1
LIVRO

5
AULA

Teorias Axiomáticas

META:

Apresentar teorias axiomáticas.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Criar teorias axiomáticas;

Provar a independência dos axiomas de uma teoria axiomática.

PRÉ-REQUISITOS

Aula-02 e Aula-04 os conhecimentos da semântica da Linguagem da Lógica de Predicados, das regras de inferência e das regras de equivalência .

5.1 Introdução

Caro aluno, em nossas aulas anteriores, estabelecemos a linguagem da lógica de predicados, conhecida também por lógica de primeira espécie. Vimos também como determinar a semântica de uma proposição molecular usando tabelas de verdade. Estudamos as relações de equivalência e vimos como usá-las na manipulação de proposições moleculares. Na aula de hoje, dando continuidade ao nosso estudo da Lógica, o assunto abordado será "Teorias Axiomáticas".

Euclides, matemático grego, nasceu em Alexandria. Foi o criador da famosa geometria euclidiana. Escreveu Stoichia (Os elementos, 300 a.C.) composto de 13 livros: cinco sobre geometria plana, três sobre números, um sobre a teoria das proporções, um sobre incomensuráveis e os três últimos sobre geometria no espaço. Wikipedia

5.2 Sistemas Axiomáticos

O primeiro sistema axiomático conhecido é a Geometria Euclidiana desenvolvida pelo Matemático grego Euclides. Embora em uma forma rudimentar, a Geometria Euclidiana tem basicamente a mesma estrutura do que hoje denominamos de um sistema axiomático. Seus críticos, no entanto, dizem que ela surgiu da incapacidade de Euclides provar certas proposições da geometria plana. Se isto é verdade ou não, não sabemos, mas o fato é que a Geometria Euclidiana teve uma grande importância na história do desenvolvimento da Matemática.

Definição 5.1. Um Sistema axiomático é uma estrutura constituída de:

- Termos indefinidos.
- Termos definidos a partir dos termos indefinidos.
- Proposições envolvendo os termos indefinidos e/ou os termos

definidos, assumidas como verdadeiras e denominadas axiomas.

OBS 5.1. Para os antigos filósofos gregos, um axioma era uma reivindicação que poderia ser vista como verdadeira sem nenhuma necessidade de prova.

OBS 5.2. Na Geometria Euclidiana, Euclides não faz uso de termos indefinidos. Por exemplo, definiu ponto como: "ponto é aquilo que não tem dimensão". No entanto esta definição é vazia, já que o termo dimensão não foi por ele definido nem assumido como termo indefinido. Dos três aspectos que definem uma teoria axiomática apenas os termos definidos podem ser dispensáveis.

Definição 5.2. Um sistema axiomático é dito consistente somente se, partindo de seus axiomas não podermos provar uma proposição envolvendo seus termos definidos e/ou indefinidos e provar também a sua negativa.

Definição 5.3. Um sistema axiomático é dito completo, somente se for possível provar ou refutar qualquer proposição envolvendo seus termos definidos e/ou indefinidos.

Definição 5.4. Um sistema axiomático é dito independente, somente se cada um de seus axiomas não pode ser deduzido a partir dos demais axiomas.

OBS 5.3. Kurt Goedel mostrou que um sistema axiomático pode ter a propriedade de consistência ou de completude, nunca as duas ao mesmo tempo. Das duas propriedades a mais importante para a Matemática é a consistência. Não é admissível poder, em Matemática, provar que um teorema é ao mesmo tempo falso e verdadeiro.

Quanto a independência, alguns matemáticos admitem sistemas axiomáticos redundantes, cujos axiomas não são independentes.

5.2.1 Exemplos de Alguns Sistemas Axiomáticos

Exemplo 5.1. Considere o seguinte sistema axiomático

- **Termos Indefinidos**

  TI1 O conjunto A de "termos indefinidos um"

- **Termos Definidos**

  TD1 O operador $\bigcirc : A \times A \mapsto A$ "operador um"

  TD2 O operador $\Box : A \times A \mapsto A$ "operador dois"

- **Axiomas**

  A1 $\forall a, b \in A, a \bigcirc b = b \bigcirc a$

  A2 $\forall a, b, c \in A, (a \bigcirc b) \bigcirc c = a \bigcirc (b \bigcirc c)$

  A3 $\exists x \in A | \forall a \in A, a \bigcirc x = a$

  A4 $\forall a \in A, \exists a^* \in A | a \bigcirc a^* = x$

  A5 $\forall a, b, c \in A, (a \Box b) \Box c = a \Box (b \Box c)$

  A6 $\forall a, b, c \in A, a \Box (b \bigcirc c) = (a \Box b) \bigcirc (a \Box c), (b \bigcirc c) \Box a = (b \Box a) \bigcirc (c \Box a)$

Exemplo 5.2. Considere o seguinte sistema axiomático

- **Termos Indefinidos**

TI1 O conjunto A de "termos indefinidos um", representados por letras latinas maiúsculas

TI2 O conjunto a de "termos indefinidos dois", representados por letras latinas minúsculas

TI3 Uma relação de igualdade $(=)$ entre os "termos indefinidos um"

TI4 Uma relação binária $(\bigcirc)$ entre os "termos indefinidos um" e os "termos indefinidos dois"

- **Axiomas**

A1 $\forall A, B, \neg(A = B), \exists! x | A \bigcirc x \wedge B \bigcirc x$

A2 $\forall x, \exists A, B, \neg(A = B) | A \bigcirc x \wedge B \bigcirc x$

A3 $\exists x, \exists A | \neg(A \bigcirc x)$

Exemplo 5.3. Considere o seguinte sistema axiomático

- **Termos Indefinidos**

TI1 O conjunto A de "termos indefinidos um", representados por letras latinas maiúsculas

TI2 O conjunto a de "termos indefinidos dois", representados por letras latinas minúsculas

TI3 Uma relação de igualdade $(=)$ entre os "termos indefinidos um"

TI4 Uma relação binária ($\bigcirc$) entre os "termos indefinidos um" e os "termos indefinidos dois"

- **Axiomas**

A1 $\exists A, B, C, \neg(A = B), \neg(A = C), \neg(B = C)$

A2 $\forall A, \exists! x | A \bigcirc x$

A3 $\forall x, \exists! A, B, \neg(A = B) | A \bigcirc x \wedge B \bigcirc x$

Definição 5.5. Um modelo para um sistema axiomático é uma estrutura bem definida que dá significado aos termos indefinidos e satisfaz cada um de seus axiomas.

OBS 5.4. A existência de um modelo concreto para um sistema axiomático prova a consistência do mesmo. Modelos servem também para provar a independência dos axiomas de um sistema axiomático. Basta mostrar modelos em que cada um dos axiomas de um sistema axiomático não é satisfeito, enquanto que os demais são satisfeitos.

Vamos a alguns modelos para os sistemas axiomáticos exemplificados acima.

MODELO 5.1. Para o primeiro sistema axiomático, que em álgebra define uma estrutura de anel, um modelo pode ser dado por $A = \mathbb{Z}$ conjunto dos inteiros, $\bigcirc = +$ soma nos inteiros e $\square = \bullet$ produto nos inteiros. Os axiomas terão, então, os seguintes significados: **A1** propriedade comutativa da soma, **A2** propriedade associativa da soma, **A3** existência do elemento neutro aditivo, **A4** existência do elemento simétrico **A5** propriedade associativa do produto e **A6** propriedade distributiva.

OBS 5.5. Outros modelos envolvendo conjuntos numéricos constituim-se em um anel como os racionais $\mathbb{Q}$, os reais $\mathbb{R}$ e os complexos $\mathbb{C}$. Temos também em álgebra, muitos exemplos de anéis finitos isto é, com um número finito de elementos.

MODELO 5.2. Para sistema axiomático do exemplo 2, conhecido como primeira geometria da incidência, um modelo pode ser dado por: $A = \{A, B, C\}$ apenas três elementos, $a = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$ os três subconjuntos de A constituídos por dois elementos e $\bigcirc = \in$ a relação de pertinência, no sentido da teoria dos conjuntos. Os axiomas são verificados por exaustão.

A1:

$\neg(A = B) \to \exists! x, x = \{A, B\} | A \in x \wedge B \in x$

$\neg(A = C) \to \exists! x, x = \{A, C\} | A \in x \wedge C \in x$

$\neg(B = C) \to \exists! x, x = \{B, C\} | B \in x \wedge C \in x$

Logo:

$\forall A, B, \neg(A = B), \exists! x | A \bigcirc x \wedge B \bigcirc x$

A2:

$x = \{A, B\} \to \exists A, B, \neg(A = B) | A \in x \wedge B \in x$

$x = \{A, C\} \to \exists A, C, \neg(A = C) | A \in x \wedge C \in x$

$x = \{B, C\} \to \exists B, C, \neg(B = C) | B \in x \wedge C \in x$

Logo:

$\forall x, \exists A, B, \neg(A = B) | A \bigcirc x \wedge B \bigcirc x$

A3:

$x = \{B, C\} \to \neg(A \in x)$

Logo:

$\exists x, \exists A | \neg(A \bigcirc x)$

Desta forma todos os três axiomas são satisfeitos pelo modelo.

OBS 5.6. Como foi possível encontrar um modelo para os sistemas axiomáticos dos exemplos 1 e 2, estes sistemas axiomáticos são consistentes. Porém, o sistema axiomático do exemplo 3 é inconsistente, desde que com três elementos é impossível satisfazer os axiomas **A2** e **A3**.

Caro aluno, por hoje é só. Mas como podemos perceber no decorrer de nossa aula, o conteúdo abordado exigiu um pouco mais de atenção e dedicação para obtermos uma compreensão melhor, por isso continuem estudando e releiam a aula o quanto for necessário. Não abandone o lápis e o papel e procure repetir as argumentações apresentadas

5.3 Conclusão

Na Matemática também é necessário acreditar em alguma coisa e admiti-la como verdade sem nenhuma prova, isto é, são os Sistemas Axiomáticos que possiblitam a existência da Matemática como a conhecemos hoje. Que, dos vários aspectos de uma teoria axiomática a que mais importa para a Matemática é a sua consistência.

5.4 Resumo

Começamos por estabelecer, via definição, o conceito de sistema axiomático. A saber:

Definição: Um Sistema axiomático é uma estrutura constituída de:

- Termos indefinidos.
- Termos definidos a partir dos termos indefinidos.

- Proposições envolvendo os termos indefinidos e/ou os termos definidos, assumidas como verdadeiras e denominadas axiomas.

Em seguida definimos três importantes propriedades de sistemas axiomáticos. A saber:

Definição: Um sistema axiomático é dito consistente, somente se partindo de seus axiomas não podermos provar uma proposição envolvendo seus termos definidos e/ou indefinidos e também provar a sua negativa.

Definição: Um sistema axiomático é dito completo, somente se for possível provar ou refutar qualquer proposição envolvendo seus termos definidos e/ou indefinidos.

Definição: Um sistema axiomático é dito independente, somente se cada um de seus axiomas não pode ser deduzido a partir dos demais axiomas.

5.5 Atividades

ATIV. 5.1. Modifique os axiomas do exemplo 3 de modo que o novo sistema axiomático, assim constituído, seja consistente.

Comentário: Volte ao texto e reveja o conceito de consistência.

ATIV. 5.2. Escreva um sistema axiomático com três axiomas e proponha um modelo para o mesmo.

Comentário: Não é necessário provar nenhuma das propriedades dos sistemas axiomáticos: independência, completude ou consistência.

ATIV. 5.3. Proponha um modelo para o sistema axiomático do exemplo 2.

Comentário: Volte ao texto e reveja os exemplos.

5.6 Referências Bibliográficas

MORTARI, Cezar Augusto. Introdução à Lógica. Editora UNESP. São Paulo. 2001.

GASPAR, Marisa. Introdução à Lógica Matemática. Disponível em: http:// mjgaspar.sites.uol.com.br/logica/logica. Acessado em 13/01/2007

ABAR, Celina. Noções de Lógica Matemática. Disponível em: http://www. pucsp.br/∼logica/. Acessado em 13/01/2007