente equivalente a fórmula $\beta$, denotado $\alpha \equiv \beta$, somente se $\alpha \leftrightarrow \beta$ for uma tautologia.

Aqui temos algumas das principais regras de equivalência:

**E01** $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$ (Idempotência da conjunção).

**E02** $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$ (Idempotência da disjunção).

**E03** $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ (Comutativa da conjunção).

**E04** $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$ (Comutativa da disjunção).

**E05** $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ (Associativa da conjunção).

**E06** $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ (Associativa da disjunção).

**E07** $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ (Distributiva da conjunção).

**E08** $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ (Distributiva da disjunção).

**E09** $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ (Dupla negação).

**E10** $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ (DeMorgan da conjunção).

**E11** $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ (DeMorgan da disjunção).

**E12** $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$ (Implicação).

**E13** $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ (Dupla implicação).

Augustus De Morgan nasceu em Madura, na Índia, em 27 de junho de 1806 - morreu em Londres, 18 de marco de 1871. Foi um Matemático e Lógico britânico. Formulou as Leis de De Morgan e foi o primeiro a tornar rigorosa a idéia da Indução Matemática. Wikipedia

**OBS 4.1.** As propriedades comutativas e associativas da conjunção e da disjunção significam que em uma proposição envolvendo só conjunções ou disjunções podemos dispensar o uso de parênteses. Observamos também, que a dupla implicação também possui propriedades comutativa e associativa. Por outro lado a implicação não é comutativa (vide a propriedade contrapositiva) nem associativa (vide propriedade da implicação).

**OBS 4.2.** As leis de De Morgan como o nome já indica foram proposta pelo matemático inglês Augustus De Morgan e descrevem como a negação é distribuída sobe a conjunção e sobre a disjunção.

**OBS 4.3.** Uma infinidade de outras regras de equivalência podem ser propostas. As expostas acima são algumas das mais importantes, pois representam importantes propriedades dos conectivos lógicos.

Da mesma forma definiremos primeiramente o que vem a ser uma regra de inferência, para em seguida listar algumas das principais regras de inferência da lógica de predicados. A saber:

**Definição 4.2.** Dizemos que uma fórmula $\beta$ é semanticamente inferida das fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, denotado $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ se somente se $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ é uma tautologia.

Aqui temos algumas das principais regras de inferência:

**I01** $\alpha, \beta \vdash \alpha$ (Simplificação)

**I02** $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ (Adição)

**I03** $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$ (Modus pones)

**I04** $\neg\beta, \alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\alpha$ (Modus Tollens)

**I05** $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$ (Silogismo hipotético)

**OBS 4.4.** As regras de inferência, na lógica de predicados, são infinitas. Porém, aqui listamos apenas algumas das mais importantes.

Completando as regras de inferência e de equivalência temos os axiomas, sobre os quais a lógica de predicados é estabelecida. Axiomas são em si regras de inferências ou de equivalência tão especiais que mereceram o status de axiomas isto é, proposições assumidas como verdades absolutas. O conjunto de axiomas pode ter um ou mais axiomas substituídos por outros. Mesmo o número de axiomas adotados pode variar dependendo da vontade, estilo ou telha do Lógico Matemático que os propõe. Veremos aqui os axiomas mais usuais. A saber:

**A01** $x = x$ Axioma da identidade.

**A02** $((x = y) \wedge P(x)) \vdash P(y)$ Axioma da substituição.

**A03** $(\alpha \rightarrow (\beta \wedge \neg\beta)) \vdash \neg\alpha$ Axioma da não-contradição.

**A04** $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\alpha \rightarrow \beta) \vdash \beta$ Axioma do terceiro excluído.

**OBS 4.5.** O axioma da identidade diz que qualquer objeto é igual a si mesmo. Embora possa parecer óbvio que qualquer coisa é igual a ela mesma, este objeto do conhecimento comum tem que ser axiomatizado, visto que em Matemática não existe nada óbvio tudo tem que ser provado, demonstrado ou axiomatizado isto é, assumido como verdade.

**OBS 4.6.** O axioma da substituição, juntamente com o axioma da identidade formam uma base sólida para muitas das demonstrações em Matemática. Em particular o axioma da substituição diz que se dois objetos matemáticos são iguais, onde aparecem uma instância do primeiro, ela pode ser substituída pelo segundo.

**OBS 4.7.** O axioma da não-contradição cuida para que uma proposição não possa ser provada dentro da lógica e que sua negação também possa ser provada.

**OBS 4.8.** Um axioma do terceiro excluído, conhecido também como axioma do meio termo excluído, diz que uma proposição deverá ser ou falsa ou verdadeira, sendo vedado o direito de ser falsa e verdadeira e também negado o direito de ser nem falsa nem verdadeira. Estas duas proibições fincam a base da Matemática. Porém, como a lógica é mais uma filosofia, desta forma a Lógica Paraconsistente mantêm o princípio do terceiro excluído com apenas a proibição de uma proposição ser nem falsa e nem verdadeira e relaxando a proibição de ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo. Já a Lógica Paracompleta mantêm a proibição de uma proposição ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo, porém aceita que uma proposição possa ser nem falsa e nem verdadeira.

Completando os axiomas acima, temos mais três esquemas de axiomas. A saber:

**A05** $(\alpha \to (\beta \to \alpha))$

**A06** $((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$

**A07** $((\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta))$

## 4.3 Subconjuntos Completos de Conectivos

O conceito de subconjunto completo de conectivos é importante para quem deseja desenvolver a lógica de predicados de forma mais compacta em seu aspecto sintático, porém ao diminuir a quantidade de conectivos para representar uma dada proposição, aumentamos drasticamente o número de parênteses que por sua vez é uma complicação manter a paridade abre parêntese, fecha parêntese.

**Definição 4.3.** Denotamos e definimos o conjunto de conectivos básicos da Lógica de Predicados por:

$$C = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

**Definição 4.4.** Seja $A \subset C$. Dizemos que $A$ é completo, somente se todos os conectivos de $C$ poderem ser equivalentes a uma fórmula em que constem apenas conectivos de $A$.

**Exemplo 4.1.** $A = \{\neg, \wedge, \vee\}$ é um conjunto completo de conectivos.

**PROVA:**

| | | |
|---|---|---|
| 01 | $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$ | implicação |
| 02 | $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ | dupla implicação |
| 03 | $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$ | 1 em 2 |

Portanto, 1 e 3 garantem que $A$ é um subconjunto completo de conectivos de $C$. $\square$

Vejamos também um segundo exemplo.

**Exemplo 4.2.** $A = \{\neg, \rightarrow\}$ é um conjunto completo de conectivos.

**PROVA:**

| | | |
|---|---|---|
| 01 | $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \wedge \beta$ | implicação |
| 02 | $\neg\alpha \wedge \beta \equiv \alpha \to \beta$ | $\alpha \equiv \beta \leftrightarrow \beta \equiv \alpha$ |
| 03 | $\neg\neg\alpha \wedge \beta \equiv \neg\alpha \to \beta$ | de 2 e $\alpha = \neg\alpha$ |
| 04 | $\alpha \wedge \beta \equiv \neg\alpha \to \beta$ | de 3 e $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ |

Antes de continuar com a prova é necessário uma nova inferência.

A saber: $\alpha \equiv \beta \vdash \neg\alpha \equiv \neg\beta$.

**PROVA:**

| | | |
|---|---|---|
| 05 | $\alpha \equiv \beta$ | Premissa |
| 06 | $\alpha \leftrightarrow \beta$ | definição |
| 07 | $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$ | dupla implicação |
| 08 | $(\neg\beta \to \neg\alpha) \wedge (\neg\alpha \to \neg\beta)$ | contrapositiva |
| 09 | $(\neg\alpha \to \neg\beta) \wedge (\neg\beta \to \neg\alpha)$ | comut. da conjunção |
| 10 | $\neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta$ | dupla implicação |
| 11 | $\neg\alpha \equiv \neg\beta$ | definição |

Podemos agora encontrar uma fórmula para disjunção. A saber:

| | | |
|---|---|---|
| 12 | $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \to \beta)$ | aplicando 11 em 4 |
| 13 | $\neg\alpha \vee \neg\beta \equiv \neg(\neg\alpha \to \beta)$ | De Morgan |
| 14 | $\neg\neg\alpha \vee \neg\neg\beta \equiv \neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta)$ | $\alpha = \neg\alpha$ e $\beta = \neg\beta$ |
| 15 | $\alpha \vee \beta \equiv \neg(\alpha \to \neg\beta)$ | $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ e $\neg\neg\beta \equiv \beta$ |

Finalmente vamos encontrar uma fórmula para a dupla implicação.

A saber:

| | | |
|---|---|---|
| 16 | $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$ | dupla implicação |
| 17 | $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \neg(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)$ | usando 4 em 16 |

Portanto, 4, 15 e 17 garantem que $A$ é um subconjunto completo de conectivos de $C$. $\square$

Podemos também, definir novos conectivos partindo de um conjunto completo de conectivos, como na tabela abaixo.

| Descrição | Símbolo | Definição do conectivo |
|---|---|---|
| Tautologia | $\top$ | $\alpha \vee \neg\alpha$ |
| Contradição | $\perp$ | $\alpha \wedge \neg\alpha$ |
| Ou excluusivo | $\dot{\vee}$ | $(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)$ |
| Não-e | $\bar{\wedge}$ | $\neg(\alpha \wedge \beta)$ |
| Não-ou | $\bar{\vee}$ | $\neg(\alpha \vee \beta)$ |

Uma pergunta agora seria muito natural. Seria possível encontrar um conjunto completo de conectivos com apenas um elemento? A reposta é sim, e esses conectivos são chamados de "barras de Sheffer" ou "conectivos de Sheffer", definidos por:

**Definição 4.5.** Sejam $\alpha$ e $\beta$ duas proposições atômicas. Definimos os conectivos de Sheffer, denotados, $\alpha \downarrow \beta$ e $\alpha|\beta$, por:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \downarrow \beta$ | $\alpha|\beta$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

**OBS 4.9.** Como $\neg\alpha \equiv \alpha \downarrow \alpha$ e $\alpha \wedge \beta \equiv (\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta)$ e $A = \{\neg, \wedge\}$ é um conjunto completo. Logo $B = \{\downarrow\}$ é também um conjunto completo.

**OBS 4.10.** Temos que, como $\neg\alpha \equiv \alpha|\alpha$ e $\alpha \vee \beta \equiv (\alpha|\alpha)|(\beta|\beta)$ e $A = \{\neg, \vee\}$ é um conjunto completo. Logo $B = \{|\}$ é também um conjunto completo.

## 4.4 Conclusão

Ao final dessa aula, podemos concluir que é possível fazer a Lógica de predicados com um número menor de conectivos, porém resulta na complexidade das proposições geradas por estes novos conjuntos de conectivos.

## 4.5 Resumo

Começamos por definir o que é uma regra de equivalência:

**Definição:** Dizemos que uma fórmula $\alpha$ é semanticamente equivalente a fórmula $\beta$, denotado $\alpha \equiv \beta$, somente se $\alpha \leftrightarrow \beta$ for uma tautologia.

Em seguida vimos vários tipos de regras de equivalência:

**E01** $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$ (Idempotência da conjunção).

**E02** $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$ (Idempotência da disjunção).

**E03** $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$ (Comutativa da conjunção).

**E04** $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$ (Comutativa da disjunção).

**E05** $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ (Associativa da conjunção).

**E06** $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ (Associativa da disjunção).

**E07** $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ (Distributiva da conjunção).

**E08** $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ (Distributiva da disjunção).

**E09** $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ (Dupla negação).

**E10** $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ (DeMorgan da conjunção).

**E11** $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ (DeMorgan da disjunção).

**E12** $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$ (Implicação).

**E13** $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ (Dupla implicação).

Vimos também a definição de regras de inferência, dada por:

**Regras de Inferência e Regras de Equivalência**

**Definição:** Dizemos que uma fórmula $\beta$ é semanticamente inferida das fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, denotado $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ se somente se $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \to \beta$ é uma tautologia.

E algumas poucas regras de inferência. A saber:

**I01** $\alpha, \beta \vdash \alpha$ (Simplificação)

**I02** $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ (Adição)

**I03** $\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$ (Modus pones)

**I04** $\neg\beta, \alpha \to \beta \vdash \neg\alpha$ (Modus Tollens)

**I05** $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$ (Silogismo hipotético)

Vimos que a Lógica Matemática é baseada em alguns axiomas, que são proposições tomadas como verdadeiras independentemente de demonstrações. E um conjunto de axiomas pode ser dado por:

**A01** $x = x$ Axioma da identidade.

**A02** $((x = y) \wedge P(x)) \vdash P(y)$ Axioma da substituição.

**A03** $(\alpha \to (\beta \wedge \neg\beta)) \vdash \neg\alpha$ Axioma da não-contradição.

**A04** $(\alpha \to \beta) \wedge (\neg\alpha \to \beta) \vdash \beta$ Axioma do terceiro excluído.

Em seguida vimos a definição de conjunto completo de conectivos. A saber:

**Definição:** Denotamos e definimos o conjunto de conectivos básicos da Lógica de Predicados por: $C = \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

**Definição:** Seja $A \subset C$. Dizemos que $A$ é completo, somente se todos os conectivos de $C$ poderem ser equivalentes a uma fórmula em que constem apenas conectivos de $A$.

Finalmente vimos os conectivos de Sheffer, definidos pela tabela de verdade abaixo:

**Definição:** Sejam $\alpha$ e $\beta$ duas proposições atômicas. Definimos os conectivos de Sheffer, denotados, $\alpha \downarrow \beta$ e $\alpha | \beta$, por:

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \downarrow \beta$ | $\alpha \vert \beta$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

## 4.6 Atividades

**ATIV. 4.1.** Mostre que $A = \{\neg, \wedge\}$ e $A = \{\neg, \vee\}$ são conjuntos completos de conectivos.

**Comentário:** Reveja os exemplos da **seção 4.3**

**ATIV. 4.2.** Considere os conectivos de Sheffer e mostre, usando tabela de verdade, que:

- $\neg\alpha \equiv \alpha \downarrow \alpha$
- $\alpha \wedge \beta \equiv (\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta)$
- $\neg\alpha \equiv \alpha|\alpha$
- $\alpha \vee \beta \equiv (\alpha|\alpha)|(\beta|\beta)$

**Comentário:** Reveja a aula anterior sobre tabelas de verdade.

## 4.7 Referências Bibliográficas

MORTARI, Cezar Augusto. Introdução à Lógica. Editora UNESP. São Paulo. 2001.

GASPAR, Marisa. Introdução à Lógica Matemática. Disponível em: http:// mjgaspar.sites.uol.com.br/logica/logica. Acessado em 13/01/2007

ABAR, Celina. Noções de Lógica Matemática. Disponível em: http://www. pucsp.br/∼logica/. Acessado em 13/01/2007